

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA E ESTATÍSTICA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

NOTAS DE AULAS

Herminio Cassago Junior
Luiz Augusto da Costa Ladeira

SÃO CARLOS - SP
2011

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Preliminares | 1 |
| 1.1 | PROBLEMAS ONDE SURGEM E.D.O. | 2 |
| 1.1.1 | UM PROBLEMA GEOMÉTRICO | 2 |
| 1.1.2 | UM PROBLEMA QUÍMICO | 3 |
| 1.1.3 | PROBLEMAS FÍSICOS | 3 |
| 1.2 | EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES | 7 |
| 2 | Equação Diferencial Linear de Primeira Ordem | 15 |
| 2.1 | A EQUAÇÃO HOMOGÊNEA | 17 |
| 2.2 | A EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA | 19 |
| 2.3 | ALGUMAS APLICAÇÕES | 24 |
| 2.3.1 | DESINTEGRAÇÃO RADIOATIVA | 24 |
| 2.3.2 | CIRCUITO ELÉTRICO | 25 |
| 2.3.3 | RESFRIAMENTO DE UM CORPO | 26 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.3.4 | DILUIÇÃO DE MISTURAS | 28 |
| 2.3.5 | OUTRAS APLICAÇÕES | 30 |
| 3 | Equações Lineares de Segunda Ordem | 31 |
| 3.1 | TEORIA GERAL PARA EQUAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM | 33 |
| 3.2 | REDUÇÃO DE ORDEM | 41 |
| 3.3 | EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES | 43 |
| 3.4 | A EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA | 52 |
| 3.4.1 | MÉTODO DOS COEFICIENTES A DETERMINAR | 55 |
| 3.4.2 | MÉTODO DE VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS (OU VARIAÇÃO DAS CONSTANTES) | 64 |
| 3.5 | ALGUMAS APLICAÇÕES | 67 |
| 3.5.1 | VIBRAÇÕES MECÂNICAS | 67 |
| 3.5.2 | CIRCUITOS ELÉTRICOS | 70 |
| 3.5.3 | OUTRAS APLICAÇÕES | 72 |
| 3.6 | EQUAÇÕES DE ORDEM SUPERIOR | 73 |
| 3.7 | MÉTODO DOS COEFICIENTES A DETERMINAR | 79 |
| 3.8 | MÉTODO DE VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS | 80 |
| 4 | Transformada de Laplace | 82 |
| 4.1 | INTEGRAIS IMPRÓPRIAS | 82 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.2 | A TRANSFORMADA DE LAPLACE | 84 |
| 4.3 | ALGUMAS PROPRIEDADES | 85 |
| 4.4 | TRANSFORMADA INVERSA - FRAÇÕES PARCIAIS . . | 89 |
| 4.5 | APLICAÇÃO A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS | 92 |
| 4.6 | OUTRAS PROPRIEDADES | 94 |
| 4.7 | DELTA DE DIRAC | 97 |
| 4.7.1 | TRANSFORMADA DE LAPLACE DE $\delta(t - t_0)$. . | 98 |
| 4.8 | O PRODUTO DE CONVOLUÇÃO | 100 |
| 4.9 | TABELA DE ALGUMAS TRANSFORMADAS | 103 |
| 5 | Sistemas de Equações Diferenciais | 105 |
| 5.1 | Teoria Geral para Sistemas | 107 |
| 5.2 | SISTEMAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES | 116 |
| 5.3 | SISTEMAS LINEARES NÃO HOMOGÊNEOS COM COEFICI- CIENTES CONSTANTES | 128 |
| 5.4 | MÉTODO DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS | 131 |
| 5.5 | RESOLUÇÃO DE SISTEMAS PELA TRANSFORMADA DE LAPLACE | 135 |
| 6 | Equações Não Lineares de Primeira Ordem | 138 |
| 6.1 | EQUAÇÕES EXATAS | 138 |
| 6.2 | EQUAÇÕES COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS | 144 |

| | | |
|-----|-----------------------------------|------------|
| 6.3 | FATORES INTEGRANTES | 146 |
| 6.4 | EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS | 148 |
| 6.5 | HOMOGENEIZAÇÃO | 150 |
| | Respostas dos Exercícios | 154 |
| | Referências Bibliográficas | 167 |

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste curso é mostrar alguns métodos de resolução de alguns tipos de equações diferenciais que aparecem mais frequentemente.

Uma **equação diferencial** é uma relação que envolve uma “função incógnita” e suas derivadas ou diferenciais. Por exemplo:

$$(1) \dot{y}(t) = f(t), \text{ em que } \dot{y} \text{ denota } \frac{dy}{dt}.$$

$$(2) \ddot{y}(t) + y(t) = 0.$$

$$(3) y^{(3)}(t) + (\text{sen } t) \ddot{y}(t) + 5t y(t) = 0.$$

$$(4) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0.$$

$$(5) M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0.$$

Uma **equação diferencial ordinária** (E.D.O.) é uma equação diferencial na qual a função incógnita depende apenas de uma variável.

As equações (1), (2), (3) e (5) acima são exemplos de equações diferenciais ordinárias. Se a função incógnita depender de mais de uma variável, temos uma **equação diferencial parcial** (E.D.P.). É o caso da equação (4). Estaremos interessados exclusivamente nas E.D.O.'s.

A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada da função incógnita. Portanto, (1) é uma equação de primeira ordem, (2) é de segunda ordem e (3) é de terceira ordem.

Uma **solução** de uma equação diferencial é uma função definida num intervalo que, juntamente com suas derivadas, satisfaz a equação diferencial dada. Por exemplo, a função $y(t) = \sin t$ é uma solução da E.D.O. de segunda ordem $\ddot{y} + y = 0$, pois,

$$\frac{d^2 \sin t}{dt^2} + \sin t = -\sin t + \sin t = 0.$$

Verifique que, para cada $c \in \mathbb{R}$, a função $y_c(t) = ce^{kt}$ é uma solução da E.D.O. de primeira ordem $\dot{y} = ky$ e que $y_c(t) = ct$ é uma solução de E.D.O. de segunda ordem $\ddot{y} = 0$.

1.1 PROBLEMAS ONDE SURGEM E.D.O.

1.1.1 UM PROBLEMA GEOMÉTRICO

Determine uma curva que seja definida pela condição de ter em todos os pontos (x, y) a inclinação $\frac{dy}{dx}$ igual ao dobro da soma das coordenadas do ponto.

Se $y = y(x)$ é a equação da curva, então, para resolver este problema devemos resolver a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = 2(x + y).$$

1.1.2 UM PROBLEMA QUÍMICO

Suponha que 100 gramas de açúcar de cana, em água, estão sendo transformados em dextrose numa razão que é proporcional à quantidade não transformada. Deseja-se saber quanto açúcar foi transformado após t minutos.

Se q é o número de gramas convertido em t minutos e k é a constante de proporcionalidade, então, a equação deste problema é dada por:

$$\frac{dq}{dt} = k(100 - q),$$

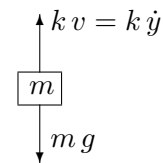
sabendo-se que $q(0) = 0$.

1.1.3 PROBLEMAS FÍSICOS

1. Movimento vertical

Vamos descrever o movimento vertical de um corpo de massa m sob a ação da gravidade em um meio que oferece resistência proporcional à velocidade do corpo. Deseja-se conhecer a posição do corpo num instante t .

Seja $y = y(t)$ a posição do corpo no instante t . Consideremos o sentido positivo o do movimento, isto é, para baixo. As forças que atuam sobre o corpo de massa m são: $m g$ devido à gravidade (no sentido do movimento) e $k \frac{dy}{dt}$ devido à resistência do meio (no sentido contrário ao movimento).

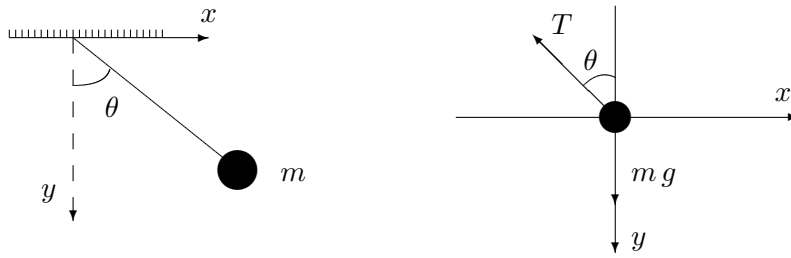


Segue da 2ª lei de Newton ($F = m a$) que a equação do movimento é dada por

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = m g - k \frac{dy}{dt}.$$

Conhecendo $y(0) = y_0$ e $\dot{y}(0) = 0$, determinamos a posição do corpo em qualquer instante.

2. Movimento de um pêndulo simples



As forças que atuam no corpo de massa m são a tensão T da corda (de comprimento ℓ) e a força vertical mg devido à gravidade. Se θ é o deslocamento angular da corda a partir da vertical, a 2ª lei de Newton nos fornece as equações:

$$m \ddot{y} = m g - T \cos \theta,$$

$$m \ddot{x} = -T \operatorname{sen} \theta.$$

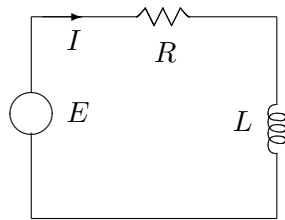
Eliminando-se T e lembrando que $x = \ell \operatorname{sen} \theta$ e $y = \ell \cos \theta$, obtemos a equação do pêndulo

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \operatorname{sen} \theta = 0.$$

Note que é uma equação diferencial de 2ª ordem.

3. Circuitos elétricos simples

(i) Considere o circuito da figura abaixo em que



R = resistência

I = corrente

L = indutância

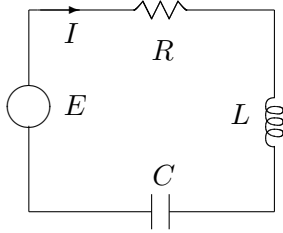
E = força eletromotriz

Sabe-se que a queda de potencial através da resistência R é RI e através da indutância L é $L \frac{dI}{dt}$. Segundo a lei de Kirchhoff, a queda total de potencial no circuito deve ser contrabalanceada pela força eletromotriz aplicada. Com isso, a corrente num instante t qualquer é dada pela equação diferencial:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E,$$

que é uma equação diferencial de 1ª ordem.

(ii) Dado o circuito



em que R , I , L e E são como em (i) e $C =$ capacitância. Sabe-se que a queda de potencial através da capacitância C é $\frac{1}{C} Q$, em que Q é a carga no capacitor. Pela lei de Kirchhoff temos:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} Q = E.$$

Como $I = \frac{dQ}{dt}$, segue-se que

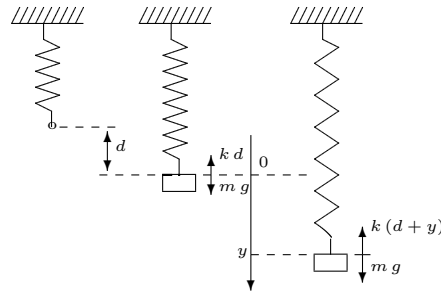
$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E,$$

que é uma equação diferencial de 2ª ordem.

4. Sistema massa-mola

Consideremos uma mola (que supomos sem massa) suspensa verticalmente tendo sua extremidade superior presa num suporte rígido. Quando fixamos um corpo de massa m na outra extremidade da mola, ela se distende de uma quantidade d e, pela lei de Hooke, passa a exercer sobre o corpo uma força de intensidade kd (em que k é a constante

de restauração da mola) e sentido oposto ao deslocamento. Sobre este corpo atuam duas forças: o peso $m g$ e a força restauradora da mola $k d$.



Como o corpo está em equilíbrio, temos

$$m g = k d. \quad (1.1)$$

Imaginemos agora que este corpo seja deslocado verticalmente a partir desta posição de equilíbrio e, em seguida, liberado. Queremos estudar o seu movimento. Fixemos um eixo de coordenadas Oy cuja origem coincide com o ponto de equilíbrio do corpo e sentido para baixo. As forças que atuam sobre o corpo são: o peso $m g$ (mesmo sentido de Oy) e a força restauradora da mola de sentido oposto ao do deslocamento e intensidade $k(y + d)$. Pela 2ª lei de Newton, temos:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = m g - k(y + d).$$

Usando (1.1), obtemos

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + k y = 0,$$

que é uma equação diferencial linear de 2ª ordem.

1.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. O Teorema Fundamental do Cálculo implica que a função

$$F(t) = \int_a^t f(s) ds, \text{ com } a \leq t \leq b,$$

é diferenciável em (a, b) e $F'(t) = f(t)$ para todo $t \in (a, b)$. Logo, $F(t)$ é uma solução da equação diferencial ordinária de 1^a ordem

$$\dot{y}(t) = f(t) \text{ com } a \leq t \leq b,$$

e ainda $F(a) = 0$. Neste caso dizemos que $F(t)$ é uma solução do **problema de valor inicial** (P.V.I.)

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t) \\ y(a) = 0. \end{cases}$$

Este P.V.I. possui uma solução, mas surge a pergunta:

Será que $F(t)$ é a única solução deste P.V.I.? Neste caso a resposta é positiva, pois, se $G(t)$ for uma outra solução, temos que

$$G'(t) = f(t) = F'(t)$$

e isso implica que $(F - G)'(t) = 0$. Ou seja, $(F - G)(t) = \text{constante}$. Mas, $(F - G)(a) = F(a) - G(a) = 0 - 0 = 0$. Portanto, $G(t) = F(t)$ para todo $t \in (a, b)$.

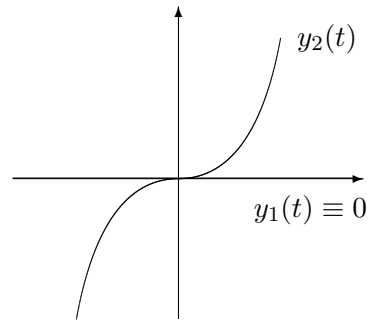
No entanto, há problemas do valor inicial que possuem mais de uma solução. O problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = |y|^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

não tem unicidade de solução, pois $y_1(t) \equiv 0$ é uma solução e

$$y_2(t) = \begin{cases} t^2/4, & t \geq 0, \\ -t^2/4, & t < 0 \end{cases}$$

também é solução (verifique).
Portanto, temos duas soluções para o problema (1.2).

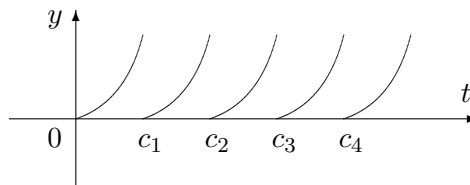


Como um outro exemplo, vemos que o P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{y} = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

também não tem unicidade de solução, pois $y(t) \equiv 0$ é uma solução e observamos que para qualquer $c \in \mathbb{R}_+$, a função $y_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$y_c(t) = \begin{cases} (t - c)^3, & t \geq c, \\ 0, & t \leq c \end{cases}$$



também é solução. Logo, o P.V.I. (1.3) tem infinitas soluções.

Logo, dado o P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

onde f é uma função definida num aberto A de \mathbb{R}^2 , surgem as seguintes questões:

1. Como sabemos que o P.V.I. (1.4) possui de fato uma solução sem exibi-la explicitamente?
2. Como sabemos que existe somente uma solução de (1.4)? Talvez existam duas ou três ou mesmo infinitas soluções.

3. Qual a utilidade de determinarmos se (1.4) possui uma única solução se não somos capazes de exibi-la?

Para esta última questão, podemos dizer que o fato de sabermos que (1.4) possui uma única solução é muito importante, pois a partir disto poderemos usar técnicas computacionais para obter aproximações da solução $y(t)$.

Para responder a primeira questão usaremos o **método de Picard**. Suponhamos que $f(t, x)$ seja uma função contínua em (t, x) e continuamente derivável em x . Observamos que $y(t)$ é solução de (1.4) se, e somente se,

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

Consideremos, agora, a seqüência $y_n(t)$ dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}y_0(t) &= y_0, \\y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0(s)) ds, \\y_2(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) ds, \\&\vdots \\y_n(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds.\end{aligned}$$

As funções $y_n(t)$ são chamadas **iteradas de Picard**. Pode-se mostrar que $y_n(t) \rightarrow y(t)$, quando $n \rightarrow \infty$, para t num intervalo conveniente. Este processo é conhecido por **método de Picard**.

EXEMPLO 1.1. Encontre uma solução para o P.V.I.

$$\begin{aligned}\dot{y} &= y \\y(0) &= 1\end{aligned}$$

usando o método de Picard.

SOLUÇÃO: Observamos que, neste caso, $f(t, y) = y$, $t_0 = 0$ e $y_0 = 1$. A equação integral equivalente ao P.V.I. dado é:

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(s) ds.$$

Portanto,

$$y_0(t) = 1$$

$$y_1(t) = 1 + \int_0^t 1 ds = 1 + t,$$

$$y_2(t) = 1 + \int_0^t y_1(s) ds = 1 + \int_0^t (1 + s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2!},$$

$$y_3(t) = 1 + \int_0^t y_2(s) ds = 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{s^2}{2!}\right) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!},$$

⋮

$$\begin{aligned} y_n(t) &= 1 + \int_0^t y_{n-1}(s) ds = 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{s^2}{2!} + \cdots + \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\right) ds = \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Como $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots$, vemos que as iteradas de Picard $y_n(t)$ convergem para a solução $y(t) = e^t$ deste P.V.I.. \square

EXERCÍCIOS 1.1. 1) Construa as iteradas de Picard para o P.V.I.

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 2t(y + 1) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

e mostre que $y_n(t)$ converge para a solução $y(t) = e^{t^2} - 1$.

2) Calcule as três primeiras iteradas de Picard para o P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{y} = e^t + y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

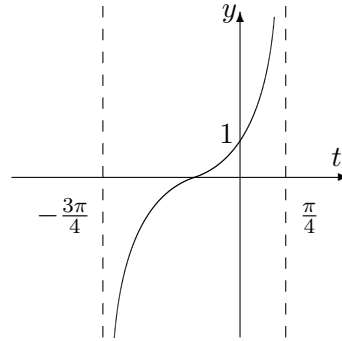
OBSERVAÇÃO 1.1. As soluções de equações diferenciais podem não existir para todo t real; por exemplo, a função $y(t) = \operatorname{tg}(t + \pi/4)$ é solução do P.V.I.:

$$\dot{y}(t) = 1 + y^2(t), \quad y(0) = 1$$

e está definida somente no intervalo $(-3\pi/4, \pi/4)$.

De fato, se $t \in (-3\pi/4, \pi/4)$, então

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \sec^2\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 1 + \operatorname{tg}^2\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 1 + y^2(t) \end{aligned}$$



e $y(0) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. \square

Por este fato, não podemos esperar que as iteradas de Picard converjam para todo t . Para sabermos onde as iteradas de Picard convergem, tentamos encontrar um intervalo no qual todas as $y_n(t)$ são uniformemente limitadas, isto é, existe uma constante $k > 0$ tal que $|y_n(t)| \leq k$ para todo $t \in (a, b)$. Ou seja, procuramos um retângulo que contenha os gráficos de todas as iteradas de Picard.

O lema abaixo cuja demonstração pode ser encontrada em [4] (cf. Lema I.1), nos mostra como encontrar tal retângulo.

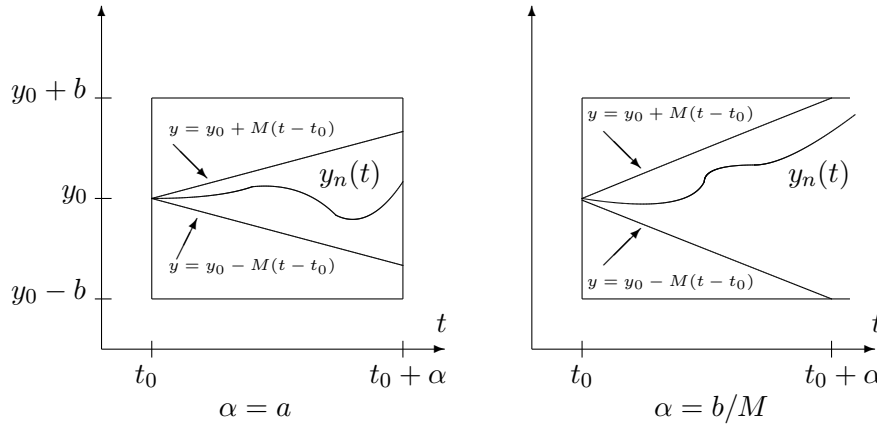
LEMA 1.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e consideremos o retângulo*

$$\mathcal{R} = \{ (t, y) \mid t_0 \leq t \leq t_0 + a \text{ e } |y - y_0| \leq b \}.$$

Defina $M = \max_{(t,y) \in \mathcal{R}} |f(t, y)|$ e $\alpha = \min\left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$. Então

$$|y_n(t) - y_0| \leq M|t - t_0| \quad \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha.$$

Observamos que o Lema 1.1 afirma que o gráfico de $y_n(t)$ permanece entre as retas $y = y_0 + M(t - t_0)$ e $y = y_0 - M(t - t_0)$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$. Estas retas limitam o retângulo \mathcal{R} em $t = t_0 + a$ se $a \leq \frac{b}{M}$ e em $t = t_0 + \frac{b}{M}$ se $\frac{b}{M} < a$. Em ambos os casos, o gráfico de $y_n(t)$ está contido em \mathcal{R} para $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$.



O próximo teorema nos apresenta as condições para a existência e unicidade de soluções para o P.V.I. (1.4).

TEOREMA 1.1 (Existência e Unicidade Local). *Suponha f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sejam funções contínuas no retângulo*

$$\mathcal{R} = \{ (t, y) \mid t_0 \leq t \leq t_0 + a \text{ e } |y - y_0| \leq b \}.$$

Sejam $M = \max_{(t,y) \in \mathcal{R}} |f(t, y)|$ e $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. Então o P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

possui uma e somente uma solução $y(t)$ no intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [4] (cf. Teorema I.2’).

EXEMPLO 1.2. 1) Mostre que a solução $y(t)$ do P.V.I. $\dot{y} = y^2 + \cos t^2$ com $y(0) = 0$ existe no intervalo $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO: Usaremos o Teorema 1.1. Neste caso $f(t, y) = y^2 + \cos t^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = 2y$, são contínuas em qualquer retângulo $\mathcal{R} = \{(t, y) \mid 0 \leq t \leq a, |y| \leq b\}$, em que $a, b \in \mathbb{R}$. Calculando

$$M = \max_{(t,y) \in \mathcal{R}} |f(t, y)| = \max_{|y| \leq b \text{ e } 0 \leq t \leq a} |y^2 + \cos t^2| = b^2 + 1,$$

vemos que $y(t)$ existe para $0 \leq t \leq \alpha$, em que $\alpha = \min\{a, \frac{b}{b^2 + 1}\}$. Como *a priori* podemos tomar qualquer valor de a , temos que o valor máximo de α será quando $\frac{b}{b^2 + 1}$ for máximo. Este máximo é $1/2$. Portanto o Teorema 1.1 garante que a solução $y(t)$ existe e é única para $0 \leq t \leq 1/2$. \square

2) Mostre que $y(t) = -1$ é a única solução do P.V.I. $\dot{y} = t(1 + y)$ com $y(0) = -1$.

SOLUÇÃO: Observamos que $y(t) = -1$ é solução do P.V.I.. Como $f(t, y) = t(1 + y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = t$ são contínuas em qualquer retângulo, temos que o P.V.I. dado possui uma única solução e, portanto, será $y(t) = -1$. \square

OBSERVAÇÃO 1.2. Suponha que $\dot{y} = f(t, y)$ seja uma equação diferencial vetorial, isto é, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $f: A \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. O Teorema 1.1 continua sendo válido se entendermos $\frac{\partial f}{\partial y}$ como sendo a matriz jacobiana de f , isto é, $Jf = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}$. Usaremos esta formulação no caso das equações de 2^a ordem, das equações de ordem n e de sistemas de equações diferenciais. \square

EXERCÍCIOS 1.2. 1) Determine uma solução do P.V.I. $\dot{y} = t \sqrt{1 - y^2}$

com $y(0) = 1$ diferente de $y(t) = 1$. Isto contradiz o Teorema 1.1? Explique.

2) Mostre que a solução $y(t)$ do P.V.I. dado existe no intervalo especificado:

a) $\dot{y} = t + y^2$, com $y(0) = 0$ para, $0 \leq t \leq 1/2$.

b) $\dot{y} = e^{-t^2} + y^2$, com $y(0) = 0$ para, $0 \leq t \leq 1/2$.

c) $\dot{y} = e^{-t^2} + y^2$, com $y(1) = 0$ para, $1 \leq t \leq 1 + \sqrt{e/2}$.

d) $\dot{y} = 1 + y + y^2 \cos t$, com $y(0) = 0$ para, $0 \leq t \leq 1/3$.

Capítulo 2

Equação Diferencial Linear de Primeira Ordem

Uma equação diferencial de primeira ordem pode ser colocada na forma:

$$\dot{y} = f(t, y), \quad (2.1)$$

onde f é uma função real definida em um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$.

Se a função f depender apenas de t , então a equação fica:

$$\dot{y} = f(t). \quad (2.2)$$

Se f for integrável, então para resolver (2.2) integramos ambos os membros em relação a t , o que nos fornece:

$$y(t) = \int f(t) dt + c,$$

em que c é uma constante arbitrária e $\int f(t) dt$ é qualquer primitiva de f .

Este procedimento é impossível na maioria dos casos e, portanto, não conseguiremos resolver, sem o auxílio de computadores, a maioria das equações diferenciais. Partiremos, então, de equações mais simples, as quais poderemos resolver, que são as lineares.

DEFINIÇÃO 2.1. *Uma equação diferencial linear de primeira ordem é uma equação da forma:*

$$\dot{y} + a(t)y = b(t), \quad (2.3)$$

em que $a(t)$ e $b(t)$ são funções contínuas num intervalo I .

OBSERVAÇÃO 2.1. A equação (2.3) é chamada linear pois, se a escrevermos na forma (2.1), teremos $f(t, y) = -a(t)y + b(t)$ e a parte que depende de y , isto é, $g(t, y) = -a(t)y$ é linear em y . De fato, $g(t, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = -a(t)[\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2] = -\alpha_1 a(t)y_1 - \alpha_2 a(t)y_2 = \alpha_1 g(t, y_1) + \alpha_2 g(t, y_2)$. \square

OBSERVAÇÃO 2.2. O P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{y} + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

possui solução única. Isto segue do Teorema 1.1, pois as funções $f(t, y) = -a(t)y + b(t)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = -a(t)$ são contínuas em t e em y . \square

EXEMPLO 2.1. 1. $\dot{y} = t^2 y + \sin t$ é uma equação diferencial linear de 1^a ordem, pois neste caso $g(t, y) = t^2 y$ é linear em y .

2. $\dot{y} = t y^2 + \sin t$ não é E.D.O. linear de 1^a ordem, pois $g(t, y) = t y^2$ não é linear em y .

3. $\dot{y} = t \cos y + t$ não é E.D.O. linear de 1^a ordem, pois $g(t, y) = t \cos y$ não é linear em y . \square

2.1 A EQUAÇÃO HOMOGÊNEA

Como uma solução da equação (2.3) não é imediata, vamos simplificá-la ainda mais, colocando $b(t) \equiv 0$. Obtemos

$$\dot{y} + a(t)y = 0 \quad (2.4)$$

que é chamada **equação diferencial linear homogênea** [L.H.] associada a (2.3). A equação (2.3) é chamada **equação diferencial linear não homogênea** [L.N.H.].

A equação (2.4) pode ser resolvida facilmente. Dividindo ambos os membros da equação por y , obtemos:

$$\frac{\dot{y}}{y} = -a(t).$$

Lembrando que $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{d}{dt}(\ln |y(t)|)$ temos que a equação (2.4) pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dt}(\ln |y(t)|) = -a(t).$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$\ln |y(t)| = - \int a(t) dt + c_1,$$

em que c_1 é uma constante de integração. Tomando exponenciais de ambos os membros, encontramos

$$|y(t)| = \exp(- \int a(t) dt + c_1).$$

Logo,

$$y(t) = c \exp(- \int a(t) dt). \quad (2.5)$$

Observamos que $y(t)$, dada por (2.5), é uma solução de (2.4). Podemos dizer mais, qualquer outra solução de (2.4) será desta forma para

algum $c \in \mathbb{R}$. Neste caso dizemos que (2.5) é a **solução geral** da equação diferencial linear homogênea.

EXEMPLO 2.2. Determine a solução geral da equação: $\dot{y} + 2t y = 0$.

SOLUÇÃO: Neste caso $a(t) = 2t$. Logo,

$$y(t) = c e^{-\int a(t) dt} = c e^{-\int 2t dt} = c e^{-t^2}.$$

Portanto,

$$y(t) = c e^{-t^2}$$

é a solução geral. \square

EXEMPLO 2.3. Determine a solução do P.V.I.: $\dot{y} + (\sin t) y = 0$ com $y(0) = 2$.

SOLUÇÃO: Aqui $a(t) = \sin t$. Logo,

$$y(t) = c e^{-\int \sin t dt} = c e^{\cos t}$$

e, portanto, a solução geral é

$$y(t) = c e^{\cos t}.$$

Como $y(0) = 2$, temos

$$2 = y(0) = c e^{\cos 0},$$

o que implica que $c = 2e^{-1}$. Logo, a solução do P.V.I. será

$$y(t) = 2 e^{\cos t - 1}. \square$$

EXERCÍCIOS 2.1. (1) Determine a solução do P.V.I. $\dot{y} + e^t y = 0$ com $y(0) = 3/2$.

(2) Determine o comportamento, quando $t \rightarrow \infty$, de todas as soluções da equação $\dot{y} + a y = 0$, em que a é constante.

(3) Mostre que o conjunto das soluções de (2.4) possui as seguintes propriedades:

- i) Se y_1 e y_2 são soluções, então $y_1 + y_2$ também é solução.
- ii) Se y_1 é solução, então $c y_1$ também é solução, para todo $c \in \mathbb{R}$.
- iii) A função $y(t) \equiv 0$ é solução.

OBSERVAÇÃO 2.3. O exercício (3) nos diz que o conjunto das soluções de (2.4) é um **espaço vetorial**. Como toda solução de (2.4) é da forma (2.5), segue-se que este espaço vetorial tem dimensão 1 e que $y_1(t) = e^{-\int a(t) dt}$ é uma base para este espaço. \square

2.2 A EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA

Consideremos agora a equação não homogênea

$$\dot{y} + a(t)y = b(t). \quad (2.6)$$

Se conseguíssemos escrever a equação acima como

$$\frac{d}{dt}(\text{"algo"}) = b(t),$$

o nosso problema estaria resolvido, pois bastaria integrar ambos os membros para encontrar o valor de “algo”. Porém, a expressão $\dot{y} + a(t)y$ não aparece como derivada de alguma expressão simples. Para resolvermos o problema procuraremos uma função $\mu(t)$, contínua e diferenciável tal que multiplicando-se ambos os membros da expressão (2.6) por $\mu(t)$ obteremos a equação equivalente:

$$\mu(t)\dot{y} + \mu(t)a(t)y = \mu(t)b(t) \quad (2.7)$$

(onde, por equação equivalente entendemos que toda solução de (2.7) é uma solução da (2.6) e reciprocamente) de modo que o primeiro membro de (2.7)

$$\mu(t)\dot{y} + \mu(t)a(t)y$$

seja a derivada de alguma expressão simples.

Observamos que

$$\frac{d}{dt} (\mu(t)y) = \mu(t) \dot{y} + \dot{\mu}(t) y.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mu(t) \dot{y} + a(t) \mu(t) y &= \frac{d}{dt} (\mu(t) y) \Leftrightarrow \dot{\mu}(t) = a(t) \mu(t) \\ \Leftrightarrow \dot{\mu}(t) - a(t) \mu(t) &= 0 \Leftrightarrow \mu(t) = e^{\int a(t) dt}. \end{aligned}$$

Logo, para esta $\mu(t)$ a equação (2.6) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} (\mu(t) y) = \mu(t) b(t).$$

Por integração obtemos

$$\mu(t) y = \int \mu(t) b(t) dt + c$$

ou

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int \mu(t) b(t) dt + c \right] = e^{-\int a(t) dt} \left[c + \int e^{\int a(t) dt} b(t) dt \right].$$

Portanto,

$$y(t) = c e^{-\int a(t) dt} + e^{-\int a(t) dt} \int e^{\int a(t) dt} b(t) dt \quad (2.8)$$

é a **solução geral** da equação não homogênea.

OBSERVAÇÃO 2.4. Vemos que a 1ª parcela da fórmula (2.8) é a solução geral da homogênea associada e que

$$y_p(t) = e^{-\int a(t) dt} \int e^{\int a(t) dt} b(t) dt$$

é uma solução particular da equação não homogênea (obtida quando $c = 0$). Logo, a solução geral da [L.N.H.] é a soma da geral da [L.H.] associada com uma particular da [L.N.H.]. \square

OBSERVAÇÃO 2.5. A função $\mu(t) = e^{\int a(t) dt}$ é chamada **fator integrante** para a equação não homogênea. \square

OBSERVAÇÃO 2.6. Um outro método de resolver uma equação [L.N.H.] é o chamado **método da variação das constantes**, que consiste em fazer

$$y = uv$$

que implica

$$\dot{y} = u\dot{v} + \dot{u}v.$$

Logo, a equação [L.N.H.], $\dot{y} + a(t)y = b(t)$, se torna

$$u\dot{v} + v\dot{u} + a(t)uv = b(t),$$

ou seja,

$$u(\dot{v} + a(t)v) + (v\dot{u} - b(t)) = 0.$$

Se cada termo for nulo, então esta equação será satisfeita. Portanto, fazendo

$$\dot{v} + a(t)v = 0 \quad \text{e} \quad v\dot{u} - b(t) = 0$$

e resolvendo a primeira delas, obteremos v em função de t (não se acrescenta constante de integração porque se deseja um simples valor de v). Em seguida, substituindo este valor na segunda equação e integrando, obteremos o valor de u (agora acrescentamos a constante de integração pois desejamos que $y = uv$ seja a solução geral do problema). \square

EXEMPLO 2.4. Determine a solução geral da equação: $\dot{y} + 2ty = t$.

SOLUÇÃO: Aqui $a(t) = 2t$. Logo,

$$\mu(t) = e^{\int a(t) dt} = e^{\int 2t dt} = e^{t^2}.$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação por $\mu(t)$, obtemos a equação equivalente:

$$e^{t^2}(\dot{y} + 2ty) = te^{t^2} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}(ye^{t^2}) = te^{t^2}.$$

Portanto,

$$y e^{t^2} = \int t e^{t^2} dt + c = \frac{1}{2} e^{t^2} + c$$

que implica

$$y(t) = c e^{-t^2} + \frac{1}{2}. \quad \square$$

EXEMPLO 2.5. Determine a solução do P.V.I.: $\dot{y} - 3t^2 y = t^2$, $y(0) = 1$.

SOLUÇÃO: Aqui $a(t) = -3t^2$. Logo

$$\mu(t) = e^{\int a(t) dt} = e^{\int -3t^2 dt} = e^{-t^3}.$$

Multiplicando-se ambos os membros por $\mu(t)$, obtemos:

$$e^{-t^3} (\dot{y} - 3t^2 y) = t^2 e^{-t^3} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt} (e^{-t^3} y) = t^2 e^{-t^3}.$$

Assim,

$$\int_0^t \frac{d}{ds} (e^{-s^3} y(s)) ds = \int_0^t s^2 e^{-s^3} ds.$$

efetuando a integração, obtemos

$$e^{-t^3} y(t) - y(0) = -\frac{1}{3} (e^{-t^3} - 1).$$

Como $y(0) = 1$, temos que

$$y(t) = \frac{4}{3} e^{t^3} - \frac{1}{3}. \quad \square$$

EXERCÍCIOS 2.2. 1) Determine a solução dos P.V.I.'s:

a) $\dot{y} = (\cos t) y$, $y(0) = 1$. b) $\dot{y} + \frac{2}{t} y = t^3$, $y(1) = 2$.

c) $t \dot{y} + y = t$, $y(10) = 20$. d) $\dot{y} + y = \frac{1}{1+t^2}$, $y(1) = 3$.

e) $(1+t^2) \dot{y} + 4ty = t$, $y(1) = \frac{1}{4}$.

2) (EQUAÇÃO DE BERNOULLI) A equação

$$\dot{y} + p(t)y = q(t)y^n,$$

em que $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas em algum intervalo I da reta e $n \in \mathbb{R}$, é conhecida como a **equação de Bernoulli**. Se $n \neq 0$ e $n \neq 1$ a equação não é linear, mas pode ser transformada em uma equação linear fazendo a mudança de variável $z = y^{1-n}$. Demonstre isto, e resolva as equações:

$$\text{a) } \dot{y} + t^2 y = t^2 y^4. \qquad \text{b) } \dot{y} - \frac{3}{t} y = t^4 y^{1/3}.$$

$$\text{c) } \dot{y} + \frac{2}{t} y = -t^9 y^5, \quad y(-1) = 2.$$

3) (EQUAÇÃO DE RICATTI) A equação

$$\dot{y} + p(t)y + q(t)y^2 = f(t), \qquad (R)$$

em que $p(t)$, $q(t)$ e $f(t)$ são funções contínuas em algum intervalo I da reta e $q(t) \neq 0$ em I é conhecida como a **equação de Ricatti**. Se $y_1(t)$ é uma solução particular de (R) , mostre que a mudança de variável $y = y_1 + 1/z$ transforma (R) numa equação **linear** de 1ª ordem em z da forma $\dot{z} = (p(t) + 2q(t)y_1)z + q(t)$. Deduza daí que a solução geral de uma equação de Ricatti pode ser encontrada, desde que se conheça uma solução particular.

4) Use o exercício anterior para determinar a solução geral de cada uma das seguintes equações de Ricatti:

$$\text{a) } \dot{y} - t^3 y + t^2 y^2 = 1, \quad y_1(t) = t.$$

$$\text{b) } \dot{y} - t y^2 + (2t - 1)y = t - 1, \quad y_1(t) = 1.$$

$$\text{c) } \dot{y} + y^2 - (1 + 2e^t)y + e^{2t} = 0, \quad y_1(t) = e^t.$$

$$\text{d) } \dot{y} + t y^2 - 2t^2 y + t^3 = t + 1, \quad y_1(t) = t - 1.$$

2.3 ALGUMAS APLICAÇÕES

2.3.1 DESINTEGRAÇÃO RADIOATIVA

Seja $N(t)$ o número de átomos radioativos em uma amostra num instante t . Define-se a **atividade** de uma amostra radioativa como sendo o número de desintegrações por unidade de tempo. Foi observado desde o início do estudo da radioatividade (1896), que a atividade é proporcional ao número de átomos radioativos presentes, isto é:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

onde λ é chamada **constante de desintegração** ou de **decaimento radioativo**.

Se N_0 é o número de átomos no instante $t = 0$, teremos o seguinte P.V.I.

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad N(0) = N_0$$

que é uma equação diferencial ordinária homogênea de 1^a ordem, cuja solução será:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

OBSERVAÇÃO 2.7. Vale uma equação semelhante para a massa de uma substância radioativa, ou seja:

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda m, \quad m(0) = m_0,$$

onde $m =$ massa. \square

A **meia-vida** de uma substância radioativa é definida como sendo o tempo necessário para a decomposição da metade da substância.

EXEMPLO 2.6. Uma quantidade de substância radioativa possui inicialmente m_0 gramas e decompõe-se a uma razão proporcional à quantidade presente. Se a meia-vida da quantidade inicial é 2.000 anos, encontre a quantidade da substância depois de 3.000 anos.

SOLUÇÃO: Temos que $\frac{dm}{dt} = -\lambda m$, $m(0) = m_0$ e $m(2000) = \frac{m_0}{2}$. Sabemos que a solução geral desta equação é:

$$m(t) = c e^{-\lambda t}.$$

Como $m(0) = m_0$, temos que $c = m_0$. Portanto,

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t}.$$

Mas, $\frac{1}{2} m_0 = m_0 e^{-2000\lambda}$ o que implica que $\lambda = \frac{\ln 2}{2000}$. Logo, $m(t) = m_0 e^{-(\ln 2/2000)t}$ e, portanto,

$$m(3000) = m_0 e^{-(3 \ln 2)/2} = \frac{m_0}{\sqrt{8}}. \quad \square$$

OBSERVAÇÃO 2.8. Pode-se usar a desintegração radioativa para descobrir a falsificação de obras de arte (vide [4], Seção 1.3). \square

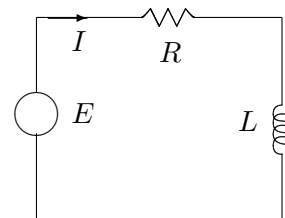
2.3.2 CIRCUITO ELÉTRICO

Consideremos um circuito elétrico simples consistindo de uma indutância L , uma resistência R e uma força eletromotriz $E_0 =$ constante. O circuito é ligado no instante $t = 0$. Deseja-se determinar a corrente $I(t)$. Sabe-se que:

i) a queda de voltagem (ou tensão) através da resistência R é igual a RI ;

ii) a queda de voltagem através de uma indutância L é igual a $L \frac{dI}{dt}$.

Logo, pela lei de Kirchhoff que diz que a soma algébrica das diferenças



de potencial é zero, temos:

$$L \frac{dI}{dt} + RI - E_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dI}{dt} + \frac{RI}{L} = \frac{E_0}{L}$$

que é uma E.D.O. linear não homogênea de 1ª ordem. Como $I(0) = 0$ (pois só temos corrente após ligarmos o circuito), temos que

$$I(t) = \frac{E_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}).$$

2.3.3 RESFRIAMENTO DE UM CORPO

(1) Consideremos um modelo simplificado para o fenômeno de variação de temperatura num corpo por perda ou ganho de calor para o meio ambiente, fazendo as seguintes hipóteses:

- i) A temperatura T é a mesma no corpo todo e depende apenas do tempo.
- ii) A temperatura do meio ambiente, T_a , é constante com o tempo.
- iii) O fluxo de calor através das paredes do corpo, dado por $\dot{T}(t) = \frac{dT}{dt}$ é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente, isto é,

$$\dot{T} = -k(T - T_a)$$

(chamada lei de Newton para resfriamento) em que k é uma constante positiva que depende das propriedades físicas do corpo. Observamos que o sinal $-$ na equação é devido ao fato que o calor flui da fonte quente para a fonte fria, e assim se $T > T_a$ teremos que T decresce e se $T < T_a$, então T cresce. Conhecendo-se a temperatura $T(0) = T_0$, podemos obter a temperatura do corpo em um instante $t \geq 0$ qualquer. Para isto basta resolver a E.D.O. linear não homogênea de 1ª ordem:

$$\dot{T} + kT = kT_a, \quad T(0) = T_0$$

cuja solução será:

$$T(t) = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a.$$

Observamos que:

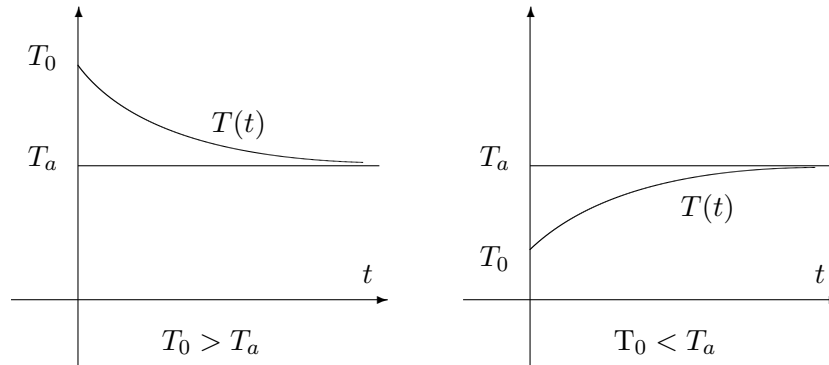
1) $T_0 > T_a \implies T(t)$ decresce quando t aumenta.

2) $T_0 < T_a \implies T(t)$ cresce quando t aumenta.

3) $T_0 = T_a \implies T(t)$ é constante.

4) Em todos os casos $T(t) \rightarrow T_a$ quando $t \rightarrow \infty$, isto é, T_a é chamada de **temperatura de equilíbrio**.

Geometricamente, temos



(2) Suponhamos que a temperatura T_a , do meio ambiente, varia com o tempo ao receber (ou ceder) calor ao corpo. Sejam m e m_a , as massas do corpo e do meio ambiente, respectivamente e c e c_a , os calores específicos do corpo e do meio ambiente respectivamente. Supondo-se que não haja mudanças de estado físico, a lei da conservação da quantidade de calor pode ser expressa como:

$$mc(T_0 - T) = m_a c_a (T_a - T_{a,0}), \quad (2.9)$$

onde $T = T(t)$ e $T_a = T_a(t)$ são as temperaturas do corpo e do meio ambiente num instante t , respectivamente, e $T_0 = T(0)$ e $T_{a,0} = T_a(0)$.

Usando-se na equação

$$\dot{T} = -k(T - T_a)$$

a expressão de T_a dada em (2.9), temos

$$T_a = \frac{m c}{m_a c_a}(T_0 - T) + T_{a,0}.$$

Então obtemos

$$\dot{T} + k\left(1 + \frac{m c}{m_a c_a}\right)T = k\left(T_{a,0} + \frac{m c}{m_a c_a}T_0\right),$$

que é uma E.D.O. linear não homogênea de 1^a ordem. A solução desta E.D.O. que satisfaz à condição inicial $T(0) = T_0$ é

$$T(t) = \frac{T_0 - T_{a,0}}{1 + A}e^{-k(1+A)t} + \frac{T_{a,0} + AT_0}{1 + A},$$

onde $A = \frac{m c}{m_a c_a}$. Logo

1) $T_0 > T_{a,0} \implies T(t)$ decresce com o tempo.

2) $T_0 < T_{a,0} \implies T(t)$ cresce com o tempo.

3) $T_0 = T_{a,0} \implies T(t)$ é constante e igual a $T_{a,0}$.

4) Em qualquer dos casos $T(t) \rightarrow \frac{T_{a,0} + AT_0}{1 + A}$, quando $t \rightarrow \infty$, que será a temperatura de equilíbrio.

EXERCÍCIO: Mostre que $T_a(t) \rightarrow \frac{T_{a,0} + AT_0}{1 + A}$, quando $t \rightarrow \infty$.

2.3.4 DILUIÇÃO DE MISTURAS

Um tanque contém 100 litros de água salgada. É adicionado, neste tanque, água salgada à razão de 5 litros por minuto, com uma concentração de sal de 2 g/ℓ. Ao mesmo tempo, a mistura deixa o tanque

através de um buraco à mesma razão. A mistura do tanque é continuamente agitada, de modo a manter a solução homogênea (isto é, a concentração é a mesma em todo tanque). Se inicialmente a mistura contém uma concentração de 1 g/l, determine a concentração num instante futuro.

SOLUÇÃO: Seja $y(t)$ a quantidade de sal no tanque depois de t minutos do instante inicial $t_0 = 0$. Temos que o sal está sendo adicionado no tanque à razão de $5 \cdot 2$ g/min = 10 g/min e está saindo à razão de $5 \frac{y(t)}{100}$ g/min = $\frac{y(t)}{20}$ g/min. Assim, temos que a variação da quantidade de sal no tanque é dada por:

$$\dot{y} = 10 - \frac{y}{20}$$

que é uma E.D.O. linear não homogênea de 1ª ordem. Como $y(0) = 100$ g temos que a sua solução é

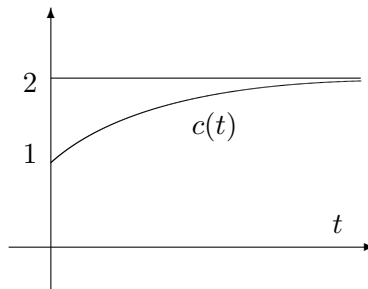
$$y(t) = 200 - 100 e^{-0,05 t}$$

e, portanto, a concentração de sal no tanque no instante t será

$$c(t) = \frac{y(t)}{100} = 2 - e^{-0,05 t}.$$

Note que isso mostra que a concentração de sal no tanque tende a 2 g/l, quando $t \rightarrow \infty$.

Geometricamente, temos



2.3.5 OUTRAS APLICAÇÕES

- a) Formação de um composto químico ([7], página 45).
- b) Dinâmica de crescimento de um tumor ([4], Seção 1.8).
- c) Modelos de população ([4], Seção 1.5).

EXERCÍCIOS 2.3. 1) Um objeto de massa m é solto da posição de repouso em um meio que oferece resistência proporcional à velocidade do objeto. Determinar a velocidade no instante t .

2) Fazer o problema proposto no Exercício 1, supondo que a resistência do meio é proporcional ao quadrado da velocidade.

3) Uma colônia de bactérias cresce a uma razão proporcional ao número de bactérias presente. Se o número duplica a cada 24 horas, quantas horas serão necessárias para que o número de bactérias aumente cem vezes sua quantidade original?

4) Um tanque de 200 litros de capacidade, contém inicialmente 40 litros de água pura. A partir do instante $t = 0$, adiciona-se ao tanque uma solução de salmoura com 250 gramas de sal por litro, à razão de $12 \ell/\text{min}$. A mistura, suposta uniforme, escoar do tanque à razão de $8 \ell/\text{min}$. Determinar

- a) o tempo necessário para que ocorra o transbordamento;
- b) a concentração de sal na mistura presente no tanque no instante do transbordamento.

Capítulo 3

Equações Lineares de Segunda Ordem

As equações diferenciais de 2^a ordem podem, geralmente, ser escritas sob a forma

$$\ddot{y} = f(t, y, \dot{y}), \quad (3.1)$$

em que f é uma função definida em um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^3$.

Dizemos que uma função $y = y(t)$ é uma **solução** de (3.1) no intervalo I se $y(t)$ tiver derivada de 2^a ordem em I e $\ddot{y}(t) = f(t, y(t), \dot{y}(t))$ para todo $t \in I$.

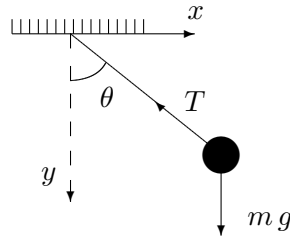
Por exemplo, as funções $y_1(t) = e^{2t}$ e $y_2(t) = e^{-2t}$ são soluções da equação $\ddot{y} = 4y$, pois:

$$\ddot{y}_1(t) = \frac{d^2(e^{2t})}{dt^2} = 4e^{2t} = 4y_1(t) \quad \text{e} \quad \ddot{y}_2(t) = \frac{d^2(e^{-2t})}{dt^2} = 4e^{-2t} = 4y_2(t).$$

Equações diferenciais surgem com frequência em problemas da Física, especialmente em Mecânica, em virtude da 2^a lei de Newton, e em Eletricidade, como aplicação das leis de Kirchhoff. Por exemplo, o movimento de um pêndulo simples sem atrito (como figura abaixo) é

descrito pela equação

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0. \quad (3.2)$$



Se levarmos em conta o atrito (que geralmente é dado por $k\dot{\theta}$), e se o movimento estiver sujeito a uma força externa $F(t)$, a equação do pêndulo fica

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = F(t). \quad (3.3)$$

Consideremos agora a equação: $\ddot{y} = 3$.

Para obtermos a solução dessa equação basta integrarmos duas vezes, ou seja,

$$\dot{y} = \int 3 dt = 3t + c_1 \quad \implies \quad y(t) = \int (3t + c_1) dt = \frac{3}{2} t^2 + c_1 t + c_2.$$

Note que temos o surgimento de duas constantes arbitrárias: c_1 e c_2 (lembramos que para a equação de 1ª ordem somente aparecia uma constante arbitrária). Logo, para termos unicidade de solução, precisamos impor duas condições: uma sobre a função $y(t)$ e outra sobre sua derivada $\dot{y}(t)$ no instante t_0 . Observamos que este fato está em concordância com os problemas de Mecânica pois, para se caracterizar o movimento de um corpo, é preciso que sejam conhecidas sua posição inicial e sua velocidade inicial. Isto sugere que o problema de valor inicial associado à equação (3.1) seja dado por

$$\begin{cases} \ddot{y} = f(t, y, \dot{y}) \\ y(t_0) = y_0 \\ \dot{y}(t_0) = z_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Em geral é muito difícil resolver a equação (3.1). Por esta razão, é usual, nas aplicações, recorrer ao estudo de equações mais simples; as lineares que são modelos aproximados de muitas equações diferenciais não lineares. Por exemplo, a equação (3.2), do pêndulo, não é linear, mas para o estudo de pequenas oscilações, costuma-se usar a aproximação $\sin \theta \cong \theta$ e considerar a equação

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0,$$

que é, claramente, mais simples do que (3.2). Analogamente, no lugar de (3.3) costuma-se estudar a equação

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = F(t).$$

3.1 TEORIA GERAL PARA EQUAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM

A partir de agora, nossa atenção estará voltada para as equações lineares, cuja forma padrão é

$$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = g(t). \quad [\text{L.N.H.}]$$

Esta equação é chamada linear não homogênea. Quando $g(t) \equiv 0$, ela torna-se

$$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = 0. \quad [\text{L.H.}]$$

TEOREMA 3.1 (Existência e unicidade). *Se as funções $a(t)$, $b(t)$ e $g(t)$ forem contínuas num intervalo I , então dados $t_0 \in I$ e $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, o P.V.I.*

$$\begin{cases} \ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ \dot{y}(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

possui uma única solução $y = y(t)$, a qual está definida para todo $t \in I$.

OBSERVAÇÃO 3.1. Pelo Teorema 3.1, a única solução de [L.H.] tal que $y(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0$ é a função $y(t) = 0$. \square

OBSERVAÇÃO 3.2. Este teorema é uma consequência da forma vetorial do Teorema 1.4 (veja Observação 1.2).

De fato: Do Teorema 1.4, temos que se F e $\frac{\partial F}{\partial x}$ são funções contínuas, então o P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

possui uma única solução. Aqui temos a equação $\ddot{y} = g(t) - a(t)\dot{y} - b(t)y$ que pode ser escrita na forma $\dot{x} = F(t, x)$, fazendo

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ \dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2. \end{aligned}$$

Assim, temos que $\ddot{y} = \dot{x}_2 = -a(t)x_2 - b(t)x_1 + g(t)$. Chamando

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ temos } \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a(t)x_2 - b(t)x_1 + g(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t, \mathbf{x}) \\ F_2(t, \mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Aqui, $\frac{\partial F}{\partial x}$ representa a matriz jacobiana de $F(t, x_1, x_2)$ em relação a x_1, x_2 , isto é

$$JF(t, x_1, x_2) = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix}.$$

Logo, se $a(t)$, $b(t)$ e $g(t)$ são funções contínuas em I , então o P.V.I.

$$\begin{cases} \ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ \dot{y}(t_0) = z_0 \end{cases}$$

possui única solução em I . \square

Antes de darmos um método geral que permitirá descrever o conjunto de todas as soluções de [L.H.], vamos analisar a equação

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (3.6)$$

(esta é a equação do pêndulo, em que escrevemos $\omega = \sqrt{g/\ell}$). É fácil verificar que as funções $\varphi_1(t) = \cos \omega t$ e $\varphi_2(t) = \text{sen } \omega t$ são soluções. Observamos que, quaisquer que sejam as constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, a função

$$\varphi(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \text{sen } \omega t \quad (3.7)$$

também é solução de (3.6). De fato, calculando $\dot{\varphi}$ e $\ddot{\varphi}$ temos

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= -\omega c_1 \text{sen } \omega t + \omega c_2 \cos \omega t \\ \ddot{\varphi}(t) &= -\omega^2 c_1 \cos \omega t - \omega^2 c_2 \text{sen } \omega t = -\omega^2 \varphi(t). \end{aligned}$$

Donde,

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega^2 \varphi(t) = 0.$$

Usando a expressão (3.7), podemos resolver qualquer P.V.I. associado à equação (3.6). Por exemplo, se procurarmos a solução de

$$\begin{cases} \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 2 \end{cases}$$

sob a forma $\varphi(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \text{sen } \omega t$, chegaremos a

$$\begin{aligned} 1 &= \varphi(0) = c_1 \\ 2 &= \dot{\varphi}(0) = c_2 \omega. \end{aligned}$$

Portanto, a solução procurada é $\varphi(t) = \cos \omega t + \frac{2}{\omega} \text{sen } \omega t$.

De modo análogo, ao procurarmos a solução do P.V.I.

$$\begin{cases} \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \\ y(0) = y_0 \\ \dot{y}(0) = z_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

sob a forma (3.7), chegamos a

$$\varphi(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{z_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t. \quad (3.9)$$

Agora, dada qualquer solução $y(t)$ de (3.6), chamando $y_0 = y(0)$ e $z_0 = \dot{y}(0)$ vemos que $y(t)$ é solução do P.V.I. (3.8). Como, pelo Teorema 3.1, este problema possui **uma única** solução, segue que $y(t) \equiv \varphi(t)$, isto é, y é dada por (3.9). Logo, toda solução de (3.6) é da forma (3.7), para uma conveniente escolha de c_1 e c_2 . Assim, se denotarmos por S o conjunto de todas as soluções de (3.6), o que acabamos de mostrar é que S coincide com o conjunto de todas as combinações lineares de $\cos \omega t$ e $\operatorname{sen} \omega t$ (o qual é um espaço vetorial de dimensão 2. Por quê?).

Consideremos agora a equação [L.H.] com $a(t)$ e $b(t)$ contínuas no intervalo I . Pelo Teorema 3.1, temos que toda solução $y(t)$ de [L.H.] está definida para todo $t \in I$ (além disso, é claro que $y(t)$ é duas vezes continuamente diferenciável). Vamos repetir o procedimento acima e mostrar que se duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$, forem convenientemente escolhidas, então toda solução $y(t)$ de [L.H.] será dada por

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad (3.10)$$

onde c_1 e c_2 são constantes. Primeiramente, notemos que toda função da forma (3.10) é uma solução de [L.H.], como mostra o próximo teorema, conhecido como PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO:

TEOREMA 3.2. *Se $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ são soluções de [L.H.] e se c_1, c_2 são constantes reais, então a função $\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)$ também é solução de [L.H.].*

DEMONSTRAÇÃO. Note que

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(t) + a(t) \dot{\varphi}(t) + b(t) \varphi(t) &= c_1 [\ddot{\varphi}_1(t) + a(t) \dot{\varphi}_1(t) + b(t) \varphi_1(t)] \\ &\quad + c_2 [\ddot{\varphi}_2(t) + a(t) \dot{\varphi}_2(t) + b(t) \varphi_2(t)] = 0, \end{aligned}$$

pois, φ_1 e φ_2 são soluções de [L.H.]. Logo, φ também é solução de [L.H.]. ■

Seja $y(t)$ uma solução de [L.H.] e sejam $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = \dot{y}(t_0)$ e $t_0 \in I$ fixados. Para que $y(t)$ seja dada por (3.10) devemos ter

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0 \\ c_1 \dot{y}_1(t_0) + c_2 \dot{y}_2(t_0) = z_0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Podemos considerar (3.11) como um sistema de duas equações nas incógnitas c_1 e c_2 . Para que este sistema tenha solução quaisquer que sejam y_0 e z_0 é necessário e suficiente que

$$D = \det \begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ \dot{y}_1(t_0) & \dot{y}_2(t_0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Neste caso, a solução do sistema (3.11) é $c_1 = \frac{y_0 \dot{y}_2(t_0) - z_0 y_2(t_0)}{D}$ e $c_2 = \frac{z_0 y_1(t_0) - y_0 \dot{y}_1(t_0)}{D}$. Assim, provamos o seguinte

TEOREMA 3.3. *Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções de [L.H.] tais que*

$$\det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} \neq 0 \quad (3.12)$$

para todo $t \in I$. Então toda solução de [L.H.] é dada por (3.10).

OBSERVAÇÃO 3.3. Em vista do Teorema 3.3, costuma-se dizer que (3.10) é a **solução geral** de [L.H.], ou que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ constituem um **conjunto fundamental de soluções**, ou que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções **linearmente independentes** de [L.H.]. □

OBSERVAÇÃO 3.4. O determinante (3.12) desempenha um papel importante no estudo da equação [L.H.]. Ele é chamado **Wronskiano** de $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e denotado por $W[y_1, y_2](t)$, ou simplesmente $W(t)$. □

OBSERVAÇÃO 3.5. O Teorema 3.3 reduz o problema de obter a solução geral de [L.H.] ao problema de encontrar duas soluções *convenientes* y_1 e y_2 (isto é, tais que $W[y_1, y_2](t) \neq 0$). □

OBSERVAÇÃO 3.6. Se $W[y_1, y_2](t) \equiv 0$ podem existir soluções de [L.H.] que não sejam dadas por (3.10). Por exemplo, tomando como soluções da equação (3.6) $y_1(t) = \cos \omega t$ e $y_2(t) = 5 \cos \omega t$, temos $W[y_1, y_2](t) \equiv 0$. Notemos que a solução $y(t) = \sin \omega t$ não pode ser escrita como $c_1 \cos \omega t + 5c_2 \cos \omega t$. \square

OBSERVAÇÃO 3.7. Dadas duas **funções** quaisquer φ_1 e φ_2 (que não sejam **soluções** de [L.H.]), podem existir valores de t para os quais o wronskiano de φ_1 e φ_2 seja nulo e outros valores de t para os quais o wronskiano não se anule. Por exemplo, se $\varphi_1(t) = t$ e $\varphi_2(t) = t^2$, temos

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{pmatrix} = t^2.$$

Portanto, $W(0) = 0$ e $W(1) = 1$. \square

O próximo teorema mostra que a situação descrita na Observação 3.7 não ocorre se φ_1 e φ_2 forem **soluções** de [L.H.].

TEOREMA 3.4. *Sejam $y_1(t)$, $y_2(t)$, $t \in I$, soluções de [L.H.] e $t_0 \in I$ fixado. Seja $W(t)$ o wronskiano de y_1 e y_2 . Então*

$$W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}, \text{ para todo } t \in I. \quad (3.13)$$

Em particular, como a função exponencial nunca se anula, segue-se que se $W(t_0) \neq 0$, então $W(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

DEMONSTRAÇÃO. Temos que

$$W(t) = y_1(t) \dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t) y_2(t).$$

Derivando, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= y_1(t) [-a(t) \dot{y}_2(t) - b(t) y_2(t)] - y_2(t) [-a(t) \dot{y}_1(t) - b(t) y_1(t)] \\ &= -a(t) [y_1(t) \dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t) y_2(t)] = -a(t) W(t). \end{aligned}$$

Portanto, $\dot{W}(t) + a(t)W(t) = 0$. Resolvendo esta equação linear de 1ª ordem em W , obtemos (3.13). ■

Observe que as conclusões de Teorema 3.4 referem-se apenas ao intervalo I no qual as funções $a(t)$ e $b(t)$ são contínuas. Para pontos fora deste intervalo as conclusões podem falhar. Veja o exemplo a seguir:

EXEMPLO 3.1. As funções $y_1(t) = 1$ e $y_2(t) = t^2$ são soluções da equação $\ddot{y} - \frac{1}{t}\dot{y} = 0$, para $t > 0$. Temos

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} = 2t.$$

Portanto, $W(0) = 0$ e $W(t) \neq 0$ para todo $t > 0$. Isto não contradiz o Teorema 3.4, uma vez que o coeficiente $-1/t$ não é definido para $t = 0$. Notemos ainda que a solução geral desta equação é $c_1 + c_2 t^2$, visto que $W(1) = 2 \neq 0$. □

Finalmente, observamos que é sempre possível obter duas soluções y_1 e y_2 de [L.H.] tais que $W[y_1, y_2](t) \neq 0$ para todo $t \in I$. De fato, fixado $t_0 \in I$, basta definir $y_1(t)$ como sendo a única solução de [L.H.] tal que $y(t_0) = 1$ e $\dot{y}(t_0) = 0$ e, $y_2(t)$ como sendo a única solução de [L.H.] tal que $y(t_0) = 0$ e $\dot{y}(t_0) = 1$. Assim $W(t_0) = 1$ e segue do Teorema 3.4 que $W(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Resumimos estes fatos no seguinte

TEOREMA 3.5. *Suponhamos que $a(t)$ e $b(t)$ sejam funções contínuas no intervalo I . Então existem duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ da equação*

$$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = 0$$

tais que $W[y_1, y_2](t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Além disso, a solução geral desta equação é dada por $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$, em que c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

OBSERVAÇÃO 3.8. O Teorema 3.5 garante que o espaço das soluções da equação [L.H.] é um espaço vetorial de dimensão 2. \square

EXERCÍCIOS 3.1. 1) a) Mostre que $y_1 = \sqrt{t}$ e $y_2 = 1/t$ são soluções da equação diferencial $2t^2 \ddot{y} + 3t \dot{y} - y = 0$, no intervalo $0 < t < \infty$.

b) Calcule $W[y_1, y_2](t)$. Que acontece quando t tende a zero?

c) Mostre que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação dada, no intervalo $0 < t < \infty$.

d) Resolva o P.V.I. $2t^2 \ddot{y} + 3t \dot{y} - y = 0$, $y(1) = 2$, $\dot{y}(1) = 1$.

2) Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções de $\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = 0$ no intervalo $-\infty < t < \infty$ com $y_1(0) = 3$, $\dot{y}_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$ e $\dot{y}_2(0) = 1/3$. Mostre que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são linearmente independentes no intervalo $-\infty < t < \infty$.

3) Sejam $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t|t|$.

a) Mostre que y_1 e y_2 são linearmente dependentes no intervalo $[0, 1]$.

b) Mostre que y_1 e y_2 são linearmente independentes em $[-1, 1]$.

c) Mostre que $W[y_1, y_2]$ é identicamente nulo.

d) Mostre que y_1 e y_2 não podem nunca ser solução de $\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = 0$ no intervalo $-1 \leq t \leq 1$ se ambas as funções $a(t)$ e $b(t)$ forem contínuas neste intervalo.

4) Considere a equação $\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = 0$, com $a(t)$ e $b(t)$ contínuas num intervalo I . Mostre que:

a) Se y_1 e y_2 se anulam no mesmo ponto do intervalo I , então elas não podem formar um conjunto fundamental de soluções em I .

b) Se y_1 e y_2 assumem um máximo ou um mínimo no mesmo ponto do intervalo I , então elas não podem formar um conjunto fundamental de soluções em I .

c) Se y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções, então elas não podem ter um ponto de inflexão comum em I , a menos que $a(t)$ e $b(t)$ se anulem simultaneamente aí.

3.2 REDUÇÃO DE ORDEM

Suponhamos conhecida uma solução $y_1(t)$ de [L.H.]. Já vimos que para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $c y_1(t)$ também é solução de [L.H.]. Este fato sugere que tentemos encontrar uma outra solução de [L.H.] da forma

$$y_2(t) = v(t) y_1(t),$$

em que $v(t)$ é uma função **não constante**. Este procedimento, devido a **D'Alembert (1717-1783)**, é usualmente chamado **método da redução de ordem**. Note que $y_2 = v y_1$ implica que

$$\dot{y}_2 = \dot{v} y_1 + v \dot{y}_1 \quad \text{e} \quad \ddot{y}_2 = \ddot{v} y_1 + 2 \dot{v} \dot{y}_1 + v \ddot{y}_1.$$

Substituindo em [L.H.], obtemos

$$v [\ddot{y}_1 + a \dot{y}_1 + b y_1] + \dot{v} [2 \dot{y}_1 + a y_1] + \ddot{v} y_1 = 0.$$

Como $\ddot{y}_1 + a \dot{y}_1 + b y_1 = 0$ (pois y_1 é solução de [L.H.]), temos que v é solução de:

$$\ddot{v} + \left(a + \frac{2\dot{y}_1}{y_1}\right) \dot{v} = 0.$$

Fazendo $z = \dot{v}$, temos a equação de 1ª ordem em z

$$\dot{z} + \left(a + \frac{2\dot{y}_1}{y_1}\right) z = 0$$

cuja solução é dada por $z(t) = c e^{-\int (a(t) + 2[\dot{y}(t)/y(t)]) dt} = c u(t)$, em que c é constante. Logo,

$$v(t) = \int z(t) dt = c \int u(t) dt$$

e então

$$y_2(t) = v(t) y_1(t) = c y_1(t) \int u(t) dt.$$

Portanto, as duas soluções de [L.H.] são $y_1(t)$ e $y_2(t) = y_1(t) \int u(t) dt$.

EXEMPLO 3.2. Determine a 2ª solução da equação

$$t^2 \ddot{y} + 2t \dot{y} - 2y = 0$$

sabendo-se que $y_1(t) = t$.

SOLUÇÃO: Vamos procurar $y_2(t) = v(t) y_1(t) = t v(t)$. Assim,

$$\dot{y}_2 = v + t \dot{v} \quad \text{e} \quad \ddot{y}_2 = t \ddot{v} + 2 \dot{v}.$$

Substituindo na equação, obtemos

$$t^2 (t \ddot{v} + 2 \dot{v}) + 2t (v + t \dot{v}) - 2tv = 0$$

que implica

$$t^3 \ddot{v} + 4t^2 \dot{v} = 0.$$

Fazendo $z = \dot{v}$, temos

$$t^3 \dot{z} + 4t^2 z = 0$$

que é uma E.D.O. linear de 1ª ordem em z . Escrevendo

$$\dot{z} + \frac{4}{t} z = 0$$

temos que $\mu(t) = e^{\int (4/t) dt} = t^4$. Portanto,

$$\frac{d}{dt}(t^4 z) = 0.$$

Logo, $t^4 z = c$. Equivalentemente, $z = c t^{-4}$. Logo,

$$v(t) = \int z(t) dt = \int t^{-4} dt = -\frac{1}{3} t^{-3}.$$

Portanto,

$$y_2(t) = -\frac{1}{3} t^{-3} y_1(t) = -\frac{1}{3} t^{-2}. \quad \square$$

EXERCÍCIOS 3.2. Determine, por redução de ordem, a 2ª solução das equações abaixo:

1) $\ddot{y} - 4\dot{y} - 12y = 0, y_1(t) = e^{6t}.$

2) $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0, y_1(t) = e^t.$

3) $t^2\ddot{y} + 2t\dot{y} = 0, y_1(t) = 1.$

4) $2t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} - y = 0, y_1(t) = \sqrt{t}.$

3.3 EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos a equação

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0, \quad (3.14)$$

em que a, b e c são constantes reais com $a \neq 0$.

EXEMPLO 3.3. 1) Movimento de um pêndulo simples $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$.

2) Sistema massa mola: $\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0$, em que o termo $b\dot{y}$ é devido à resistência do meio. \square

De acordo com o Teorema 3.5, basta encontrar duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ linearmente independentes (isto é, $W[y_1, y_2](t) \neq 0$) de (3.14) e todas as demais serão combinações destas.

Observemos que se $y = \varphi(t)$ é uma solução de (3.14) então a soma dos termos $a\ddot{\varphi}(t)$, $b\dot{\varphi}(t)$ e $c\varphi(t)$ deve ser igual a zero para todo t . Para que isto ocorra as três funções $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ e $\ddot{\varphi}(t)$ devem ser do “mesmo tipo”. Por exemplo a função $y(t) = t^4$ nunca poderá ser

solução de (3.14) pois os termos $12at^2$, $4bt^3$ e ct^4 são polinômios de graus diferentes e, por isso sua soma não se cancela. Por outro lado, a função $y(t) = e^{\lambda t}$, em que λ é constante, tem a propriedade de que tanto $\dot{y}(t)$ como $\ddot{y}(t)$ são múltiplos de $y(t)$. Isto sugere que tentemos $y(t) = e^{\lambda t}$ como solução de (3.14). Substituindo $y(t) = e^{\lambda t}$ em (3.14) obtemos

$$a(e^{\lambda t})'' + b(e^{\lambda t})' + ce^{\lambda t} = 0 \implies e^{\lambda t}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

o que implica que

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \quad (3.15)$$

Portanto, $y(t) = e^{\lambda t}$ é uma solução de (3.14) se, e somente, se λ é raiz de (3.15). A equação (3.15) é chamada **Equação Característica** de (3.14). As raízes de (3.15) são

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Vamos analisar as três possibilidades para o discriminante $b^2 - 4ac$:

i) $b^2 - 4ac > 0$: **Raízes reais distintas**

Neste caso $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ são soluções de (3.14) e seu wronskiano

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, as soluções são linearmente independentes e, portanto, formam uma base do espaço das soluções. Ou seja, qualquer solução de (3.14) é da forma

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

ii) $b^2 - 4ac = 0$: **Raízes reais iguais**

Neste caso $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}$ e com isto temos uma solução $y_1 = e^{(-b/2a)t}$. Vamos encontrar a outra solução de (3.14) (não múltipla de

y_1) usando redução de ordem, isto é, procurando $v(t)$ não constante tal que $y_2(t) = v(t) e^{-(b/2a)t}$ seja solução de (3.14). Substituindo em (3.14), obtemos

$$e^{-(b/2a)t} \left[a \ddot{v} + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \right) v \right] = 0.$$

Como $e^{-(b/2a)t} \neq 0$ para todo t e $b^2 - 4ac = 0$, temos

$$\ddot{v} = 0 \implies v(t) = \alpha t + \beta, \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Podemos tomar $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, pois queremos encontrar **uma solução**. Logo, $v(t) = t$. Portanto, a outra solução de (3.14) é

$$y_2(t) = t e^{-(b/2a)t}.$$

EXEMPLO 3.4. Resolva o P.V.I.

$$\begin{cases} \ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = 0 \\ y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2. \end{cases}$$

SOLUÇÃO: $y = e^{\lambda t} \implies \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Portanto, a solução geral é

$$y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-3t}.$$

Como $y(0) = 1$, temos $c_1 = 1$. Além disso, $\dot{y}(t) = (c_2 - 3 - 3c_2 t) e^{-3t}$ e $\dot{y}(0) = 2$. Logo, $c_2 = 5$. Portanto, a solução do P.V.I. é

$$y(t) = e^{-3t} + 5t e^{-3t}. \quad \square$$

iii) $b^2 - 4ac < 0$: **Raízes Complexas**

Logo,

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Gostaríamos de dizer que $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ são soluções de (3.14). Entretanto surgem dois problemas:

a) definir $e^{\lambda t}$ para λ complexo,

b) mesmo que consigamos definir $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ como soluções (que certamente terão valores complexos) de (3.14) queremos obter soluções **reais**.

Começemos resolvendo o segundo problema, pois caso contrário não teria sentido resolver o primeiro.

DEFINIÇÃO 3.1. Se $F(t) = u(t) + i v(t)$, definimos $\dot{F}(t) = \dot{u}(t) + i \dot{v}(t)$.

OBSERVAÇÃO 3.9. Esta definição faz sentido, pois podemos identificar $F(t) = u(t) + i v(t)$ com $f(t) = (u(t), v(t))$. Logo, $f(t)$ é uma parametrização de uma curva plana cujo vetor velocidade é $(\dot{u}(t), \dot{v}(t))$. Fica então natural a definição acima. \square

PROPOSIÇÃO 3.1. Se $y(t) = u(t) + i v(t)$ é uma solução a valores complexos de (3.14), então $u(t)$ e $v(t)$ são soluções reais de (3.14).

DEMONSTRAÇÃO. Note que

$$a \ddot{y}(t) + b \dot{y}(t) + c y(t) = 0$$

ou seja,

$$[a \ddot{u}(t) + b \dot{u}(t) + c u(t)] + i [a \ddot{v}(t) + b \dot{v}(t) + c v(t)] = 0.$$

Para que um número complexo seja zero é necessário que sua parte real e sua parte imaginária sejam zero. Logo,

$$a \ddot{u}(t) + b \dot{u}(t) + c u(t) = 0 \text{ e } a \ddot{v}(t) + b \dot{v}(t) + c v(t) = 0.$$

Isto é u e v são soluções (3.14). \blacksquare

E com isto resolvemos o segundo problema. Passemos agora ao primeiro, isto é, vamos definir $e^{\lambda t}$ para λ complexo. É natural pedir

que esta função satisfaça $e^{a+b} = e^a e^b$. Logo, se $\lambda = \alpha + i\beta$, devemos ter

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t}.$$

Portanto, basta apenas definirmos $e^{i\beta t}$.

Sabemos que, para todo x real, vale

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

A equação acima tem sentido, formalmente, mesmo para x complexo. Isto sugere que coloquemos

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots = \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right), \end{aligned}$$

Como $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$ e $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$ é razoável definir

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Portanto,

$$e^{\lambda t} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t).$$

EXERCÍCIO: Mostre que $\frac{de^{\lambda t}}{dt} = \lambda e^{\lambda t}$ para λ complexo.

Agora é fácil verificar que

$$y(t) = e^{\lambda t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t), \quad \text{com } \alpha = \frac{-b}{2a} \text{ e } \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

é uma solução a valores complexos de (3.14), se $b^2 - 4ac < 0$. Logo, pela Proposição 3.1, temos que

$$y_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$$

são duas soluções reais de (3.14).

EXERCÍCIO: Mostre que $W[y_1, y_2](t) = \beta e^{2\alpha t}$.

Pelo exercício acima, temos que $y_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$ e $y_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$ formam uma base do espaço solução e, conseqüentemente, a solução geral de (3.14) para $b^2 - 4ac < 0$ é

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t).$$

OBSERVAÇÃO 3.10. Pode-se pensar que $e^{\lambda_2 t}$, em que $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ dará origem a outras duas soluções. Todavia, isto não ocorre, pois

$$e^{\lambda_2 t} = e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t} [\cos(-\beta t) + i \sin(-\beta t)] = e^{\alpha t} [\cos \beta t - i \sin \beta t].$$

Portanto,

$$\tilde{y}_1(t) = \Re[e^{\lambda_2 t}] = e^{\alpha t} \cos \beta t = y_1(t)$$

e

$$\tilde{y}_2(t) = \Im[e^{\lambda_2 t}] = -e^{\alpha t} \sin \beta t = -y_2(t). \quad \square$$

EXEMPLO 3.5. Determine a solução real do P.V.I.

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 0 \\ y(0) = 1, \dot{y}(0) = 3. \end{cases}$$

SOLUÇÃO: A equação característica $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ possui raízes complexas $\lambda_1 = -1 + 2i$ e $\lambda_2 = -1 - 2i$. Portanto,

$$e^{\lambda_1 t} = e^{(-1+2i)t} = e^{-t} \cos 2t + i e^{-t} \sin 2t$$

é uma solução com valores complexos de $\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 0$. Logo, pela Proposição 3.1, temos que

$$y_1(t) = \Re(e^{\lambda_1 t}) = e^{-t} \cos 2t \quad \text{e} \quad y_2(t) = \Im(e^{\lambda_1 t}) = e^{-t} \sin 2t$$

são soluções reais da equação. Mais ainda, elas formam uma base para o espaço solução. Portanto, a solução geral é

$$y(t) = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t),$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais. Como $y(0) = 1$, temos $c_1 = 1$. Logo, $y(t) = e^{-t} (\cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t)$. Isso implica que $\dot{y}(t) = -e^{-t} (\cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t) + e^{-t} (-2 \operatorname{sen} 2t + 2c_2 \cos 2t)$. Portanto, $\dot{y}(0) = 3$ implica que $c_2 = 2$. Logo, a solução do P.V.I. é

$$y(t) = e^{-t} (\cos 2t + 2 \operatorname{sen} 2t). \quad \square$$

EXEMPLO 3.6. (Vibrações livres não amortecidas) Consideremos o sistema massa-mola enunciado no Capítulo 1, Subseção 1.1.3, cuja equação é

$$m \ddot{y} + k y = 0$$

ou

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

em que $\omega = \sqrt{k/m}$ (lembremos que $k > 0$ e $m > 0$).

A equação característica $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ possui raízes complexas $\lambda_1 = i\omega$ e $\lambda_2 = -i\omega$. Logo, $\varphi(t) = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t$ é uma solução com valores complexos que dá origem às seguintes soluções reais linearmente independentes

$$y_1(t) = \cos \omega t \quad \text{e} \quad y_2(t) = \operatorname{sen} \omega t.$$

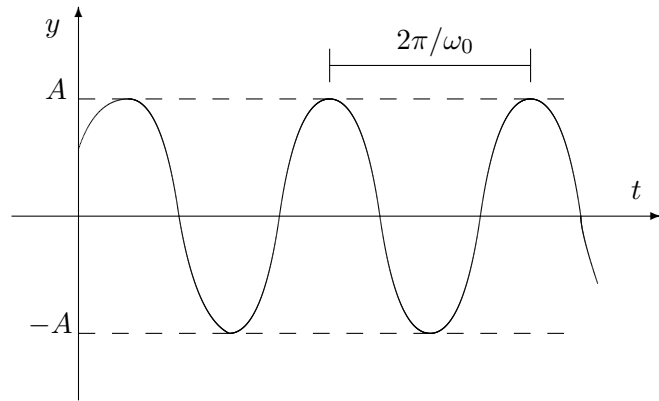
Portanto, a solução geral é dada por

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t. \quad \square$$

OBSERVAÇÃO 3.11. Para esboçar o gráfico de $y(t)$, vamos reescrevê-la de modo mais apropriado: denotando $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e $\alpha = \operatorname{arctg}(c_2/c_1)$, podemos escrever

$$y(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t = A \cos(\omega_0 t - \alpha),$$

Logo, temos que $y(t)$ está sempre entre $-A$ e $+A$ e, portanto, o movimento é periódico de período $2\pi/\omega_0$, amplitude A , frequência ω_0 e ângulo de fase α . O gráfico de $y(t)$ é mostrado na figura abaixo.



Este movimento também é chamado de **movimento harmônico simples**. □

EXEMPLO 3.7. (Vibrações livres amortecidas) Consideremos o sistema massa-mola, supondo agora que o meio oferece uma força de resistência proporcional à velocidade do corpo. Portanto, devemos resolver a equação

$$\ddot{y} + \frac{c}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = 0.$$

A equação característica é $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$, cujas raízes são:

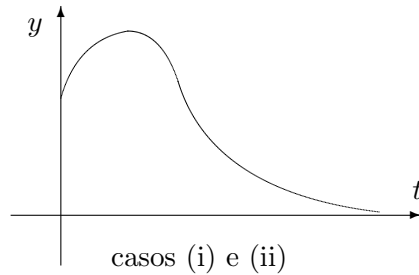
$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \text{ e } \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}.$$

Consideremos as seguintes situações:

(i) **amortecimento supercrítico ou forte** ($c^2 - 4mk > 0$)

Neste caso temos que λ_1 e λ_2 são reais e negativas. De fato, $\sqrt{c^2 - 4mk} < c$. A solução geral é:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

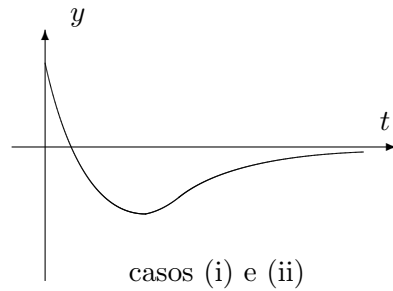


(ii) **amortecimento crítico** ($c^2 - 4mk = 0$)

Como $c^2 - 4mk = 0$, temos que $\lambda_1 = \lambda_2 = -c/(2m)$.

Neste caso, a solução geral é:

$$y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-ct/(2m)}.$$

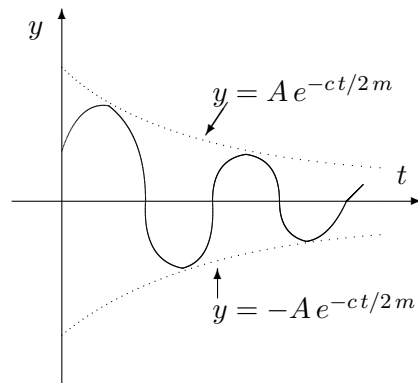


(iii) **amortecimento subcrítico ou oscilatório** ($c^2 - 4mk < 0$)

Como $c^2 - 4mk < 0$, temos que λ_1 e λ_2 são complexos conjugados. Portanto, a solução geral é:

$$y(t) = e^{(-c/2m)t} (c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t),$$

em que $\mu = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$ ou $y(t) = A e^{(-c/2m)t} \cos(\mu t - \alpha)$. Logo, a solução oscila entre duas curvas $y = -A e^{(-c/2m)t}$ e $y = A e^{(-c/2m)t}$. Portanto, representa a curva do cosseno com amplitude decrescente.



Nos três casos o movimento se “extingue” no futuro se existe atrito no sistema, ou seja, qualquer perturbação inicial é dissipada pelo atrito existente. Esta é uma das razões pelas quais os sistemas massa-mola

são úteis nos sistemas mecânicos; eles podem ser usados para amortecer qualquer perturbação indesejada. \square

EXERCÍCIOS 3.3. 1) Determine a solução geral de:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \ddot{y} - \dot{y} - 2y = 0. & \text{b) } \ddot{y} - 7\dot{y} = 0. & \text{c) } \ddot{y} + 4y = 0. \\ \text{d) } \ddot{y} - 4\dot{y} + 13y = 0. & \text{e) } \ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0. & \text{f) } \ddot{y} = 0. \end{array}$$

2) a) Seja $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ uma raiz complexa de $\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$. Mostre que

$$t^{\alpha+i\beta} = t^\alpha t^{i\beta} = t^\alpha e^{(\ln t)i\beta} = t^\alpha [\cos(\beta \ln t) + i \operatorname{sen}(\beta \ln t)]$$

é uma solução com valores complexos da **equação de Euler**

$$t^2 \ddot{y} + a t \dot{y} + b y = 0. \quad (3.16)$$

b) Mostre que $t^\alpha \cos(\beta \ln t)$ e $t^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln t)$ são soluções reais de (3.16).

3) Determine a solução geral de:

$$\text{a) } t^2 \ddot{y} + t \dot{y} + y = 0, \quad t > 0. \quad \text{b) } t^2 \ddot{y} + 2t \dot{y} + 2y = 0, \quad t > 0.$$

3.4 A EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA

Consideremos a equação não homogênea

$$\ddot{y} + a(t) \dot{y} + b(t) y = g(t), \quad [\text{L.N.H.}]$$

em que $a(t)$, $b(t)$ e $g(t)$ são funções contínuas em um intervalo I e $g(t) \neq 0$.

Nos fenômenos físicos descritos por equação da forma acima, o termo $g(t)$ representa, em geral, um “agente externo” atuando sobre

o sistema. Por exemplo, o sistema massa-mola, sujeito apenas à ação da gravidade, é descrito pela equação: $\ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0$. Agora, se impusermos ao sistema acima uma força externa periódica de intensidade $A \cos \omega t$, a equação fica $\ddot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{A}{m} \cos \omega t$.

Um fato que foi observado para a equação linear de 1ª ordem não homogênea $\dot{y} + \alpha(t)y = \beta(t)$ (ver Observação 2.4) é que sua solução geral é constituída de duas parcelas:

- i) a solução geral da homogênea $\dot{y} + \alpha(t)y = 0$;
- ii) uma solução particular da equação não homogênea $\dot{y} + \alpha(t)y = \beta(t)$.

Mostraremos que este fato também é verdadeiro para as equações lineares de 2ª ordem (na verdade, é válida em geral).

TEOREMA 3.6. *Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções linearmente independentes da equação homogênea*

$$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = 0, \quad [\text{L.H.}]$$

e seja $\varphi(t)$ uma solução particular da equação não homogênea [L.N.H.]. Então toda solução $y(t)$ de [L.N.H.] é da forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \varphi(t), \quad (3.17)$$

para alguma escolha conveniente das constantes c_1 e c_2 .

DEMONSTRAÇÃO. É fácil mostrar que se φ_1 e φ_2 são soluções de [L.N.H.], então a função $\psi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ é solução de [L.H.] (Exercício).

Seja agora $y(t)$ uma solução qualquer de [L.N.H.]. Pela parte anterior a função $w(t) = y(t) - \varphi(t)$ é solução de [L.H.]. Porém, toda solução de [L.H.] é combinação linear de $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Então

$$y(t) - \varphi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Logo, $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \varphi(t)$. ■

OBSERVAÇÃO 3.12. A grande utilidade do Teorema 3.6 é que ele reduz o problema de encontrar todas as soluções de [L.N.H.] ao problema mais simples de encontrar duas soluções linearmente independentes de [L.H.] e uma solução de [L.N.H.]. \square

OBSERVAÇÃO 3.13. A expressão (3.17) é chamada **solução geral** de [L.N.H.]. \square

EXEMPLO 3.8. Determine a solução geral de $\ddot{y} + y = t$.

SOLUÇÃO: Vamos determinar a solução geral da homogênea associada: $\ddot{y} + y = 0$. A equação característica $\lambda^2 + 1 = 0$ possui raízes complexas $\lambda = \pm i$. Logo $\psi(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$ é uma solução a valores complexos. Então $y_1(t) = \cos t$ e $y_2(t) = \sin t$ são duas soluções reais linearmente independentes de $\ddot{y} + y = 0$. Além disso, $\varphi(t) = t$ é obviamente uma solução particular de $\ddot{y} + y = t$. Logo, pelo Teorema 3.6, toda solução desta equação é da forma

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t. \quad \square$$

EXEMPLO 3.9. Três soluções de uma equação linear não homogênea de 2^a ordem são: $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = t + e^t$ e $\varphi_3(t) = 1 + t + e^t$. Determine a solução geral desta equação.

SOLUÇÃO: As funções $\varphi_2(t) - \varphi_1(t) = e^t$ e $\varphi_3(t) - \varphi_2(t) = 1$ são soluções da homogênea associada e, além disso, as funções e^t e 1 são linearmente independentes. Logo, a solução geral de tal equação é:

$$y(t) = c_1 + c_2 e^t + t. \quad \square$$

EXERCÍCIOS: Sabendo que φ_1 , φ_2 e φ_3 são soluções de uma equação linear não homogênea de 2^a ordem, determinar a solução geral desta equação, sendo:

a) $\varphi_1(t) = t^2$, $\varphi_2(t) = t^2 + e^{2t}$ e $\varphi_3(t) = 1 + t^2 + 2e^{2t}$.

b) $\varphi_1(t) = 1 + e^t$, $\varphi_2(t) = 1 + t + e^{t^2}$ e $\varphi_3(t) = (t + 1)e^{t^2} + 1$.

Para resolvermos uma equação linear não homogênea precisamos saber encontrar uma solução particular. Veremos agora dois métodos para determinar tal solução.

3.4.1 MÉTODO DOS COEFICIENTES A DETERMINAR

Vamos estudar a equação

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g(t), \quad (3.18)$$

em que a , b e c são constantes reais e $g(t)$ é uma função exponencial, ou um polinômio, ou $\text{sen } t$ ou $\text{cos } t$. Para estes tipos de funções g , determinaremos facilmente uma solução particular. O método também se aplica a produtos de tais funções, ou seja

$$g(t) = e^{\alpha t} (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) (b_1 \text{sen } \beta t + b_2 \text{cos } \beta t).$$

Antes de discutir um procedimento geral, vamos considerar alguns exemplos:

EXEMPLO 3.10. Encontre uma solução particular da equação $\ddot{y} - 3\dot{y} - 4y = 2 \text{sen } t$.

SOLUÇÃO: Queremos uma função $y_p(t)$ tal que a soma de sua 2ª derivada menos 3 vezes a sua 1ª derivada menos 4 vezes a própria função seja igual a $2 \text{sen } t$. Há pouca chance de sucesso se tentarmos funções como $\ln t$, e^t ou t^2 , pois não importa como combinamos estas funções é impossível obter $2 \text{sen } t$. Parece óbvio que devemos considerar para y_p funções como $\text{sen } t$ e $\text{cos } t$. Vamos então tentar $y_p(t) = A \text{cos } t + B \text{sen } t$, em que A e B são constantes a serem determinadas. Logo,

$$\dot{y}_p(t) = -A \text{sen } t + B \text{cos } t \implies \ddot{y}_p(t) = -A \text{cos } t - B \text{sen } t$$

e, substituindo na equação, obtemos

$$(-5A - 3B) \text{cos } t + (3A - 5B) \text{sen } t = 2 \text{sen } t.$$

Esta equação estará identicamente satisfeita se e somente se

$$\begin{cases} -5A - 3B = 0 \\ 3A - 5B = 2 \end{cases} \implies A = \frac{3}{17} \quad \text{e} \quad B = -\frac{5}{17}.$$

Logo, uma solução particular da equação é:

$$y_p(t) = \frac{3}{17} \cos t - \frac{5}{17} \operatorname{sen} t. \quad \square$$

EXEMPLO 3.11. Idem para $\ddot{y} - 3\dot{y} - 4y = 4t^2$.

SOLUÇÃO: É natural tentar $y_p(t) = At^2$, em que A é uma constante a ser determinada. Então, $\dot{y}_p(t) = 2At$. Logo, $\ddot{y}_p(t) = 2A$. Substituindo na equação, obtemos

$$2A - 6At - 4At^2 = 4t^2 \implies A = 0 \quad \text{e} \quad A = -1.$$

Portanto, é impossível achar uma solução da forma At^2 . Entretanto, pensando no termo $4t^2$ como $4t^2 + 0t + 0$, agora parece razoável tentar $y_p(t) = At^2 + Bt + C$, em que A , B e C devem ser determinadas. Então

$$\dot{y}_p(t) = 2At + B \quad \text{e} \quad \ddot{y}_p(t) = 2A.$$

Portanto, $-4At^2 + (-6A - 4B)t + (2A - 3B - 4C) = 4t^2$. Ou seja, $A = -1$, $B = 3/2$ e $C = -13/8$. Logo,

$$y_p(t) = -t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{13}{8}. \quad \square$$

EXEMPLO 3.12. Idem para $\ddot{y} - 3\dot{y} - 4y = e^{5t}$.

SOLUÇÃO: Vamos tentar $y_p(t) = Ae^{5t}$. Portanto, $\dot{y}_p(t) = 5Ae^{5t}$ e $\ddot{y}_p(t) = 25Ae^{5t}$. Substituindo na equação, temos que $6Ae^{5t} = e^{5t}$. Ou seja $A = \frac{1}{6}$. Portanto,

$$y_p(t) = \frac{1}{6} e^{5t}. \quad \square$$

EXEMPLO 3.13. Idem para $\ddot{y} - 3\dot{y} - 4y = e^{-t}$.

SOLUÇÃO: Seria natural tentar $y_p(t) = Ae^{-t}$. Portanto, $\dot{y}_p(t) = -Ae^{-t}$ e $\ddot{y}_p(t) = Ae^{-t}$. Substituindo na equação, temos $0 \cdot Ae^{-t} = e^{-t}$ o que implica que é impossível determinar A tal que Ae^{-t} seja solução desta equação. A dificuldade neste caso é que e^{-t} é uma solução da equação homogênea associada e, portanto, Ae^{-t} também é solução da equação homogênea. Abaixo veremos como resolver esta equação, cuja $y_p(t) = -\frac{te^{-t}}{5}$. \square

Passemos ao estudo do caso geral em que g possui uma das formas:

a) $P_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$,

b) $e^{\alpha t} P_n(t)$,

c) $e^{\alpha t} P_n(t) \operatorname{sen} \beta t$ ou $e^{\alpha t} P_n(t) \operatorname{cos} \beta t$,

d) combinações lineares das anteriores.

1º caso: Se $g(t) = P_n(t)$, $a_n \neq 0$, então a equação (3.18) torna-se

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0. \quad (3.19)$$

Devemos procurar $y_p(t)$ de tal forma que a combinação $a\ddot{y}_p + b\dot{y}_p + cy_p$ seja um polinômio de grau n . O candidato natural é:

$$y_p(t) = A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0$$

com os coeficientes A_0, A_1, \dots, A_n a serem determinados. Substituindo na equação (3.19), temos:

$$\begin{aligned} & a[n(n-1)A_n t^{n-2} + (n-1)(n-2)A_{n-1} t^{n-3} + \dots + 6A_3 t + 2A_2] \\ & \quad + b[nA_n t^{n-1} + (n-1)A_{n-1} t^{n-2} + \dots + 2A_2 t + A_1] \\ & \quad + c[A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0] \\ & = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Igualando os coeficientes, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} c A_n = a_n \\ c A_{n-1} + n b A_n = a_{n-1} \\ c A_{n-2} + (n-1) b A_{n-1} + n(n-1) a A_n = a_{n-2} \\ \vdots \\ c A_0 + b A_1 + 2 a A_2 = a_0. \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Se $c \neq 0$, determinamos, pela primeira equação de (3.21), que $A_n = \frac{a_n}{c}$. Em seguida, substituímos A_n na segunda equação, obtemos $A_{n-1} = \frac{a_{n-1} - (n b a_n)/c}{c}$ e assim sucessivamente.

Se $c = 0$ e $b \neq 0$, então $a \ddot{y}_p + b \dot{y}_p$ é um polinômio de grau $n-1$, enquanto que $P_n(t)$ é um polinômio de grau n . Assim, é impossível resolver (3.21). Para garantir que $a \ddot{y}_p + b \dot{y}_p$ seja um polinômio de grau n , devemos escolher y_p como sendo um polinômio de grau $n+1$. Portanto, assumimos

$$y_p(t) = t(A_n t^n + \dots + A_1 t + A_0)$$

(omitimos o termo constante pois $y = \text{constante}$ é uma solução da equação homogênea $a \ddot{y} + b \dot{y} = 0$) e procedemos como anteriormente.

Se $b = c = 0$, então tomamos $y_p(t) = t^2(A_n t^n + \dots + A_1 t + A_0)$.

2º caso: Consideremos a equação diferencial:

$$a \ddot{y} + b \dot{y} + c y = e^{\alpha t} P_n(t). \quad (3.22)$$

Se removermos o fator $e^{\alpha t}$ do segundo membro de (3.22), esta equação torna-se igual à equação (3.19). Para conseguirmos isto pomos $y = e^{\alpha t} v$. Então $\dot{y} = e^{\alpha t} (\dot{v} + \alpha v)$ e $\ddot{y} = e^{\alpha t} (\ddot{v} + 2\alpha \dot{v} + \alpha^2 v)$. Substituindo na equação (3.22) e cancelando o fator comum $e^{\alpha t}$, obtemos

$$a \ddot{v} + (2a\alpha + b)\dot{v} + (a\alpha^2 + b\alpha + c)v = P_n(t). \quad (3.23)$$

Conseqüentemente, $y(t) = e^{\alpha t} v(t)$ é solução de (3.22) se e somente se $v(t)$ é solução de (3.23), que é um problema já resolvido.

Para encontrar uma solução particular $v(t)$ de (3.23), devemos distinguir os seguintes casos:

- (i) $a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$,
- (ii) $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, mas $2a\alpha + b \neq 0$,
- (iii) $a\alpha^2 + b\alpha + c = 2a\alpha + b = 0$.

O caso (i) significa que α **não é raiz** da equação característica

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (3.24)$$

ou seja, $e^{\alpha t}$ não é solução da equação homogênea $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$. Neste caso, temos que $y_p(t) = Q_n(t)e^{\alpha t}$, em que $Q_n(t) = A_n t^n + \dots + A_1 t + A_0$.

A condição (ii) significa que α é raiz simples da equação característica (3.24), ou seja $e^{\alpha t}$ é solução da equação homogênea, mas $t e^{\alpha t}$ não é. Neste caso, $y_p(t) = t Q_n(t) e^{\alpha t}$.

Finalmente, a condição (iii) significa que tanto $e^{\alpha t}$ como $t e^{\alpha t}$ são soluções da equação homogênea e, portanto, $y_p(t) = t^2 Q_n(t) e^{\alpha t}$.

EXEMPLO 3.14. Encontre uma solução particular da equação $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = (4 - 6t)e^{-t}$.

SOLUÇÃO: A equação característica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ possui duas raízes distintas $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Portanto, $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{2t}$ formam uma base de espaço solução da equação homogênea. Logo, e^{-t} não é solução da homogênea. Portanto, fazemos $y_p(t) = (A + Bt)e^{-t}$ e temos que

$$\dot{y}_p(t) = (A + B - Bt)e^{-t} \quad \text{e} \quad \ddot{y}_p(t) = (A - 2B + Bt)e^{-t}.$$

Substituindo na equação e cancelando o fator e^{-t} , obtemos

$$6A - 5B + 3Bt = 4 - 6t \implies \begin{cases} 6A - 5B = 4 \\ 3B = -6 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -1 \\ B = -2. \end{cases}$$

Logo, $y_p(t) = -(1 + 2t)e^{-t}$ é uma solução. \square

EXEMPLO 3.15. Idem para $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = (1 + t)e^t$.

SOLUÇÃO: Como vimos, no Exemplo 3.14, e^t é solução da equação homogênea associada. Assim, devemos tentar $y_p(t) = t(A + Bt)e^t$. Isso implica que

$$\dot{y}_p(t) = [A + (A + 2B)t + Bt^2]e^t \text{ e } \ddot{y}_p(t) = [2A + 2B + (A + 4B)t + Bt^2]e^t.$$

Substituindo na equação e cancelando o fator e^t , obtemos

$$-A + 2B - 2Bt = 1 + t \implies \begin{cases} -A + 2B = 1 \\ -2B = 1 \end{cases} \implies A = -2 \text{ e } B = -\frac{1}{2}.$$

Logo, $y_p(t) = (-2t - t^2/2)e^t$. \square

EXEMPLO 3.16. Encontrar uma solução particular para a equação $\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = (6 + 12t + 12t^2 + 40t^3 + 42t^5)e^{3t}$.

SOLUÇÃO: A equação característica $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ possui raízes iguais $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Portanto, $y_1(t) = e^{3t}$ e $y_2(t) = te^{3t}$ são soluções da equação homogênea associada. Logo, a solução particular da não homogênea é da forma

$$y_p(t) = t^2(A_0 + A_1t + A_2t^2 + A_3t^3 + A_4t^4 + A_5t^5)e^{3t}.$$

Como se pode notar é bem trabalhoso esta expressão na equação dada para obter os coeficientes. É muito mais prático fazer $y(t) = e^{3t}v$. Isso implica que $\dot{y} = (\dot{v} + 3v)e^{3t}$ e $\ddot{y} = (\ddot{v} + 6\dot{v} + 9v)e^{3t}$. Substituindo na equação e cancelando o fator e^{3t} , obtemos

$$\ddot{v} = 6 + 12t + 12t^2 + 40t^3 + 42t^5.$$

Integrando duas vezes, vem

$$v(t) = 3t^2 + 2t^3 + t^4 + 2t^5 + t^7.$$

Logo, uma solução particular é

$$y_p = (3t^2 + 2t^3 + t^4 + 2t^5 + t^7) e^{3t}. \quad \square$$

3º caso: Consideremos agora a equação diferencial

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = e^{\alpha t} P_n(t) \operatorname{sen} \beta t \quad (\text{ou } \cos \beta t). \quad (3.25)$$

Este problema pode ser reduzido ao anterior se notarmos que:

$$(i) \quad e^{i\beta t} = \cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t \text{ e}$$

(ii) se $y(t) = u(t) + i v(t)$ é uma solução com valores complexos da equação

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g_1(t) + i g_2(t),$$

em que a , b e c são constantes reais, então

$$\begin{cases} a\ddot{u} + b\dot{u} + cu = g_1(t) \\ a\ddot{v} + b\dot{v} + cv = g_2(t). \end{cases}$$

EXERCÍCIO: Prove (ii).

Seja $\varphi(t) = u(t) + i v(t)$ uma solução particular da equação

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = e^{\alpha t} (a_0 + \cdots + a_n t^n) e^{i\beta t}. \quad (3.26)$$

A parte real do segundo membro de (3.26) é $e^{\alpha t} (a_0 + \cdots + a_n t^n) \cos \beta t$ e a parte imaginária é $e^{\alpha t} (a_0 + \cdots + a_n t^n) \operatorname{sen} \beta t$; segue-se de (ii) que

$$u(t) = \Re[\varphi(t)]$$

é uma solução de

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = e^{\alpha t} (a_0 + \cdots + a_n t^n) \cos \beta t$$

e

$$v(t) = \Im[\varphi(t)]$$

é uma solução de

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = e^{\alpha t} (a_0 + \cdots + a_n t^n) \operatorname{sen} \beta t.$$

EXEMPLO 3.17. Encontre uma solução particular da equação $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 20 \operatorname{sen} 2t$.

SOLUÇÃO: Vamos determinar $y_p(t)$ como a parte imaginária de uma solução com valores complexos $\varphi(t)$ da equação $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 20 e^{2it}$. Como e^{2it} não é solução da homogênea associada, devemos tentar solução da forma $\varphi(t) = Ae^{2it}$. Isso implica que

$$\dot{\varphi}(t) = 2iAe^{2it} \quad \text{e} \quad \ddot{\varphi}(t) = -4Ae^{2it}.$$

Substituindo na equação diferencial, obtemos $(-2 - 6i)A = 20$ ou $A = -1 + 3i$. Logo,

$$\varphi(t) = (-1 + 3i)e^{2it} = (-1 + 3i)(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t).$$

Logo,

$$y_p(t) = \Im[\varphi(t)] = 3 \cos 2t - \operatorname{sen} 2t. \quad \square$$

4º caso: Finalmente seja $g(t)$ uma combinação linear de funções dos tipos descritos nos casos 1, 2 e 3.

Este caso pode ser resolvido usando o chamado **PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO DE SOLUÇÕES**, que diz: se φ_1 é solução da equação

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g_1(t)$$

e φ_2 é solução da equação

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g_2(t)$$

e α_1, α_2 são constantes, então a função $\varphi(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t)$ é solução da equação

$$a \ddot{y} + b \dot{y} + c y = \alpha_1 g_1(t) + \alpha_2 g_2(t).$$

EXERCÍCIO: Prove esta afirmação.

EXEMPLO 3.18. Determine uma solução particular da equação:

$$\ddot{y} - 3 \dot{y} + 2 y = (4 - 6 t) e^{-t} + 20 \operatorname{sen} 2 t.$$

SOLUÇÃO: Para encontrar uma solução particular desta equação devemos procurar soluções particulares $y_{p_1}(t)$ e $y_{p_2}(t)$ das equações

$$\ddot{y} - 3 \dot{y} + 2 y = (1 + t) e^{3t} \quad \text{e} \quad \ddot{y} - 3 \dot{y} + 2 y = 20 \operatorname{sen} 2 t,$$

respectivamente, e então somarmos essas duas soluções. Temos, do Exemplo 3.14 que $y_{p_1}(t) = (-1/4 + t/2) e^{3t}$ e do Exemplo 3.17 que $y_{p_2}(t) = 3 \cos 2 t - \operatorname{sen} 2 t$. Logo,

$$y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t) = -(1 + 2 t) e^{-t} + 3 \cos 2 t - \operatorname{sen} 2 t. \quad \square$$

EXERCÍCIOS 3.4. 1) Determine uma solução particular de cada uma das seguintes equações:

a) $\ddot{y} + 4 \dot{y} = \operatorname{sen} t.$

b) $\ddot{y} + 4 y = \cos 2 t.$

c) $\ddot{y} - y = t^2 e^t.$

d) $\ddot{y} + 2 \dot{y} + y = e^{-t}.$

e) $\ddot{y} - 2 \dot{y} + 5 y = 2 \cos^2 t.$

f) $\ddot{y} + 4 y = t \operatorname{sen} 2 t.$

g) $\ddot{y} + y = \cos t \cos 2 t.$

h) $\ddot{y} - 3 \dot{y} + 2 y = e^t + e^{2t}.$

i) $\ddot{y} + \dot{y} - 6 y = \operatorname{sen} t + t e^{2t}.$

j) $\ddot{y} + 2 \dot{y} = 1 + t^2 + e^{-2t}.$

2) a) Seja $L(y) = \ddot{y} - 2 \lambda_1 \dot{y} + \lambda_1^2 y$. Mostre que $L[e^{\lambda_1 t} v(t)] = e^{\lambda_1 t} \ddot{v}(t)$.

b) Determine a solução geral da equação $\ddot{y} - 6 \dot{y} + 9 y = t^{3/2} e^{3t}$.

3.4.2 MÉTODO DE VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS (OU VARIAÇÃO DAS CONSTANTES)

Este é o método mais geral para se encontrar solução particular de equação diferencial não homogênea, pois aplica-se também às equações com coeficientes variáveis. A desvantagem deste método é que ele conduz ao cálculo de integrais geralmente complicadas. O método consiste em determinar uma solução particular da equação não homogênea

$$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = g(t) \quad [\text{L.N.H.}]$$

uma vez conhecidas duas soluções linearmente independentes da equação homogênea associada

$$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = 0. \quad [\text{L.H.}]$$

Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ duas soluções linearmente independentes da [L.H.]. Vamos procurar uma solução particular $y_p(t)$ de [L.N.H.] da forma

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t). \quad (3.27)$$

OBSERVAÇÃO 3.14. À primeira vista, isto parece não ter sentido, pois estamos substituindo o problema de encontrar uma função desconhecida $y_p(t)$ pelo problema de encontrar duas funções desconhecidas $u_1(t)$ e $u_2(t)$, que aparentemente é mais difícil. Entretanto, se trabalharmos corretamente encontraremos $u_1(t)$ e $u_2(t)$ como as soluções de duas equações de 1ª ordem muito simples. \square

Nosso objetivo, agora, é impor condições sobre u_1 e u_2 de modo que a expressão $\ddot{y}_p + a\dot{y}_p + by_p$ se torne tão simples quanto possível. Derivando (3.27), obtemos

$$\dot{y}_p = u_1\dot{y}_1 + u_2\dot{y}_2 + \dot{u}_1y_1 + \dot{u}_2y_2.$$

Para simplificar as expressões de \dot{y}_p e \ddot{y}_p , vamos impor sobre u_1 e u_2 a condição:

$$\dot{u}_1y_1 + \dot{u}_2y_2 = 0.$$

Com isto, temos

$$\ddot{y}_p = \dot{u}_1 \dot{y}_1 + u_1 \ddot{y}_1 + \dot{u}_2 \dot{y}_2 + u_2 \ddot{y}_2.$$

Substituindo y_p , \dot{y}_p e \ddot{y}_p na equação [L.N.H.] e agrupando convenientemente, obtemos

$$\dot{u}_1 \dot{y}_1 + \dot{u}_2 \dot{y}_2 + u_1 [\ddot{y}_1 + a \dot{y}_1 + b y_1] + u_2 [\ddot{y}_2 + a \dot{y}_2 + b y_2] = g.$$

Como y_1 e y_2 são soluções da homogênea, vem

$$\dot{u}_1 \dot{y}_1 + \dot{u}_2 \dot{y}_2 = g.$$

Então, $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ é uma solução da [L.N.H.] se u_1 e u_2 satisfizerem as duas condições:

$$\begin{cases} y_1 \dot{u}_1 + y_2 \dot{u}_2 = 0 \\ \dot{y}_1 \dot{u}_1 + \dot{y}_2 \dot{u}_2 = g \end{cases}$$

que é um sistema linear em \dot{u}_1 e \dot{u}_2 cujo determinante da matriz dos coeficientes é $W(t) = W[y_1, y_2](t)$. Note $W(t)$ é diferente de zero, pois y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes da [L.H.]. Logo,

$$\dot{u}_1 = -\frac{g y_2}{W} \quad \text{e} \quad \dot{u}_2 = \frac{g y_1}{W}.$$

Finalmente, por integração, obtemos u_1 e u_2 e, conseqüentemente, y_p .

OBSERVAÇÃO 3.15. A solução geral de [L.H.] é

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Fazendo c_1 e c_2 variar com o tempo, obtemos uma solução da [L.N.H.]. Daí, o nome **variação dos parâmetros (ou constantes)**. \square

EXEMPLO 3.19. Determine uma solução particular da equação $\ddot{y} - y = 4e^t$.

SOLUÇÃO: Primeiramente, devemos encontrar duas soluções linearmente independentes da homogênea associada $\ddot{y} - y = 0$. A equação

característica $\lambda^2 - 1 = 0$ possui duas raízes distintas $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Portanto, $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{-t}$ são soluções da homogênea com $W[y_1, y_2](t) = -2 \neq 0$. Então $y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$, em que

$$\dot{u}_1(t) = \frac{-g(t)y_2(t)}{W} = \frac{-4e^t e^{-t}}{-2} = 1 \implies u_1(t) = 2t$$

e

$$\dot{u}_2(t) = \frac{g(t)y_1(t)}{W} = \frac{4e^t e^t}{-2} = -2e^{2t} \implies u_2(t) = -e^{2t}.$$

Logo, uma solução particular de $\ddot{y} - y = 2e^t$ é:

$$y_p(t) = 2te^t - e^t. \quad \square$$

EXERCÍCIOS 3.5. 1) Encontre a solução geral, usando o método de variação dos parâmetros para determinar uma particular, de:

- | | |
|--|--|
| a) $\ddot{y} + y = \operatorname{tg} t$, no intervalo $0 < t < \pi/2$. | |
| b) $\ddot{y} - 5\dot{y} + 6y = te^t$. | c) $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 3e^{-t}$. |
| d) $\ddot{y} - 4\dot{y} + 3y = e^t/(1 + e^t)$. | e) $\ddot{y} + y = \cos^2 t$. |
| f) $t^2\ddot{y} + t\dot{y} - y = 4$. | g) $t^2\ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = t^4$. |
| h) $t^2\ddot{y} - 2t\dot{y} + 2y = t^{-2}$. | i) $t\ddot{y} - \dot{y} = 2t^2 e^t$. |

SUGESTÃO: Nos exercícios f, g, h e i determine por tentativa uma base de soluções para as homogêneas associadas.

2) Sabendo-se que as funções $t^{-1/2} \operatorname{sen} t$ e $t^{-1/2} \operatorname{cos} t$ são soluções linearmente independentes da equação $t^2\ddot{y} + t\dot{y} + (t^2 - 1/4)y = 0$, $t > 0$, encontre a solução geral de $t^2\ddot{y} + t\dot{y} + (t^2 - 1/4)y = 3t^{3/2} \operatorname{sen} t$.

3) Determine duas soluções LI de $t^2\ddot{y} - 2y = 0$ da forma $y(t) = t^r$. Usando essas duas soluções, determine a solução geral de $t^2\ddot{y} - 2y = t^2$.

4) Uma solução da equação $\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0$ é $(1 + t)^2$, e

o wronskiano de duas soluções quaisquer, desta equação, é constante. Determine a solução geral de: $\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 1 + t$.

3.5 ALGUMAS APLICAÇÕES

3.5.1 VIBRAÇÕES MECÂNICAS

(a) VIBRAÇÕES AMORTECIDAS FORÇADAS

Consideremos o sistema massa-mola enunciado no Capítulo 1, Seção 1.1.3, e suponhamos que esteja imerso em um meio, tal como óleo, que ofereça uma força de resistência ao movimento (atrito) que em geral é proporcional à velocidade. Este problema, estudado no Exemplo 3.7, são as vibrações livres amortecidas. Analisemos agora o problema em que a massa está sujeita a uma força externa $F(t) = F_0 \cos \omega t$. Então a equação diferencial que nos dá o movimento da massa é

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 \cos \omega t.$$

Usando o método dos coeficientes a determinar, encontramos uma solução particular

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \frac{F_0}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} [(k - m\omega^2) \cos \omega t + c\omega \operatorname{sen} \omega t] \\ &= \frac{F_0}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} [(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2} \cos(\omega t - \alpha) \\ &= \frac{F_0 \cos(\omega t - \alpha)}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}}, \end{aligned}$$

em que $\alpha = \operatorname{arctg}(c\omega/(k - m\omega^2))$. Portanto, toda solução $y(t)$ da equação acima é da forma

$$y(t) = \varphi(t) + \frac{F_0 \cos(\omega t - \alpha)}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}},$$

onde $\varphi(t)$ é uma solução da equação homogênea associada. Conforme vimos no Exemplo 3.7 temos que $\varphi(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, para t grande, $y(t) = y_p(t)$ descreve muito precisamente a posição da massa m , independentemente de sua posição e velocidade iniciais. Por esta razão, $y_p(t)$ é chamada a **parte estacionária** da solução e $\varphi(t)$ é chamada a **parte transitória** da solução.

(b) VIBRAÇÕES FORÇADAS NÃO AMORTECIDAS

Consideremos o problema acima com $c = 0$, isto é, sem amortecimento. Então a equação diferencial que nos dá o movimento da massa é

$$m \ddot{y} + k y = F_0 \cos \omega t$$

ou

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega t,$$

em que $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

O caso $\omega \neq \omega_0$ não tem interesse. Toda solução é da forma

$$y(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

Portanto, é soma de duas funções periódicas de períodos diferentes. O caso interessante é aquele em que $\omega = \omega_0$, isto é, quando a frequência ω da força externa é igual a frequência natural do sistema. Este caso é chamado de **ressonância** e a equação diferencial do movimento da massa é

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t. \quad (3.28)$$

Encontraremos uma solução particular $y_p(t)$ de (3.28) como a parte real de uma solução com valores complexos da equação

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_0 t}. \quad (3.29)$$

Como $e^{i\omega_0 t}$ é solução da equação homogênea $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$, a equação (3.29) tem uma solução da forma $\varphi(t) = A t e^{i\omega_0 t}$, para alguma constante A . Então

$$\dot{\varphi}(t) = A e^{i\omega_0 t} + i\omega_0 A t e^{i\omega_0 t} \quad \text{e} \quad \ddot{\varphi}(t) = 2i\omega_0 A e^{i\omega_0 t} - \omega_0^2 A t e^{i\omega_0 t}.$$

Logo,

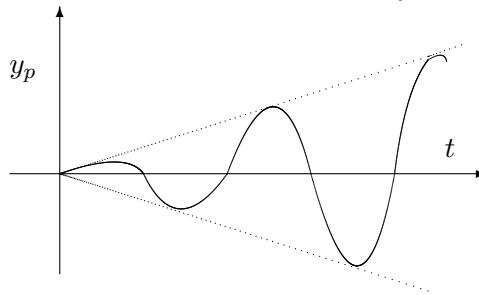
$$\frac{F_0}{m} e^{i\omega_0 t} = \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 2i\omega_0 A e^{i\omega_0 t}.$$

Isto implica que $A = -i F_0 / (2 m \omega_0)$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= -\frac{i F_0 t}{2 m \omega_0} e^{i\omega_0 t} = -\frac{i F_0 t}{2 m \omega_0} (\cos \omega_0 t + i \operatorname{sen} \omega_0 t) \\ &= \frac{i F_0 t}{2 m \omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t - \frac{i F_0 t}{2 m \omega_0} \cos \omega_0 t. \end{aligned}$$

Logo, $y_p(t) = \Re[\varphi(t)] = \frac{F_0 t}{2 m \omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t$ é uma solução particular de (3.28). Conseqüentemente, toda solução $y(t)$ de (3.28) é da forma:

$$y(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{F_0 t}{2 m \omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t.$$

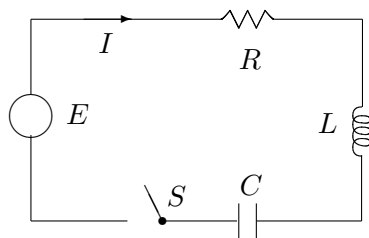


Notamos que a soma das duas primeiras parcelas é uma função periódica de t e a terceira parcela representa uma oscilação de amplitude crescente. Portanto, se a força externa $F_0 \cos \omega t$, está em ressonância com a frequência natural do sistema, causará sempre oscilações ilimitadas. Tal fenômeno foi responsável pela queda da Ponte de Tacoma ([4]) e muitas outras catástrofes mecânicas.

3.5.2 CIRCUITOS ELÉTRICOS

Consideremos agora um sistema elétrico, o qual serve para mostrar que sistemas físicos inteiramente diversos podem corresponder à mesma equação diferencial, o que ilustra o papel unificador que a Matemática representa junto a vários fenômenos de natureza física completamente diferentes. Vamos obter uma correspondência entre sistemas elétricos e mecânicos que não é simplesmente qualitativa, mas estritamente quantitativa porque, dado um sistema mecânico, podemos construir um sistema elétrico cuja corrente forneça os valores exatos do deslocamento no sistema mecânico, quando introduzimos fatores da escala adequados. A analogia pode ser empregada para construir um **modelo elétrico** de um dado sistema mecânico. Em muitos casos, isto constitui uma simplificação essencial, porque os circuitos elétricos são fáceis de montar e as correntes e tensões são medidas com facilidade, enquanto a construção de um modelo mecânico pode ser complicada e cara, e a medida dos deslocamentos, demorada e imprecisa.

Examinemos o circuito RLC representado na figura abaixo, em que E representa uma fonte de força eletromotriz (gerador ou bateria) que produz uma diferença de potencial que produz uma corrente I que passa através do circuito quando a chave S é fechada. R denota a resistência ao fluxo da corrente (tal como a produzida por uma lâmpada), L , um indutor (bobina de fio de cobre).



Quando a corrente passa através da bobina, produz-se um campo magnético que se opõe a qualquer mudança na corrente através desta

bobina. A variação de voltagem produzida pela bobina é proporcional à taxa de variação da corrente. A constante de proporcionalidade é chamada indutância L da bobina.

C = capacitor, que consiste geralmente de duas placas de metal separadas por um material através do qual pode passar pouca corrente. Um capacitor tem o efeito de reverter o fluxo da corrente quando uma das placas se torna carregada.

Seja $Q(t)$ a carga do capacitor no instante t . Para deduzir uma equação diferencial satisfeita por $Q(t)$ usaremos a 2ª lei de Kirchhoff:

“Num circuito fechado, a voltagem aplicada é igual à soma das quedas de voltagem no resto do circuito.”

Como a queda de voltagem através do resistor R é igual a RI , através do indutor L é igual a $L \frac{dI}{dt}$ e através do capacitor C é igual a Q/C , temos que

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

e, como $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$, vem que

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t).$$

Esta equação e a equação do sistema massa-mola, apresentado na Subseção 3.5.1, são essencialmente a mesma. Isto mostra que o circuito RLC é o análogo elétrico ao sistema mecânico da aplicação anterior, e podemos estabelecer a seguinte correspondência entre as quantidades elétricas e mecânicas.

| | | |
|---------------------------------|-----------------------|--------------------------------|
| indutância L | \longleftrightarrow | massa m |
| resistência R | \longleftrightarrow | constante de amortecimento c |
| recíproco da capacitância $1/C$ | \longleftrightarrow | constante da mola k |
| força eletromotriz $E(t)$ | \longleftrightarrow | força aplicada $F(t)$ |
| carga $Q(t)$ | \longleftrightarrow | deslocamento $y(t)$. |

3.5.3 OUTRAS APLICAÇÕES

- 1) Um modelo para descoberta de diabetes ([4] - pag. 157).
- 2) Lei da Gravitação de Newton e o movimento dos Planetas ([11] - pag.647).
- 3) Um modelo de população ([9] - pag. 111).
- 4) Propagação de ondas monocromáticas em um meio unidimensional ([1] - pag. 128).
- 5) Deflexão de vigas ([10] - pag. 108).
- 6) Cabos suspensos ([10] - pag. 112).

EXERCÍCIOS 3.6. 1) Um indutor de 0,2 henrys, um resistor de 16 ohms e um capacitor de 0,02 farads são ligados em série com uma força eletromotriz de E volts. No instante $t = 0$ a carga do capacitor e a corrente no circuito são nulas. Encontre a carga e a corrente em qualquer instante $t > 0$, se: a) $E = 300$ volts; b) $E = 100 \sin 3t$ volts.

- 2) Determine a corrente estacionária em um circuito RLC , em que:
a) $R = 20$ ohms; $L = 10$ henrys; $C = 0,05$ farad; $E = 50 \sin t$ volts.
b) $R = 40$ ohms; $L = 10$ henrys; $C = 0,02$ farad; $E = 800 \cos t$ volts.

3) Encontrou-se experimentalmente que 9,44 N de peso esticam uma mola em 15,24 cm. Se o peso é puxado para baixo adicionalmente em 7,62 cm e solto, determine a amplitude, período e frequência do movimento, desprezada a resistência do ar. (A massa m de um objeto em termos de seu peso, ω , é $m = \omega/g = \omega/9,8$).

4) Um sistema massa-mola amortecido com $m = 1$, $k = 2$ e $c = 2$ (em suas respectivas unidades) está suspenso em equilíbrio. Uma força externa $F(t) = (\pi - t)$ N atua sobre o sistema entre $t = 0$ e $t = \pi$. Determine a posição da massa em qualquer instante $t > \pi$.

3.6 EQUAÇÕES DE ORDEM SUPERIOR

Discutiremos, aqui, rapidamente as equações diferenciais lineares de ordem superior, pois toda teoria desenvolvida para a equação linear de 2ª ordem pode ser estendida para a equação de ordem n .

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = g(t), \quad [\text{L.N.H.}]$$

em que n é qualquer número natural.

O próximo teorema contém os principais resultados sobre as equações de ordem n . Sua demonstração será omitida, pois é simples adaptação do que já foi visto.

TEOREMA 3.7. *Suponhamos que $a_1(t), \dots, a_n(t)$ e $g(t)$ sejam funções contínuas num intervalo I . Então:*

(i) *O conjunto de todas as soluções da equação homogênea*

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0 \quad [\text{L.H.}]$$

é um espaço vetorial de dimensão n .

(ii) *Sejam $y_1(t), \dots, y_n(t)$ soluções de [L.H.]. Estas funções são linearmente independentes se, e somente, se*

$$\det \begin{pmatrix} y_1(t_0) & \cdots & y_n(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

para algum $t_0 \in I$. Este determinante é chamado Wronskiano de y_1, \dots, y_n .

(iii) *Se $y_p(t)$ é uma solução particular de [L.N.H.] e y_1, \dots, y_n são soluções linearmente independentes de [L.H.], então a solução geral $y(t)$ de [L.N.H.] é da forma*

$$y(t) = y_p(t) + \sum_{j=1}^n c_j y_j(t).$$

No caso em que a_1, \dots, a_n são constantes, temos que $y(t) = e^{\lambda t}$ é solução de [L.H.] se, e somente, se λ é raiz da equação característica

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (3.30)$$

Como antes, temos três casos a considerar:

a) A equação característica (3.30) possui n raízes reais distintas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Então, as funções

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$$

são soluções reais linearmente independentes de [L.H.].

b) A equação (3.30) possui n raízes distintas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, mas algumas são complexas. Se $\alpha + i\beta \neq 0$, $\beta \neq 0$, é uma raiz de (3.30), então $e^{(\alpha+i\beta)t}$ é uma solução complexa de [L.H.] a qual dá origem a duas soluções reais linearmente independentes:

$$u(t) = \Re(e^{(\alpha+i\beta)t}) = e^{\alpha t} \cos \beta t$$

e

$$v(t) = \Im(e^{(\alpha+i\beta)t}) = e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t.$$

c) As raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ não são todas distintas. Se λ é uma raiz de (3.30) com multiplicidade k , então as funções $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}$ são k soluções linearmente independentes de [L.H.].

Daremos agora, alguns fatos que nos ajudarão na determinação de raízes de polinômios.

i) Dada a equação

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (3.31)$$

onde a_0, a_1, \dots, a_{n-1} são inteiros, suas prováveis raízes inteiras são os divisores de a_0 .

ii) Se λ_1 é uma raiz de (3.31), então o algoritmo de Briot-Ruffini é:

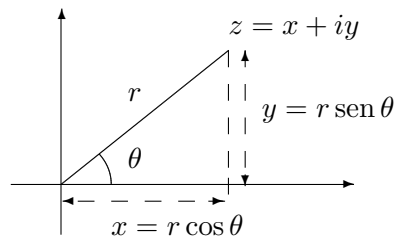
$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
 \hline
 \lambda_1 & \underbrace{1}_{b_{n-1}} & \underbrace{\lambda_1 + a_{n-1}}_{b_{n-2}} & \underbrace{\lambda_1 a_{n-2} + a_{n-2}}_{b_{n-3}} & \cdots & \underbrace{\lambda_1 a_1 + a_1}_{b_0} & 0
 \end{array}$$

e, portanto,

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda^{n-1} + b_{n-2} \lambda^{n-2} + \cdots + b_1 \lambda + b_0).$$

(iii) Raiz n -ésima de um número complexo:

Observamos primeiramente que todo número complexo z pode ser escrito na forma $z = r e^{i\theta}$. De fato, se $z = x + iy$, na figura abaixo vemos que $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Logo, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$



A raiz n -ésima de um número complexo $z = r e^{i\theta}$ é dada por

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

EXEMPLO 3.20. Calcule as raízes quartas de -1 .

SOLUÇÃO: Temos que $-1 = \cos \pi + i \sin \pi = e^{i\pi} = e^{i(\pi + 2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right).$$

$$\begin{aligned}
k = 0 &\implies z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i), \\
k = 1 &\implies z_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} (1 - i), \\
k = 2 &\implies z_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} (1 + i), \\
k = 3 &\implies z_4 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - i). \quad \square
\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS:

- 1) Calcule as raízes quartas de -16 .
- 2) Calcule as raízes quintas de -1 .
- 3) Calcule as raízes sextas de 3 .

EXEMPLO 3.21. Determine a solução geral real da equação diferencial $y^{(3)} + \dot{y} - 10y = 0$.

SOLUÇÃO: A equação característica é $\lambda^3 + \lambda - 10 = 0$ tem por raízes: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1 + 2i$ e $\lambda_3 = -1 - 2i$. Portanto, $y_1(t) = e^{2t}$, $y_2(t) = e^{-t} \cos 2t$ e $y_3(t) = e^{-t} \operatorname{sen} 2t$ são soluções linearmente independentes. Então a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{2t} + e^{-t} (c_2 \cos 2t + c_3 \operatorname{sen} 2t). \quad \square$$

EXEMPLO 3.22. Idem para $y^{(3)} + 3\ddot{y} + 3\dot{y} + y = 0$.

SOLUÇÃO: A equação característica é $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$ ou $(\lambda + 1)^3 = 0$. Logo, $\lambda = -1$ é raiz com multiplicidade 3 e, portanto, $y_1(t) = e^{-t}$, $y_2(t) = t e^{-t}$ e $y_3(t) = t^2 e^{-t}$ formam um sistema fundamental de soluções. Então a solução geral é

$$y(t) = e^{-t} (c_1 + c_2 t + c_3 t^2). \quad \square$$

EXEMPLO 3.23. Idem para $y^{(4)} + y = 0$.

SOLUÇÃO: A equação característica é $\lambda^4 + 1 = 0$ ou $\lambda^4 = -1$. Pelo Exemplo 3.20, temos que $\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, $\lambda_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ e $\lambda_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ são as quatro raízes da equação $\lambda^4 = -1$. As raízes λ_4 e λ_3 são as conjugadas complexas de λ_1 e λ_2 , respectivamente. Assim,

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{t\sqrt{2}/2} \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} t + i \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2} t \right)$$

e

$$\varphi_2(t) = e^{\lambda_3 t} = e^{-\sqrt{2}t/2} \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} t + i \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2} t \right)$$

são duas soluções com valores complexos, o que implica que

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\sqrt{2}t/2} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} t, & y_2(t) &= e^{\sqrt{2}t/2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2} t, \\ y_3(t) &= e^{-\sqrt{2}t/2} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} t & y_4(t) &= e^{-\sqrt{2}t/2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2} t \end{aligned}$$

são quatro soluções reais linearmente independentes. Logo, a solução real geral é

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\sqrt{2}t/2} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2} t + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2} t \right) + \\ &+ e^{-\sqrt{2}t/2} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2} t + c_4 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2} t \right). \quad \square \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 3.7. 1) Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações:

- | | |
|--|--|
| a) $\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = 0.$ | b) $y^{(4)} + 2\ddot{y} + y = 0.$ |
| c) $y^{(3)} - 2\ddot{y} - \dot{y} + 2y = 0.$ | d) $y^{(4)} - 5y^{(3)} + 6\ddot{y} + 4\dot{y} - 8y = 0.$ |
| e) $y^{(3)} + \ddot{y} - 6\dot{y} = 0.$ | f) $y^{(3)} + \ddot{y} + 3\dot{y} - 5y = 0.$ |
| g) $y^{(4)} + 8\ddot{y} + 16y = 0.$ | h) $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 5\ddot{y} = 0.$ |

2) Resolva cada um dos P.V.I.

$$\text{a) } \begin{cases} y^{(5)} - 2y^{(4)} + y^{(3)} = 0 \\ y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = y^{(3)}(0) = 0, \quad y^{(4)}(0) = -1. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y^{(3)} + \ddot{y} - 6\dot{y} = 0 \\ y(0) = \dot{y}(0) = 1, \quad \ddot{y}(0) = 2. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y^{(3)} - \dot{y} = 0 \\ y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1, \quad \ddot{y}(0) = 2. \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} y^{(6)} - \ddot{y} = 0 \\ y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = y^{(3)}(0) = y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = 0. \end{cases}$$

3) Mostre que a equação diferencial $t^3 y^{(3)} - 6t \dot{y} + 12y = 0$ possui três soluções linearmente independentes da forma $y(t) = t^r$.

4) Sabendo-se que $y_1(t) = e^t \cos t$ é uma solução de $y^{(4)} - 2y^{(3)} + \ddot{y} + 2\dot{y} - 2y = 0$, determine sua solução geral. Sugestão: Use esta informação para determinar as raízes da sua equação característica.

Consideremos, agora, a equação não homogênea

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = g(t), \quad [\text{L.N.H.}]$$

Um fato importante sobre [L.N.H.] é

“Se $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ são n soluções linearmente independentes de [L.H.] e $y_p(t)$ é uma solução particular da [L.N.H.], então toda solução de [L.N.H.] é da forma

$$y(t) = \sum_{j=1}^n c_j y_j(t) + y_p(t),$$

em que c_1, c_2, \dots, c_n são constantes.”

Logo, como no caso das equações de segunda ordem, para determinarmos a solução geral de [L.N.H.] precisamos saber encontrar uma solução particular de [L.N.H.].

3.7 MÉTODO DOS COEFICIENTES A DETERMINAR

Este método para [L.N.H.] de ordem n funciona do mesmo modo que para as de segunda ordem.

EXEMPLO 3.24. Encontre uma solução particular da equação $y^{(3)} - 3\ddot{y} + 3\dot{y} - y = e^t$.

SOLUÇÃO: A equação característica $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$ tem $\lambda = 1$ como raiz tripla. Logo, $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = t e^t$ e $y_3(t) = t^2 e^t$ formam um sistema fundamental de soluções para a homogênea associada. Então devemos tentar $y_p(t) = A t^3 e^t$. Portanto,

$$\begin{aligned}\dot{y}_p(t) &= A e^t (t^3 + 3t^2), & \ddot{y}_p(t) &= A e^t (t^3 + 6t^2 + 6t) \text{ e} \\ y_p^{(3)}(t) &= A e^t (t^3 + 9t^2 + 18t + 6).\end{aligned}$$

Substituindo na equação e cancelando o fator e^t , obtemos que $A = 1/6$. Logo,

$$y_p(t) = \frac{t^3 e^t}{6} . \quad \square$$

EXERCÍCIOS 3.8. 1) Determine a solução geral de:

- a) $y^{(3)} - \ddot{y} - \dot{y} + y = 2e^{-t} + 3$. b) $y^{(3)} + \ddot{y} + \dot{y} + y = e^{-t} + 4t$.
 c) $y^{(3)} - y = 2 \operatorname{sen} t$. d) $y^{(3)} + \dot{y} = \operatorname{tg} t$.
 e) $y^{(3)} - 4\dot{y} = t + \cos t + 2e^{-2t}$. f) $y^{(4)} + 2\ddot{y} + y = t^2 \operatorname{sen} t$.

2) Resolva cada um dos P.V.I.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left\{ \begin{array}{l} y^{(3)} + 4\dot{y} = t \\ y(0) = \dot{y}(0) = 0 \\ \ddot{y}(0) = 1. \end{array} \right. & \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} y^{(4)} + 2\ddot{y} + y = 3t + 4 \\ y(0) = \dot{y}(0) = 0 \\ \ddot{y}(0) = y^{(3)}(0) = 1. \end{array} \right. \\ \text{c) } \left\{ \begin{array}{l} y^{(4)} - y = 3t + \cos t \\ y(0) = \dot{y}(0) = 1 \\ \ddot{y}(0) = y^{(3)}(0) = 0. \end{array} \right. & \text{d) } \left\{ \begin{array}{l} y^{(3)} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} = t + e^t \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = -1/4 \quad \ddot{y}(0) = -3/2. \end{array} \right. \end{array}$$

3.8 MÉTODO DE VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS

Sejam $y_1(t), \dots, y_n(t)$ n soluções linearmente independentes de [L.H.]. Procuraremos funções $u_1(t), \dots, u_n(t)$ de modo que

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + \dots + u_n(t)y_n(t)$$

seja solução de [L.N.H.]. Como no caso $n = 2$, isto ocorrerá se, e somente, se as funções $u_1(t), \dots, u_n(t)$ satisfizerem ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 \dot{u}_1 + \dots + y_n \dot{u}_n = 0 \\ \dot{y}_1 \dot{u}_1 + \dots + \dot{y}_n \dot{u}_n = 0 \\ \vdots \\ y_1^{(n-2)} \dot{u}_1 + \dots + y_n^{(n-2)} \dot{u}_n = 0 \\ y_1^{(n-1)} \dot{u}_1 + \dots + y_n^{(n-1)} \dot{u}_n = g(t). \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema obtemos $\dot{u}_1, \dots, \dot{u}_n$ e, finalmente, por integração obteremos as funções u_1, \dots, u_n .

OBSERVAÇÃO 3.16. O sistema acima possui solução única pois, o determinante dos coeficientes $W[y_1, \dots, y_n](t) \neq 0$ visto que y_1, \dots, y_n são soluções linearmente independentes de [L.H.]. \square

EXEMPLO 3.25. Determine uma solução da equação $y^{(3)} + \dot{y} = \sec t$.

SOLUÇÃO: Primeiramente devemos encontrar uma base de soluções da homogênea associada $y^{(3)} + \dot{y} = 0$. A equação característica $\lambda^3 + \lambda = 0$ tem por raízes: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i$ e $\lambda_3 = -i$. Portanto, $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = \cos t$ e $y_3(t) = \sin t$ constitui tal base. Então, procuramos u_1 , u_2 e u_3 tais que

$$y_p(t) = u_1(t) + u_2(t) \cos t + u_3(t) \sin t$$

seja solução da equação não homogênea. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \cos t + \dot{u}_3 \sin t = 0 \\ -\dot{u}_2 \sin t + \dot{u}_3 \cos t = 0 \\ -\dot{u}_2 \cos t - \dot{u}_3 \sin t = \sec t, \end{cases}$$

obtemos

$$\dot{u}_1 = \sec t \implies u_1(t) = \ln |\sec t + \tan t|,$$

$$\dot{u}_2 = -1 \implies u_2(t) = -t,$$

$$\dot{u}_3 = -\frac{\sin t}{\cos t} \implies u_3(t) = \ln |\cos t|.$$

Portanto,

$$y_p(t) = \ln |\sec t + \tan t| - t \cos t + (\sin t) \ln |\cos t|. \quad \square$$

EXERCÍCIOS 3.9. 1) Encontre, usando o método de variação dos parâmetros, uma solução particular de cada equação:

a) $y^{(4)} - \ddot{y} = 4t$.

b) $y^{(3)} - 3\ddot{y} + 3\dot{y} - y = e^t$.

c) $y^{(3)} - 4\dot{y} = t + \cos t + 2e^{-t}$.

d) $y^{(3)} + \ddot{y} + \dot{y} + y = t + e^{-t}$.

e) $y^{(4)} + 2\ddot{y} + y = t^2 \sin t$.

f) $y^{(3)} - 6\ddot{y} + 11\dot{y} - 6y = e^{4t}$.

2) Sabendo-se que t , t^2 e $1/t$ são soluções da equação homogênea associada a

$$t^3 y^{(3)} + t^2 \ddot{y} - 2t \dot{y} + 2y = 2t^4, \quad t > 0,$$

determine uma solução particular da equação não homogênea.

Capítulo 4

Transformada de Laplace

4.1 INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Seja $f(t)$ uma função definida para todo $t \geq a$ tal que exista a integral $\int_a^b f(t) dt$ qualquer que seja $b > a$. A **integral imprópria** de f é definida por

$$\int_a^\infty f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt, \quad (4.1)$$

caso o limite exista e seja finito. Neste caso, dizemos que f é **integrável no sentido impróprio** em $[a, \infty)$ ou que a integral imprópria $\int_a^\infty f(t) dt$ é **convergente**. Caso contrário, dizemos que a integral imprópria é **divergente**.

Por exemplo, a integral imprópria $\int_0^\infty e^{-t} dt$ é convergente, pois

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-t}]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = 1.$$

A integral imprópria $\int_1^\infty \frac{dt}{t}$ diverge, pois

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dt}{t} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln t]_1^b = \infty.$$

EXERCÍCIOS 4.1. 1) Verifique se cada uma das integrais dadas abaixo converge ou diverge:

a) $\int_2^\infty \frac{dt}{(t-1)^{3/2}}$. b) $\int_0^\infty t e^{-t^2} dt$. c) $\int_1^\infty \frac{\ln t}{t} dt$. d) $\int_e^\infty \frac{dt}{t(\ln t)^2}$.

2) Mostre que a integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ é convergente se $p > 1$ e é divergente se $p \leq 1$.

Integrais impróprias em que o integrando depende ainda de uma outra variável são de grande importância em matemática e em outras aplicações. O interesse central deste capítulo é estudar integrais da forma

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \tag{4.2}$$

A integral (4.2) define uma função $F(s)$, da variável s . O domínio desta função é constituído por todos os valores de s tais que esta integral seja convergente.

Consideremos, por exemplo

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt. \tag{4.3}$$

Esta integral é divergente se $s \leq 0$. Para $s > 0$, temos

$$\int_0^\infty e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-sb}}{s} \right) = \frac{1}{s}.$$

Deste modo,

$$F(s) = \frac{1}{s} \quad (s > 0).$$

Faça o mesmo para as integrais abaixo e obtenha as igualdades:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^\infty e^{-st} t dt &= \frac{1}{s^2} \quad (s > 0). & \text{b) } \int_0^\infty e^{-st} \sen t dt &= \frac{1}{s^2 + 1} \quad (s > 0). \\ \text{c) } \int_0^\infty e^{-st} t^2 dt &= \frac{2}{s^3} \quad (s > 0). & \text{d) } \int_0^\infty e^{-st} \sinh t dt &= \frac{1}{s^2 - 1} \quad (s > 1). \end{aligned}$$

[sugestão: $\sinh t = (e^t - e^{-t})/2$].

As integrais acima sugerem que o domínio da função $F(s)$ seja um intervalo da forma (a, ∞) . Pode-se mostrar que isto é verdadeiro em geral.

4.2 A TRANSFORMADA DE LAPLACE

Seja $f(t)$ uma função definida para todo $t \geq 0$. A função

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{4.4}$$

é chamada **transformada de Laplace** de $f(t)$, e denotada por $\mathcal{L}[f(t)]$.

EXEMPLO 4.1. De acordo com o exemplo da seção anterior temos para $s > 0$

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}. \quad \square$$

EXEMPLO 4.2. Para $s > c$, temos

$$\mathcal{L}[e^{ct}] = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} e^{ct} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(c-s)t}}{c-s} \right]_0^b = \frac{1}{s-c}. \quad \square$$

EXEMPLO 4.3. Integrando por partes duas vezes temos

$$\int_0^b e^{-st} \cos wt dt = \frac{w e^{-st} \sen wt - s e^{-st} \cos wt}{s^2 + w^2} \Big|_0^b,$$

$$\int_0^b e^{-st} \operatorname{sen} wt \, dt = \frac{w e^{-st} \cos wt - s e^{-st} \operatorname{sen} wt}{s^2 + w^2} \Big|_0^b.$$

Fazendo $b \rightarrow \infty$ em cada uma destas igualdades obtemos, para $s > 0$,

$$\mathcal{L}[\cos wt] = \frac{s}{s^2 + w^2} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}[\operatorname{sen} wt] = \frac{w}{s^2 + w^2}. \quad \square$$

EXEMPLO 4.4. Cálculo de $\mathcal{L}[t^n]$ para n inteiro positivo. Integrando por partes, temos (para $s > 0$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^n] &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t^n \, dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{t^n e^{-st}}{s} \Big|_0^b + \frac{n}{s} \int_0^b e^{-st} t^{n-1} \, dt \right] \\ &= \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} \, dt = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}]. \end{aligned}$$

Assim, se $n = 1$, temos $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s^2}$.

Se $n \geq 2$, temos $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}] = \frac{n(n-1)}{s^2} \mathcal{L}[t^{n-2}] = \dots = \frac{n!}{s^{n+1}}$. \square

4.3 ALGUMAS PROPRIEDADES

As propriedades que enunciamos a seguir são de grande utilidade para o cálculo de transformadas.

PROPRIEDADE 1 (LINEARIDADE): Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$ e a, b são constantes, então

$$\mathcal{L}[a f(t) + b g(t)] = a F(s) + b G(s) = a \mathcal{L}[f(t)] + b \mathcal{L}[g(t)].$$

De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[a f(t) + b g(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} [a f(t) + b g(t)] \, dt = \\ &= a \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, dt + b \int_0^\infty e^{-st} g(t) \, dt \\ &= a \mathcal{L}[f(t)] + b \mathcal{L}[g(t)]. \quad \square \end{aligned}$$

EXEMPLO 4.5. Calculemos $\mathcal{L}[\sinh at]$, usando a Propriedade 1.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sinh at] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{at}] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-at}] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|.\end{aligned}$$

De modo análogo obtemos $\mathcal{L}[\cosh at] = \frac{s}{s^2 - a^2}$, para $s > |a|$. \square

PROPRIEDADE 2: Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, para $s > s_0$, então

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a), \quad \text{para } s > s_0 + a. \quad (4.5)$$

De fato,

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t) dt = F(s-a). \quad \square$$

Usando esta propriedade e os exemplos precedentes, podemos escrever

$$\mathcal{L}[e^{at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2} \quad \mathcal{L}[e^{at} \cos \omega t] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{at}t^n] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

PROPRIEDADE 3: Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, então

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s). \quad (4.6)$$

Façamos a verificação para $n = 1$. Temos

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st}f(t) dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st}f(t) dt = - \int_0^\infty e^{-st}t f(t) dt.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}[t f(t)] = -F'(s). \quad (4.7)$$

Aplicando repetidas vezes a igualdade (4.7), obtemos (4.6). \square

EXEMPLO 4.6. Segue de (4.6) com $n = 2$ e $n = 1$ que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^2 e^{5t}] &= \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s-5} \right) = \frac{2}{(s-5)^3} \quad e \\ \mathcal{L}[t \operatorname{sen} 3t] &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{3}{s^2+9} \right) = \frac{6s}{(s^2+9)^2}. \quad \square\end{aligned}$$

A próxima propriedade faz uso do seguinte conceito:

Uma função $f(t)$ é de **ordem exponencial** se existirem constantes $M, \alpha > 0$ tais que para todo t suficientemente grande

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}.$$

As funções $\operatorname{sen} t, \operatorname{cos} t, e^{kt}$ e t^n ($n \geq 0$) são de ordem exponencial pois $|\operatorname{sen} t| \leq 1, |\operatorname{cos} t| \leq 1$ e $|e^{kt}| = e^{kt}$ para todo $t \geq 0$. Para a função t^n , notemos que, para t suficientemente grande, $|t^n| \leq e^t$, pois $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^t} = 0$.

A função e^{t^2} não é de ordem exponencial, uma vez que para qualquer $\alpha > 0$ temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t^2} e^{-\alpha t} = \infty$.

PROPRIEDADE 4: *Suponha que f e f' sejam integráveis em $[0, b]$, para todo $b > 0$. Se f for de ordem exponencial, então existe $\mathcal{L}[f'(t)]$*

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s \mathcal{L}[f(t)] - f(0). \quad (4.8)$$

De fato, integrando por partes, temos

$$\int_0^b e^{-st} f'(t) dt = e^{-sb} f(b) - f(0) + s \int_0^b e^{-st} f(t) dt.$$

Fazendo $b \rightarrow \infty$, a integral do 1º membro tende a $\mathcal{L}[f'(t)]$, a integral do 2º membro tende a $\mathcal{L}[f(t)]$ e a parcela $e^{-sb} f(b)$ tende a zero, pois f é de ordem exponencial (os valores de s devem ser maiores do que a constante α da definição de ordem exponencial). \square

OBSERVAÇÃO 4.1. Esta propriedade aplica-se a derivadas de ordem superior. Por exemplo, para a derivada segunda, a igualdade (4.8) implica

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''(t)] &= s \mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) \\ &= s \{s \mathcal{L}[f(t)] - f(0)\} - f'(0) \\ &= s^2 \mathcal{L}[f(t)] - s f(0) - f'(0).\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 \mathcal{L}[f(t)] - s f(0) - f'(0). \quad \square \quad (4.9)$$

OBSERVAÇÃO 4.2. As igualdades (4.8) e (4.9) são de grande importância, especialmente na resolução de equações diferenciais, como veremos adiante. Estas igualdades também podem ser utilizadas para obter transformadas de Laplace de funções. Calculemos, por exemplo, $\mathcal{L}[e^{kt}]$ utilizando (4.8). Notemos que a função $f(t) = e^{kt}$ satisfaz $f'(t) = k e^{kt}$ e $f(0) = 1$. Substituindo estes dados em (4.8), obteremos que $\mathcal{L}[k e^{kt}] = s \mathcal{L}[e^{kt}] - 1$, donde $(s - k) \mathcal{L}[e^{kt}] = 1$. Logo,

$$\mathcal{L}[e^{kt}] = \frac{1}{s - k}. \quad \square$$

EXERCÍCIOS 4.2. 1) Calcule a transformada de Laplace das seguintes funções:

- a) $t^2 - 3t + 2$. b) $4 \cos 3t - 5 \operatorname{sen} 2t$. c) $2t e^{3t}$.
d) $t^2 \cos 5t$. e) $t e^{2t} \operatorname{sen} 3t$. f) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{se } t > \pi. \end{cases}$

2) Use a igualdade (4.9) para mostrar que

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \qquad \mathcal{L}[\operatorname{sen} \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

4.4 TRANSFORMADA INVERSA - FRAÇÕES PARCIAIS

Dada uma função $F(s)$, definida em um intervalo (a, ∞) , um problema que se coloca é o de achar uma função $f(t)$ tal que $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. Uma tal f é chamada **Transformada Inversa** de F e será indicada por $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

Os exemplos da Seção 4.2 fornecem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] &= 1 & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-c}\right] &= e^{ct} & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right] &= \frac{t^n}{n!} \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right] &= \cos \omega t & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right] &= \text{sen } \omega t. \end{aligned}$$

Usando esta tabela de transformada inversa e as Propriedades 1, 2 e 3, podemos calcular transformadas inversas de um grande número de funções.

EXEMPLO 4.7. Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - 4s + 5}\right]$.

SOLUÇÃO: Notando que $s^2 - 4s + 5 = (s - 2)^2 + 1$, e usando a Propriedade 2, podemos escrever

$$\frac{1}{s^2 - 4s + 5} = \frac{1}{(s - 2)^2 + 1} = \mathcal{L}[e^{2t} \text{sen } t].$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - 4s + 5}\right] = e^{2t} \text{sen } t. \quad \square$$

EXEMPLO 4.8. Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s - 5)^3}\right]$.

SOLUÇÃO: Notemos que $\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-5}\right) = \frac{2}{(s-5)^3}$, donde

$$\frac{1}{(s-5)^3} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-5}\right) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}[e^{5t}] = \frac{1}{2} \mathcal{L}[t^2 e^{5t}] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2} t^2 e^{5t}\right].$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-5)^3}\right] = \frac{1}{2} t^2 e^{5t}. \quad \square$$

EXEMPLO 4.9. Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2+2s+10}\right]$.

SOLUÇÃO: Podemos escrever $s^2+2s+10 = (s+1)^2+9$, donde

$$\frac{s+2}{s^2+2s+10} = \frac{s+1+1}{(s+1)^2+9} = \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + \frac{1}{3} \frac{3}{(s+1)^2+3^2}.$$

Agora, notemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}\right] = e^{-t} \cos 3t \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s+1)^2+3^2}\right] = e^{-t} \sin 3t.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2+2s+10}\right] = e^{-t} \cos 3t + \frac{1}{3} e^{-t} \sin 3t. \quad \square$$

Observe que este procedimento aplica-se a expressões do tipo

$$\frac{As+B}{s^2+ps+q} \tag{4.10}$$

em que o denominador não possui raízes reais.

Isto sugere que usemos o método das frações parciais para calcular $\mathcal{L}^{-1}[P(s)/Q(s)]$, em que P e Q são polinômios e o grau de P é menor que o grau de Q . Este método transforma um tal quociente em uma soma de frações da forma (4.10) e frações da forma $C/(s-a)$. Acreditamos que o leitor esteja suficientemente familiarizado com a decomposição em frações parciais, e vamos apenas exemplificar sua utilização no cálculo de \mathcal{L}^{-1} .

EXEMPLO 4.10. Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s^2 - 7s + 12}{(s-2)(s-3)(s+2)}\right]$.

SOLUÇÃO: Escrevemos $\frac{3s^2 - 7s + 12}{(s-2)(s-3)(s+2)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+2}$.
Eliminando denominadores, obtemos

$$A(s-3)(s+2) + B(s-2)(s+2) + C(s-2)(s-3) \equiv 3s^2 - 7s + 12.$$

Substituindo $s = 2$, obtemos $-4A = 10$ o que implica que $A = -5/2$.
Analogamente, obtemos $B = 18/5$ e $C = 19/10$. Temos então

$$\frac{3s^2 - 7s + 12}{(s-2)(s-3)(s+2)} = -\frac{5}{2} \frac{1}{s-2} + \frac{18}{5} \frac{1}{s-3} + \frac{19}{10} \frac{1}{s+2}.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s^2 - 7s + 12}{(s-2)(s-3)(s+2)}\right] = -\frac{5}{2} e^{2t} + \frac{18}{5} e^{3t} + \frac{19}{10} e^{-2t}. \quad \square$$

EXEMPLO 4.11. Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s^2 + 9s + 7}{(s-4)(s^2+9)}\right]$.

SOLUÇÃO: Escrevemos $\frac{2s^2 + 9s + 7}{(s-4)(s^2+9)} = \frac{A}{s-4} + \frac{Bs+C}{s^2+9}$. Eliminando denominadores, obtemos

$$A(s^2 + 9) + (Bs + C)(s - 4) \equiv 2s^2 + 9s + 7$$

ou $(A + B)s^2 + (C - 4B)s + (9A - 4C) \equiv 2s^2 + 9s + 7$. Igualando os termos de mesma potência, obtemos

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -4B + C = 9 \\ 9A - 4C = 7. \end{cases}$$

A solução deste sistema é: $A = 3$, $B = -1$ e $C = 5$. Portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s^2 + 9s + 7}{(s-4)(s^2+9)}\right] &= 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-4}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-5}{s^2+9}\right] \\ &= 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-4}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-9}\right] + \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+9}\right] \\ &= 3e^{4t} - \cos 3t + \frac{5}{3}\sin 3t. \quad \square \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 4.3. Calcular a transformada inversa das seguintes funções:

$$1) \frac{1}{s^2 + 4s + 13}, \quad 2) \frac{s}{s^2 - 6s + 10}, \quad 3) \frac{s + 5}{s^2 - 2s + 10}.$$

$$4) \frac{1}{(s-4)^2}, \quad 5) \frac{6s}{(s^2+9)^2}, \quad 6) \frac{s+1}{s^2+2s}.$$

$$7) \frac{6}{(s-1)^2(s^2+1)}, \quad 8) \frac{s^2+9s-9}{s^3-9s}, \quad 9) \frac{2s-4}{s^3+4s}.$$

4.5 APLICAÇÃO A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

A Transformada de Laplace é de grande importância na resolução de problemas de valor inicial para equações diferenciais lineares com coeficientes constantes.

Veja o seguinte exemplo:

EXEMPLO 4.12. Consideremos o P.V.I.

$$\begin{cases} \ddot{y} - \dot{y} - 6y = 10e^{2t} \\ y(0) = 3, \dot{y}(0) = 2. \end{cases} \quad (4.11)$$

Determine sua solução, utilizando Transformada de Laplace.

SOLUÇÃO: Chamando $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\dot{y}(t)] &= s\mathcal{L}[y(t)] - y(0) = sY - 3. \\ \mathcal{L}[\ddot{y}(t)] &= s\mathcal{L}[\dot{y}(t)] - \dot{y}(0) = s^2Y - 3s - 2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Aplicando a transformada a ambos os membros de (4.11) e substituindo as igualdades de (4.12), obtemos

$$(s^2 - s - 6)Y - 3s + 1 = \frac{10}{s - 2},$$

ou seja,

$$Y(s) = \frac{3s^2 - 7s + 12}{(s - 2)(s^2 - s - 6)}.$$

A solução $y(t)$ do P.V.I. é a transformada inversa de $Y(s)$, que já foi calculada no Exemplo 4.10, vale

$$y(t) = -\frac{5}{2} e^{2t} + \frac{18}{5} e^{3t} + \frac{19}{10} e^{-2t}. \quad \square$$

A transformada de Laplace também pode ser usada para obter a solução geral de uma equação diferencial. Para determinar a solução geral da equação

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = f(t),$$

basta considerar o P.V.I.

$$\begin{cases} \ddot{y} + a\dot{y} + by = f(t) \\ y(0) = c_1, \dot{y}(0) = c_2, \end{cases}$$

em que c_1 e c_2 designam constantes arbitrárias.

EXEMPLO 4.13. Obter a solução geral de $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 10 \operatorname{sen} t$.

SOLUÇÃO: Formamos o P.V.I.

$$\begin{cases} \ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 10 \operatorname{sen} t \\ y(0) = c_1, \dot{y}(0) = c_2. \end{cases}$$

Fazendo $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$, podemos escrever $\mathcal{L}[\dot{y}(t)] = sY - c_1$ e $\mathcal{L}[\ddot{y}(t)] = s^2 Y - c_1 s - c_2$. Aplicando a transformada a ambos os membros da equação obtemos

$$(s^2 - 3s + 2)Y - c_1 s - c_2 + 3c_1 = \frac{10}{s^2 + 1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{c_1 s + c_2 - 3c_1}{s^2 - 3s + 2} + \frac{10}{(s^2 + 1)(s^2 - 3s + 2)} \\
 &= \frac{c_2 - c_1}{s - 2} + \frac{2c_1 - c_2}{s - 1} - \frac{5}{s - 1} + \frac{2}{s - 2} + \frac{3s + 1}{s^2 + 1}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$y(t) = (c_2 - c_1)e^{2t} + (2c_1 - c_2)e^t - 5e^t + 2e^{2t} + 3 \cos t + \sin t,$$

que pode ser escrita sob a forma

$$y(t) = Ae^{2t} + Be^t + 3 \cos t + \sin t. \quad \square$$

EXERCÍCIOS 4.4. 1) Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \begin{cases} \ddot{y} + y = 0 \\ y(0) = 3, \dot{y}(0) = 1. \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} \ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = 4e^t \\ y(0) = 2, \dot{y}(0) = 4. \end{cases} \\
 \text{c) } \begin{cases} \ddot{y} + 9y = \cos 3t \\ y(0) = 2, \dot{y}(0) = -1. \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} \ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 3e^{-t} + 5 \\ y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0. \end{cases}
 \end{array}$$

2) Ache a solução geral das seguintes equações:

$$\text{a) } \ddot{y} - 2\dot{y} + y = \cos t. \qquad \text{b) } \ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 6e^{-t} \sin t.$$

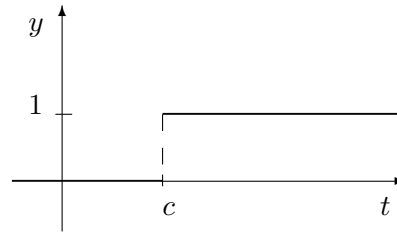
4.6 OUTRAS PROPRIEDADES

A função **degrau unitário** ou função de **Heaviside**, é definida por

$$\mu_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < c, \\ 1 & \text{se } t \geq c. \end{cases}$$

Seu gráfico é dado pela figura ao lado. A transformada de $\mu_c(t)$ é

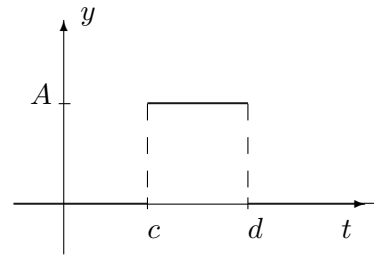
$$\mathcal{L}[\mu_c(t)] = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b e^{-st} dt = \frac{e^{-cs}}{s}.$$



A função $\mu_c(t)$ é útil para representar funções descontínuas e calcular suas transformadas.

EXEMPLO 4.14. Calcule $\mathcal{L}[g(t)]$, sendo

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < c, \\ A, & \text{se } c \leq t < d, \\ 0, & \text{se } t \geq d. \end{cases}$$



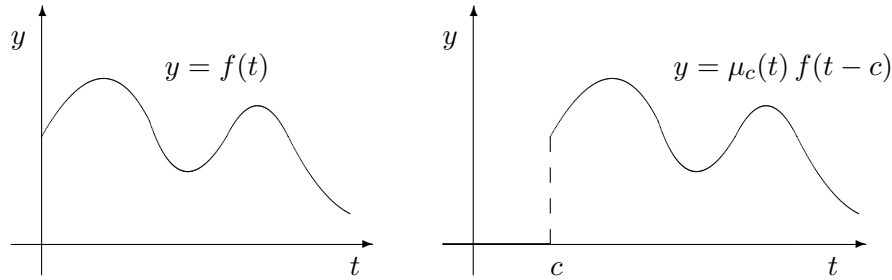
Podemos escrever $g(t) = A[\mu_c(t) - \mu_d(t)]$. Logo,

$$\mathcal{L}[g(t)] = A\{\mathcal{L}[\mu_c(t)] - \mathcal{L}[\mu_d(t)]\} = \frac{A}{s} (e^{-cs} - e^{-ds}). \quad \square$$

Dada uma função $f(t)$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$, e uma constante $c > 0$, consideremos a função $\mu_c(t) f(t - c)$. Desde que

$$\mu_c(t) f(t - c) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < c, \\ f(t - c) & \text{se } t \geq c, \end{cases}$$

o gráfico de $\mu_c(t) f(t - c)$ é obtido transladando-se de c unidades para a direita o gráfico de $f(t)$ (veja as figuras abaixo).



PROPRIEDADE 5: $\mathcal{L}[\mu_c(t) f(t - c)] = e^{-cs} \mathcal{L}[f(t)]$.

De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mu_c(t) f(t - c)] &= \int_c^\infty e^{-st} f(t - c) dt = \int_0^\infty e^{-s(\tau+c)} f(\tau) d\tau \\ &= e^{-sc} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = e^{-sc} \mathcal{L}[f(t)]. \quad \square \end{aligned}$$

EXEMPLO 4.15. Calcule $\mathcal{L}[f(t)]$, sendo $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 2, \\ (t - 2)^3, & \text{se } t \geq 2. \end{cases}$

SOLUÇÃO: Como $f(t) = \mu_2(t) (t - 2)^3$, temos que

$$\mathcal{L}[f(t)] = e^{-2s} \mathcal{L}[t^3] = \frac{6e^{-2s}}{s^4}. \quad \square$$

Usando esta propriedade, podemos resolver equações diferenciais que em certo sentido são “mais complicadas” do que as que foram consideradas anteriormente e que tem grande interesse em aplicações.

EXEMPLO 4.16. Resolva o P.V.I. $\begin{cases} \ddot{y} + 4y = f(t) \\ y(0) = \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$, em que

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < t < \pi, \\ 4 & \text{se } \pi \leq t < 3\pi, \\ 0 & \text{se } t \geq 3\pi. \end{cases}$$

SOLUÇÃO: Do Exemplo 4.14, temos que $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{4}{s} (e^{-\pi s} - e^{-3\pi s})$.

Aplicando transformada aos dois membros da equação, obtemos

$$(s^2 + 4)Y(s) = \frac{4e^{-\pi s}}{s} - \frac{4e^{-3\pi s}}{s}.$$

e portanto,

$$Y(s) = e^{-\pi s} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} \right) - e^{-3\pi s} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} \right).$$

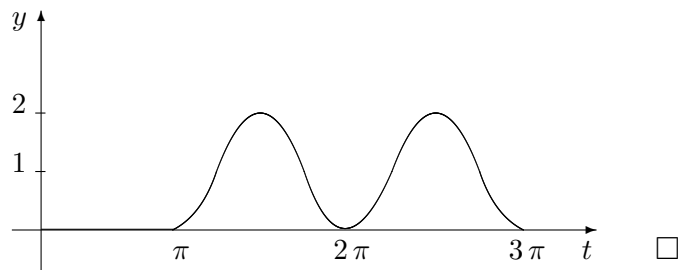
Logo,

$$y(t) = \mu_\pi(t) [1 - \cos 2(t - \pi)] - \mu_{3\pi}(t) [1 - \cos 2(t - 3\pi)]$$

ou seja

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \pi, \\ 1 - \cos 2(t - \pi) & \text{se } \pi \leq t < 3\pi, \\ 0 & \text{se } t \geq 3\pi. \end{cases}$$

O gráfico de $y(t)$ é



4.7 DELTA DE DIRAC

Em diversos ramos das aplicações, há a necessidade de se considerar funções que sejam nulas exceto em um intervalo “muito pequeno” e, neste intervalo, tenham um valor “muito grande”. Por exemplo,

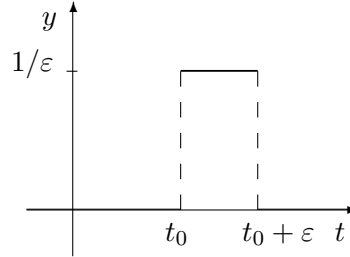
durante o intervalo de tempo $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ (ε pequeno) aplica-se a um objeto uma força muito grande de modo que o impulso causado por esta força seja um certo valor $I_0 > 0$. A função

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{se } t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon, \\ 0 & \text{nos outros pontos} \end{cases}$$

cujo gráfico é dado na figura ao lado tem estas características:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dt = 1,$$

e para $\varepsilon > 0$ pequeno f tem um valor muito grande ($1/\varepsilon$) num intervalo muito pequeno (de comprimento ε).



Em Física e Engenharia, costuma-se descrever tais fenômenos usando-se a “função limite” de $f_\varepsilon(t)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a qual é indicada por $\delta(t - t_0)$, e chamada **delta de Dirac**

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t).$$

É claro que δ não é uma função nos moldes tradicionais. Entretanto, é possível dar uma justificativa rigorosa para tais procedimentos.

4.7.1 TRANSFORMADA DE LAPLACE DE $\delta(t - t_0)$

Vamos definir

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}[f_\varepsilon(t)].$$

Como $f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}[\mu_{t_0}(t) - \mu_{t_0+\varepsilon}(t)]$, temos

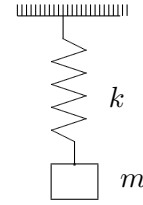
$$\mathcal{L}[f_\varepsilon(t)] = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{e^{-st_0}}{s} - \frac{e^{-s(t_0+\varepsilon)}}{s} \right) = \frac{e^{-st_0}}{s} \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon}.$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, temos que $\frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon} \rightarrow s$. Assim,

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = e^{-st_0}.$$

EXEMPLO 4.17. Consideremos o seguinte sistema massa-mola.

Na figura ao lado, a partícula tem massa $m = 2\text{kg}$, a constante de rigidez da mola é $k = 8\text{N/m}$. O sistema está inicialmente em repouso. No instante $t = \pi$ aplica-se à partícula uma força muito grande, de duração muito curta, que transmite à partícula um impulso de 4N.s . Descrever o movimento da partícula.



A posição $y(t)$ da partícula no instante t , satisfaz o P.V.I.

$$\begin{cases} 2\ddot{y} + 8y = 4\delta(t - \pi) \\ y(0) = \dot{y}(0) = 0. \end{cases}$$

Aplicando a transformada a ambos os membros da equação obtemos $(s^2 + 4)Y(s) = 2e^{-\pi s}$, ou seja,

$$Y(s) = e^{-\pi s} \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Portanto,

$$y(t) = \mu_\pi(t) \text{sen } 2(t - \pi) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \pi, \\ \text{sen } 2t & \text{se } t \geq \pi. \end{cases}$$

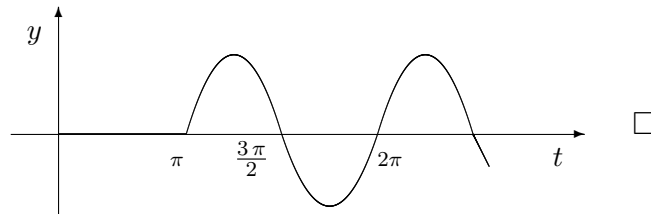


Gráfico da solução $y(t)$

EXERCÍCIOS 4.5. 1) Calcule a transformada de:

$$\text{a) } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \pi, \\ t - \pi & \text{se } \pi < t < 2\pi, \\ 0 & \text{se } t > 2\pi. \end{cases} \quad \text{b) } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < t < 1, \\ 3 & \text{se } 1 < t < 4 \\ 0 & \text{se } t > 4. \end{cases}$$

2) Calcule $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, sendo:

$$\text{a) } F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2}. \quad \text{b) } F(s) = \frac{e^{-s\pi/2}s}{s^2 + 1}.$$

3) Resolva

$$\text{a) } \begin{cases} \ddot{y} + 4y = \mu_2(t) - \mu_4(t), \\ y(0) = 3, \dot{y}(0) = -2. \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \ddot{y} + \dot{y} + 7y = t[\mu_1(t) - \mu_2(t)] \\ y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0. \end{cases}$$

4) Suponha que no exemplo anterior, $f(t) = 4\delta(t) + 6\delta(t-1)$ (isto é, a partícula recebe um impulso de 4N.s em $t = 0$ e um impulso de 6N.s em $t = 1$). Descrever o movimento. Faça um gráfico de $y(t)$.

4.8 O PRODUTO DE CONVOLUÇÃO

Sejam $f(t)$ e $g(t)$ definidas para $t \geq 0$. O **Produto de Convolução** de f por g , indicado por $f * g$, é a função definida por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (4.13)$$

Por exemplo, se $f(t) = \cos t$ e $g(t) = t$, então

$$(f * g)(t) = \int_0^t \cos \tau (t - \tau) d\tau = t \int_0^t \cos \tau d\tau - \int_0^t \tau \cos \tau d\tau = 1 - \cos t.$$

O produto de convolução possui algumas propriedades semelhantes

as do produto usual de funções, tais como:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f * g = g * f, & \text{b) } (f * g) * h = f * (g * h), \\ \text{c) } f * 0 = 0, & \text{d) } f * (g + h) = f * g + f * h. \end{array}$$

Entretanto, ele é diferente do produto usual. Por exemplo, é fácil ver que $(f * 1)(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ e esta função é diferente de f (exceto, obviamente, para $f = 0$).

A próxima propriedade nos mostra como a Transformada de Laplace atua em um produto de convolução.

PROPRIEDADE 6: Se $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ e $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, então

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = F(s)G(s), \quad (4.14)$$

ou, em termos de transformada inversa,

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = (f * g)(t). \quad \square \quad (4.15)$$

A igualdade (4.14) implica, em particular (para $g(t) \equiv 1$), que

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}. \quad (4.16)$$

A igualdade (4.15) fornece um meio de calcular transformadas inversas de certas funções. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + 1)s^2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = \text{sen } t * t \\ &= \int_0^t \text{sen } \tau(t - \tau) d\tau = t \int_0^t \text{sen } \tau d\tau - \int_0^t \tau \text{sen } \tau d\tau \\ &= t - \text{sen } t. \end{aligned}$$

A Propriedade 6 aplica-se diretamente à resolução de “equações integrais do tipo convolução” as quais tem a forma

$$y(t) = f(t) + \int_0^t y(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad (4.17)$$

onde f e g são funções conhecidas. O nome **equação integral** deve-se ao fato que a incógnita y aparece sob o sinal de integral. Embora não se trate propriamente de uma equação diferencial, julgamos oportuno apresentar um exemplo.

Consideremos a equação

$$y(t) = 3 \operatorname{sen} t + 2 \int_0^t y(\tau) \operatorname{sen}(t - \tau) d\tau. \quad (4.18)$$

Esta equação pode ser escrita sob a forma

$$y(t) = 3 \operatorname{sen} t + 2 (y * \operatorname{sen})(t).$$

Aplicando transformada a ambos os membros de (4.18), obtemos

$$Y(s) = \frac{3}{s^2 + 1} + 2Y(s) \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Portanto,

$$Y(s) = \frac{3}{s^2 - 1} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{s - 1} - \frac{1}{s + 1} \right).$$

Logo,

$$y(t) = \frac{3}{2} (e^t - e^{-t}) = 3 \operatorname{senh} t.$$

EXERCÍCIOS 4.6. 1) Usando convolução, calcule a transformada inversa das seguintes funções:

a) $\frac{1}{(s - 4)(s - 3)}.$

b) $\frac{s}{(s^2 + 1)(s - 3)}.$

c) $\frac{1}{s^2 - 2s + 1}.$

d) $\frac{1}{s^2(s - 5)}.$

2) Resolva as seguintes equações integrais:

a) $y(t) = 5t + \int_0^t y(\tau) \operatorname{sen}(t - \tau) d\tau.$

$$b) y(t) = 2 \operatorname{sen} 4t + 3 \int_0^t y(\tau) \operatorname{sen} 4(t - \tau) d\tau.$$

3) Usando Transformada de Laplace, mostre que a solução geral da equação $\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = f(t)$ é

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \operatorname{sen} \omega(t - \tau) d\tau.$$

4.9 TABELA DE ALGUMAS TRANSFORMADAS

As tabelas abaixo contém um resumo das propriedades e transformadas de algumas funções que aparecem com mais frequência.

Tabela 1 - Algumas Transformadas

| $f(t)$ | $F(s)$ | $f(t)$ | $F(s)$ |
|-------------------|---|---------------------------------|--|
| 1 | $1/s$ | e^{ct} | $\frac{1}{s-c}$ |
| t^n | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | $t^n e^{ct}$ | $\frac{n!}{(s-c)^{n+1}}$ |
| $\cosh ct$ | $\frac{s}{s^2 - c^2}$ | $\operatorname{senh} ct$ | $\frac{c}{s^2 - c^2}$ |
| $\cos \omega t$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ | $\operatorname{sen} \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ |
| $t \cos \omega t$ | $\frac{\omega^2 - s^2}{s^2 + \omega^2}$ | $t \operatorname{sen} \omega t$ | $\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$ |
| $\delta(t - t_0)$ | e^{-st_0} | | |

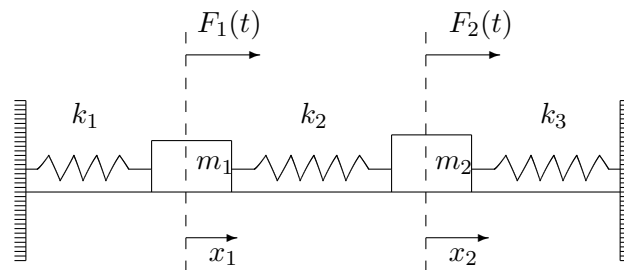
Tabela 2 - Algumas Propriedades

| | | | |
|------------------|----------------|--------------|---------------------------|
| $f(t)$ | $F(s)$ | $f(t)$ | $F(s)$ |
| $e^{ct}f(t)$ | $F(s-c)$ | $t^n f(t)$ | $(-1)^n F^{(n)}(s)$ |
| $\mu_c(t)f(t-c)$ | $e^{-cs}F(s)$ | $(f * g)(t)$ | $F(s)G(s)$ |
| $f'(t)$ | $sF(s) - f(0)$ | $f''(t)$ | $s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ |

Capítulo 5

Sistemas de Equações Diferenciais

Consideremos agora sistemas de equações diferenciais simultâneas em várias variáveis. Um exemplo de tais sistemas é dado pelo **sistema massa-mola** mostrado na figura abaixo. Os dois objetos de massas m_1 e m_2 movem-se numa superfície sem atrito, ligados por três molas cujas constantes de elasticidade são k_1 , k_2 e k_3 , respectivamente, e sob a influência de forças externas $F_1(t)$ e $F_2(t)$.



O movimento dos objetos é descrito pelo par de equações

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) + F_1(t), \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_3 x_2 - k_2 (x_2 - x_1) + F_2(t). \end{cases}$$

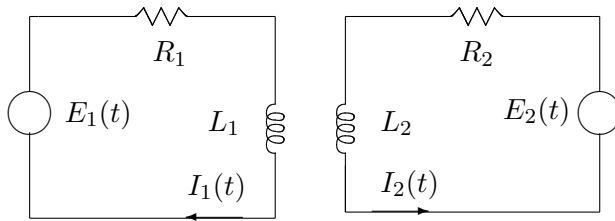
ou seja

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -(k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 + F_1(t), \\ m_2 \ddot{x}_2 = k_2 x_1 - (k_2 + k_3) x_2 + F_2(t). \end{cases}$$

Outro exemplo de sistema de equações diferenciais é encontrado com frequência no estudo de circuitos elétricos. Um transformador, por exemplo, envolve dois circuitos, sendo que um deles induz uma corrente no outro por indução magnética. O correspondente sistema de equações diferenciais para as correntes I_1 e I_2 nos circuitos da figura abaixo é:

$$\begin{cases} L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} + R_1 I_1 = E_1(t), \\ L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} + R_2 I_2 = E_2(t), \end{cases}$$

em que M é o coeficiente de indução mútua.



Sistemas de equações diferenciais também ocorrem em muitas outras aplicações como: mistura química de vários ingredientes, crescimento de duas ou mais populações interadas, vibrações de estruturas, etc.

5.1 Teoria Geral para Sistemas

Os sistemas de equações diferenciais de 1^a ordem podem, geralmente ser escritos sob a forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (5.1)$$

Uma **solução** do sistema de equações diferenciais (5.1) num intervalo J é constituída por n funções $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ que são diferenciáveis em J e que satisfazem o sistema (5.1) para todo $t \in J$.

EXEMPLO 5.1. O par de funções $x_1(t) = \sin t$ e $x_2(t) = \cos t$ é solução do sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1. \quad \square \end{cases}$$

O P.V.I. para um sistema de equações diferenciais de 1^a ordem é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0, \end{cases}$$

em que $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0 \in \mathbb{R}$.

Existe uma importante conexão entre sistemas de equações diferenciais e equações de uma certa ordem: a equação de ordem n

$$y^{(n)} = F(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$$

pode ser transformada num sistema de n equações de 1^ª ordem introduzindo as variáveis x_1, x_2, \dots, x_n do seguinte modo. Sejam

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}, \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)}.$$

Temos que

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

EXEMPLO 5.2. No sistema massa-mola, temos um sistema de duas equações diferenciais de 2^ª ordem e podemos transformá-lo num sistema de quatro equações diferenciais de 1^ª ordem. Definindo

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = \dot{x}_1, \quad z_3 = x_2 \text{ e } z_4 = \dot{x}_2.$$

Temos que

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ m_1 \dot{z}_2 = -(k_1 + k_2) z_1 + k_2 z_3 + F_1(t) \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ m_2 \dot{z}_4 = k_2 z_1 - (k_2 + k_3) z_3 + F_2(t). \quad \square \end{cases}$$

EXEMPLO 5.3. Escreva o P.V.I.

$$\begin{cases} y^{(4)} - y = 0 \\ y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = y^{(3)}(0) = 0 \end{cases}$$

na forma de um sistema de equações diferenciais.

SOLUÇÃO: Colocando $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$ e $x_4 = y^{(3)}$, temos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = x_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1(0) = y(0) = 0 \\ x_2(0) = \dot{y}(0) = 0 \\ x_3(0) = \ddot{y}(0) = 0 \\ x_4(0) = y^{(3)}(0) = 0. \quad \square \end{cases}$$

Se cada uma das funções F_1, \dots, F_n em (5.1) for linear em x_1, \dots, x_n , então dizemos que o sistema de equações é **linear**. O sistema mais geral de n equações lineares de 1^a ordem possui a forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t). \end{cases} \quad (5.2)$$

Se $g_j(t) \equiv 0$ para todo $1 \leq j \leq n$, então dizemos que o sistema (5.2) é **homogêneo**. Caso contrário, ele é **não homogêneo**.

Evidentemente a notação de (5.2) é bastante incômoda, então adotamos a seguinte notação matricial. Defina

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Temos que (5.2) pode ser expresso na forma compacta

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad [\text{L.N.H.}]$$

onde,

$$\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)^T.$$

OBSERVAÇÃO 5.1. $(a_1, \dots, a_n)^T$ denota um vetor coluna. \square

TEOREMA 5.1 (Existência e Unicidade de Soluções). *Suponha que as funções $a_{ij}(t)$ e $g_i(t)$, $1 \leq i, j \leq n$, sejam contínuas num intervalo J . Então dados $t_0 \in J$ e $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução $\mathbf{x}(t)$ de [L.N.H.], definida em J , tal que $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.*

OBSERVAÇÃO 5.2. Este teorema é uma conseqüência (da forma vetorial) do Teorema 1.1, pois temos que $f(t, \mathbf{x}) = A(t)\mathbf{x} + g(t)$ e $Jf = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = A(t)$ são contínuas em J . \square

TEOREMA 5.2. Se $\mathbf{x}^1(t) = (x_1^1(t) \dots x_n^1(t))$ e $\mathbf{x}^2(t) = (x_1^2(t) \dots x_n^2(t))$ são soluções do sistema homogêneo

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} \quad [\text{L.H.}]$$

então qualquer combinação linear $c_1 \mathbf{x}^1(t) + c_2 \mathbf{x}^2(t)$, em que c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, também é solução de [L.H.]. Ou seja, o conjunto S de todas as soluções de [L.H.] é um espaço vetorial.

A demonstração deste teorema será deixada como exercício.

TEOREMA 5.3 (Teste para Independência Linear). Sejam $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^k(t)$ soluções de [L.H.] e seja $t_0 \in J$. Então $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^k(t)$ são soluções linearmente independentes se, e somente se, os vetores $\mathbf{x}^1(t_0), \dots, \mathbf{x}^k(t_0)$ são linearmente independentes em \mathbb{R}^n .

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^k(t)$ sejam linearmente dependentes. Então, existem constantes c_1, \dots, c_k não todas nulas, tais que

$$c_1 \mathbf{x}^1(t) + \dots + c_k \mathbf{x}^k(t) = 0, \text{ para todo } t \in J.$$

Logo,

$$c_1 \mathbf{x}^1(t_0) + \dots + c_k \mathbf{x}^k(t_0) = 0$$

com constantes c_1, \dots, c_k não todas nulas. Portanto, $\mathbf{x}^1(t_0), \dots, \mathbf{x}^k(t_0)$ são linearmente dependentes em \mathbb{R}^n .

Reciprocamente, suponhamos que $\mathbf{x}^1(t_0), \dots, \mathbf{x}^k(t_0)$ sejam linearmente dependentes em \mathbb{R}^n . Então, existem constantes c_1, \dots, c_k não todas nulas, tais que

$$c_1 \mathbf{x}^1(t_0) + \dots + c_k \mathbf{x}^k(t_0) = 0.$$

Temos que a função

$$\varphi(t) = c_1 \mathbf{x}^1(t) + \dots + c_k \mathbf{x}^k(t),$$

em que c_1, \dots, c_k são as constantes dadas acima, satisfaz [L.H.] pois é uma combinação linear de soluções. Além disso, $\varphi(t_0) = 0$. Portanto, pelo Teorema 5.1, $\varphi(t) = 0$ para todo t . Logo, $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^k(t)$ são soluções linearmente dependentes. ■

TEOREMA 5.4. *A dimensão do espaço S de todas as soluções de [L.H.] é n .*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos mostrar que [L.H.] possui n soluções linearmente independentes. Para isto, consideremos os vetores do \mathbb{R}^n : $\mathbf{e}^1 = (1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0)^T$, $\mathbf{e}^2 = (0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$, \dots , $\mathbf{e}^n = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)^T$ e os P.V.I.'s

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A(t) \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^i(t_0) = \mathbf{e}^i, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad t_0 \in J. \end{cases}$$

Pelo Teorema 5.1, temos que cada P.V.I. possui uma única solução $\mathbf{x}^i(t)$. Como os vetores $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n$ são linearmente independentes em \mathbb{R}^n . Logo, segue do Teorema 5.3, que $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ são soluções linearmente independentes de [L.H.].

Resta mostrar que qualquer solução de [L.H.] pode ser escrita como combinação linear de $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$. Seja $\mathbf{x}(t)$ uma solução de [L.H.] tal que $\mathbf{x}(t_0) = (c_1 \ \dots \ c_n)^T$. Com estas constantes c_1, \dots, c_n , construímos a função

$$\varphi(t) = c_1 \mathbf{x}^1(t) + \dots + c_n \mathbf{x}^n(t).$$

Temos que $\varphi(t)$ satisfaz [L.H.] pois, é combinação linear de soluções e além disso

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) &= c_1 \mathbf{x}^1(t_0) + \dots + c_n \mathbf{x}^n(t_0) = c_1 \mathbf{e}^1 + c_2 \mathbf{e}^2 + \dots + c_n \mathbf{e}^n = \\ &= (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)^T = \mathbf{x}(t_0). \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 5.1, $\varphi(t) \equiv \mathbf{x}(t)$. Portanto,

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}^1(t) + \dots + c_n \mathbf{x}^n(t). \quad \blacksquare$$

OBSERVAÇÃO 5.3. O Teorema 5.4 diz que se conhecermos n soluções linearmente independentes $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ de [L.H.], então toda solução de [L.H.] será da forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}^1(t) + \dots + c_n \mathbf{x}^n(t).$$

Por esta razão, esta expressão é chamada **solução geral** de [L.H.]. \square

EXEMPLO 5.4. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

em que $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2)^T$. Note que o sistema procede da equação de 2ª ordem

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0,$$

colocando $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$. Como $y_1(t) = e^{-t}$ e $y_2(t) = te^{-t}$ são duas soluções desta equação, temos que

$$\mathbf{x}^1(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}^2(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ (1-t)e^{-t} \end{pmatrix}$$

são duas soluções deste sistema. Como $\mathbf{x}^1(0) = (1 \ -1)^T$ e $\mathbf{x}^2(0) = (0 \ 1)^T$ são vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^2 , pelo Teorema 5.3, temos que $\mathbf{x}^1(t)$ e $\mathbf{x}^2(t)$ são soluções linearmente independentes e pelo Teorema 5.4, toda solução deste sistema pode ser escrita sob a forma

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} te^{-t} \\ (1-t)e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 + t)e^{-t} \\ (c_2 - c_1 - c_2 t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

EXERCÍCIO: Resolva o P.V.I.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

DEFINIÇÃO 5.1. Dizemos que uma matriz $n \times n$ $X(t)$ é **matriz solução** do sistema $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$, se cada coluna de $X(t)$ é solução do sistema.

EXEMPLO 5.5. $X(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$ é uma matriz solução de $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ pois,

$$\mathbf{x}^1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

são soluções de

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

(Verifique). \square

DEFINIÇÃO 5.2. Dizemos que uma matriz $n \times n$ $X(t)$ é **matriz fundamental** (M.F.) para o sistema $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ se $X(t)$ é uma matriz solução e $\det X(t) \neq 0$ para todo t no intervalo de existência. Ou seja, suas colunas são soluções linearmente independentes de $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$.

EXEMPLO 5.6. $X(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$ é uma M.F. de $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ pois, como vimos acima, ela é matriz solução e além disso $\det X(t) = e^{3t} \neq 0$ para todo t . \square

LEMA 5.1. Se $X(t)$ é uma M.F. de [L.H.], então a solução geral de [L.H.] será dada por $X(t)\mathbf{c}$, em que $\mathbf{c} = (c_1 \cdots c_n)^T$.

DEMONSTRAÇÃO. Primeiramente, mostremos que $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}$ é solução de [L.H.]. De fato,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{X}(t)\mathbf{c} = [A(t)X(t)]\mathbf{c} = A(t)[X(t)\mathbf{c}] = A(t)\mathbf{x}(t).$$

Mostremos, agora, que toda solução é deste tipo. Seja $\mathbf{x}(t)$ solução de [L.H.] tal que $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Como a função $\mathbf{z}(t) = X(t)[X^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0]$

é solução de [L.H.] e satisfaz $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{x}_0$, pela unicidade de soluções, temos que $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t)$. Logo,

$$\mathbf{x}(t) = X(t) \mathbf{c}, \quad \text{em que } \mathbf{c} = X^{-1}(t_0) \mathbf{x}_0. \quad \blacksquare$$

OBSERVAÇÃO 5.4. Se $X(t)$ é *M.F.* de [L.H], isto é, suas colunas são soluções linearmente independentes de [L.H], o lema acima afirma que suas colunas formam uma base para o espaço das soluções. \square

TEOREMA 5.5 (Fórmula de Jacobi-Liouville). *Se $X(t)$ é uma matriz solução de [L.H.] em algum intervalo J e se $t_0 \in J$, então*

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds\right),$$

onde $\operatorname{tr} A(s) =$ soma dos elementos da diagonal principal de $A(s)$.

DEMONSTRAÇÃO. Basta notar que $\det X(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\dot{z} = \operatorname{tr} A(t) z. \quad \blacksquare$$

OBSERVAÇÃO 5.5. O Teorema 5.5 afirma que se $X(t)$ é matriz solução de [L.H.] então, ou $\det X(t) \neq 0$ para todo $t \in J$ ou $\det X(t) = 0$ para todo $t \in J$.

O próximo teorema nos dá um critério para decidir se uma matriz solução de [L.H.] é uma *M.F.*.

TEOREMA 5.6. *Seja $X(t)$ uma matriz solução de [L.H.] em J . $X(t)$ é *M.F.* se, e somente se, $\det X(t_0) \neq 0$ para algum $t_0 \in J$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que $X(t)$ seja *M.F.*, então as colunas de $X(t)$ são soluções linearmente independentes e, portanto, $\det X(t) \neq 0$ para todo $t \in J$. Em particular, $\det X(t_0) \neq 0$ para algum $t_0 \in J$.

Reciprocamente, se $\det X(t_0) \neq 0$ para algum $t_0 \in J$, pela Fórmula de Jacobi-Liouville, temos que $\det X(t) \neq 0$ para todo $t \in J$. Portanto, $X(t)$ é *M.F.*. \blacksquare

EXEMPLO 5.7. Verifique se

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & \frac{1}{2} e^{-t} & e^t \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & -\frac{7}{2} e^{-t} & -e^t \end{pmatrix}$$

é uma *M.F.* para o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

SOLUÇÃO: Facilmente verifica-se que as colunas de $X(t)$ são soluções do sistema. Escolhendo, por simplicidade, $t_0 = 0$, temos

$$\det X(0) = \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{7}{2} & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Logo, pelo Teorema 5.4, $X(t)$ é *M.F.*. \square

EXERCÍCIOS 5.1. 1) Mostre que $X(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz fundamental para o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2/t^2 & 2/t \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

em qualquer intervalo J não incluindo a origem.

2) Verifique se é possível determinar uma matriz $A(t)$ contínua para $t \geq 0$, de modo que $X(t)$ seja matriz fundamental do sistema $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$, com

$$\text{a) } X(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ t & t \end{pmatrix}. \quad \text{b) } X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Em caso afirmativo construa $A(t)$. Caso contrário, justifique sua resposta.

3) Dada a equação diferencial $t^3 y^{(3)} - 3t^2 \ddot{y} + 6t \dot{y} - 6y = 0$, reduza-a num sistema de equações diferenciais de 1^ª ordem escrevendo-a na forma $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ e em seguida ache uma matriz fundamental de soluções para o sistema encontrado.

Sugestão: Determine por tentativa três soluções linearmente independentes da equação dada.

4) Considere os vetores $\mathbf{x}^1(t) = (t \ 1)^T$ e $\mathbf{x}^2(t) = (t^2 \ 2t)^T$.

a) Em que intervalo \mathbf{x}^1 e \mathbf{x}^2 são linearmente independentes?

b) Que conclusão se pode tirar sobre os coeficientes no sistema de equações diferenciais homogêneas satisfeitas por \mathbf{x}^1 e \mathbf{x}^2 ?

c) Ache este sistema de equações e verifique as condições da parte a).

5) Considere os vetores $\mathbf{x}^1(t) = (t^2 \ 2t)^T$ e $\mathbf{x}^2(t) = (e^t \ e^t)^T$, e responda as mesmas perguntas do Problema 4.

5.2 SISTEMAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Vamos construir a solução geral do sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (5.3)$$

onde $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ é uma matriz constante.

A nossa experiência com as equações de 2^ª ordem sugere que procuremos soluções da forma

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad (5.4)$$

em que o número λ e o vetor constante $\mathbf{v} = (v_1 \cdots v_n)^T \neq (0 \cdots 0)^T$

devem ser determinados. Substituindo (5.4) no sistema (5.3), obtemos

$$\lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = A e^{\lambda t} \mathbf{v}$$

ou equivalentemente

$$A \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}. \quad (5.5)$$

Logo, (5.4) é uma solução de (5.3) se, e somente se, λ é um autovalor de A e \mathbf{v} é um autovetor associado a λ . A equação (5.5) é equivalente a

$$(A - \lambda I) \mathbf{v} = 0, \quad (5.6)$$

onde I é a matriz identidade. Para que a equação (5.6) tenha solução $\mathbf{v} \neq 0$, a matriz $A - \lambda I$ não pode ser invertível. Logo, devemos ter

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (5.7)$$

Observamos que a expressão $\det(A - \lambda I)$ é um polinômio de grau n em λ , chamado **polinômio característico** de A . Assim, a equação $\det(A - \lambda I) = 0$, possui n raízes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ que podem ser reais ou complexas e algumas podem ter multiplicidade maior do que um.

OBSERVAÇÃO 5.6. Se \mathbf{v} for um autovetor de A com autovalor λ , então $\mathbf{u} = c \mathbf{v}$, em que $c \neq 0$ é uma constante qualquer, também será um autovetor de A com o mesmo autovalor. \square

OBSERVAÇÃO 5.7. Se a matriz A for triangular, então os autovalores serão os elementos da diagonal principal. \square

Temos três casos a considerar:

1º caso: Todos os autovalores são **reais e distintos**.

Sejam $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$ os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, respectivamente. Como $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são distintos, segue da Álgebra Linear, que $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$ são linearmente independentes. Logo, as funções

$$\mathbf{x}^1(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{x}^n(t) = e^{\lambda_n t} \mathbf{v}^n$$

são n soluções linearmente independentes de (5.3) pois, para $t = 0$, temos que os vetores

$$\mathbf{x}^1(0) = \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{x}^n(0) = \mathbf{v}^n$$

são linearmente independentes. Portanto, $\mathbf{x}^1(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{x}^n(t) = e^{\lambda_n t} \mathbf{v}^n$ formam uma base para o espaço das soluções.

EXEMPLO 5.8. Determine a solução de P.V.I

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUÇÃO : O polinômio característico da matriz dos coeficientes A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 12 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 36 = \lambda^2 - 2\lambda - 35.$$

Portanto, os autovalores de A são: $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = -5$.

i) $\lambda_1 = 7$: Procuramos um vetor $\mathbf{v} \neq 0$ tal que

$$(A - 7I) \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -6a + 12b = 0 \\ 3a - 6b = 0 \end{cases} \implies a = 2b.$$

Logo, um autovetor é $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x}^1(t) = e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ é uma solução.

ii) $\lambda_2 = -5$: Procuramos um vetor $\mathbf{v} \neq 0$ tal que

$$(A + 5I) \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 6a + 12b = 0 \\ 3a + 6b = 0 \end{cases} \implies a = -2b.$$

Logo, um autovetor é $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e uma segunda solução é $\mathbf{x}^2(t) = e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, temos que $\mathbf{x}^1(t)$ e $\mathbf{x}^2(t)$ são soluções linearmente independentes. Então a solução geral é

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}^1(t) + c_2 \mathbf{x}^2(t) = \begin{pmatrix} 2c_1 e^{7t} - 2c_2 e^{-5t} \\ c_1 e^{7t} + c_2 e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

Como

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2c_1 - 2c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2c_1 - 2c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{2},$$

temos que a solução do P.V.I. é

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{7t} - e^{-5t} \\ (e^{7t} + e^{-5t})/2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

2º caso: Autovalores Complexos.

Se $\lambda = \alpha + i\beta$, com $\beta \neq 0$, é um autovalor de A e $\mathbf{v} = \mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2$, com $\mathbf{v}^2 \neq 0$, é um correspondente autovetor, então a função $\mathbf{z}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$ é uma solução com valores complexos do sistema (5.3). Esta solução com valores complexos dá origem a duas soluções com valores reais, como mostra o seguinte:

LEMA 5.2. *Se $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + i\mathbf{y}(t)$ é uma solução com valores complexos de (5.3), então tanto $\mathbf{x}(t)$ como $\mathbf{y}(t)$ são soluções reais de (5.3).*

DEMONSTRAÇÃO. Temos que

$$\dot{\mathbf{x}}(t) + i\dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{\mathbf{z}}(t) = A\mathbf{z}(t) = A[\mathbf{x}(t) + i\mathbf{y}(t)] = A\mathbf{x}(t) + iA\mathbf{y}(t).$$

Igualando as partes real e imaginária, obtemos

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = A\mathbf{y}(t).$$

Logo, tanto $\mathbf{x}(t) = \Re[\mathbf{z}(t)]$ como $\mathbf{y}(t) = \Im[\mathbf{z}(t)]$ são soluções reais de (5.3). ■

Escrevendo a solução $\mathbf{z}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$, em que $\lambda = \alpha + i\beta$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2$, na forma

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(t) &= e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)(\mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2) \\ &= e^{\alpha t}[\mathbf{v}^1 \cos \beta t - \mathbf{v}^2 \operatorname{sen} \beta t + i(\mathbf{v}^1 \operatorname{sen} \beta t + \mathbf{v}^2 \cos \beta t)]\end{aligned}$$

pelo Lema 5.2 temos que

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{v}^1 \cos \beta t - \mathbf{v}^2 \operatorname{sen} \beta t)$$

e

$$\mathbf{y}(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{v}^1 \operatorname{sen} \beta t + \mathbf{v}^2 \cos \beta t)$$

são duas soluções reais de (5.3). Além disso, estas soluções são linearmente independentes. (Prove isto).

EXEMPLO 5.9. Determine uma base de soluções reais para o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

SOLUÇÃO : O polinômio característico da matriz dos coeficientes A é $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$. Portanto, os autovalores de A são: $\lambda_1 = -1 + i$ e $\lambda_2 = -1 - i$. Procuremos um vetor $\mathbf{v} \neq 0$ tal que $(A - \lambda_1 I) \mathbf{v} = 0$. Ou seja

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} (2-i)a - b = 0 \\ 5a - (2+i)b = 0 \end{cases} \implies b = (2-i)a.$$

Logo, um autovetor associado a $\lambda_1 = -1 + i$ é $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$ e a função

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(t) &= e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} = e^{-t}(\cos t + i \operatorname{sen} t) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t \\ e^{-t} [2 \cos t + \operatorname{sen} t] \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-t} \operatorname{sen} t \\ e^{-t} [2 \operatorname{sen} t - \cos t] \end{pmatrix}\end{aligned}$$

é uma solução com valores complexos. Conseqüentemente

$$\mathbf{x}(t) = \Re[\mathbf{z}(t)] = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t \\ e^{-t} [2 \cos t + \operatorname{sen} t] \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{y}(t) = \Im[\mathbf{z}(t)] = \begin{pmatrix} e^{-t} \operatorname{sen} t \\ e^{-t} [2 \operatorname{sen} t - \cos t] \end{pmatrix}$$

são duas soluções reais linearmente independentes e, portanto, $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ formam uma base de soluções reais. \square

3º caso: Autovalores Repetidos.

Se λ é um autovalor de multiplicidade $k > 1$, temos duas possibilidades:

- (i) existem k autovetores linearmente independentes associados a λ ;
- (ii) existem menos de k autovetores linearmente independentes associados a λ .

No caso (i) tudo se passa como quando os autovalores são distintos. Se $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$ forem autovetores linearmente independentes associados a λ , então $e^{\lambda t} \mathbf{v}^1, \dots, e^{\lambda t} \mathbf{v}^k$ serão k soluções linearmente independentes.

EXEMPLO 5.10. Determine uma base de soluções para o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

SOLUÇÃO: O polinômio característico da matriz dos coeficientes A é $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 = 0$. Portanto, os autovalores de A são: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 8$.

(a) $\lambda = -1$: Procuramos todos os vetores $\mathbf{v} \neq 0$ que satisfazem $(A + I)\mathbf{v} = 0$. Ou seja,

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 4a + 2b + 4c = 0 \\ 2a + b + 2c = 0 \\ 4a + 2b + 4c = 0 \end{cases} \implies b = -2a - 2c.$$

Fazendo $a = 1$ e $c = 0$, obtemos $\mathbf{v}^1 = (1 \ -2 \ 0)^T$. Fazendo $a = 0$ e $c = 1$, obtemos $\mathbf{v}^2 = (0 \ -2 \ 1)^T$ que são dois autovetores linearmente independentes associados a $\lambda = -1$. Portanto, o autovalor $\lambda = -1$ dá origem a duas soluções linearmente independentes

$$\mathbf{x}^1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}^2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $\lambda = 8$: Procuramos um vetor $\mathbf{v} \neq 0$ tal que $(A - 8I)\mathbf{v} = 0$. Ou seja,

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -5a + 2b + 4c = 0 \\ 2a - 8b + 2c = 0 \\ 4a + 2b - 5c = 0 \end{cases} \implies a = c = 2b.$$

Logo, um autovetor é $\mathbf{v}^3 = (2 \ 1 \ 2)^T$ e, portanto,

$$\mathbf{x}^3(t) = e^{8t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

é uma terceira solução linearmente independente. \square

No caso (ii) não é possível encontrar k autovetores linearmente independentes associados a λ , o que significa que existem soluções de (5.3) que não podem ser expressas usando-se apenas funções exponenciais e vetores constantes. Por analogia ao feito para equações de 2^a ordem, é natural procurar solução envolvendo produtos de polinômios e exponenciais. Ilustraremos este procedimento através do

EXEMPLO 5.11. Resolva o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

SOLUÇÃO: O polinômio característico é $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ e, portanto $\lambda = 2$ é autovalor de A com multiplicidade 2. Procuremos todos os vetores $\mathbf{v} \neq 0$ tais que $(A - 2I)\mathbf{v} = 0$. Ou seja,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -a - b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \implies b = -a.$$

Portanto, todo autovetor é da forma $\mathbf{v} = a(1 \ -1)^T$. Logo, uma solução é

$$\mathbf{x}^1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e não existe uma segunda solução de forma $e^{2t} \mathbf{v}$ que seja linearmente independente com $\mathbf{x}^1(t)$. É natural tentarmos $\mathbf{x}^2(t) = t e^{2t} \mathbf{v}$. Substituindo no sistema obtemos:

$$2t e^{2t} \mathbf{v} + e^{2t} \mathbf{v} = A(t e^{2t} \mathbf{v}) \quad (5.8)$$

ou

$$e^{2t}[2t\mathbf{v} + \mathbf{v}] = t e^{2t} A \mathbf{v} \implies 2t\mathbf{v} + \mathbf{v} - t A \mathbf{v} = 0, \text{ para todo } t \iff \mathbf{v} = 0$$

o que não nos interessa.

Como em (5.8) aparecem termos em $t e^{2t}$ e e^{2t} , temos que a solução, além do termo $t e^{2t} \mathbf{v}$, precisa conter um termo $e^{2t} \mathbf{w}$. Tentemos então

$$\mathbf{x}^2(t) = t e^{2t} \mathbf{v} + e^{2t} \mathbf{w},$$

em que \mathbf{v} e \mathbf{w} são vetores constantes. Substituindo no sistema, obtemos

$$2t e^{2t} \mathbf{v} + e^{2t} (\mathbf{v} + 2\mathbf{w}) = A(t e^{2t} \mathbf{v} + e^{2t} \mathbf{w})$$

ou

$$2t\mathbf{v} + \mathbf{v} + 2\mathbf{w} = tA\mathbf{v} + A\mathbf{w}.$$

Igualando termos em t e termos constantes, temos que \mathbf{v} e \mathbf{w} devem satisfazer

$$\begin{cases} A\mathbf{v} = 2\mathbf{v} \\ A\mathbf{w} = \mathbf{v} + 2\mathbf{w} \end{cases} \implies \begin{cases} (A - 2I)\mathbf{v} = 0 \\ (A - 2I)\mathbf{w} = \mathbf{v}. \end{cases}$$

A primeira destas equações está satisfeita se \mathbf{v} for um autovetor de A associado a $\lambda = 2$, ou seja, $\mathbf{v} = (1 \ -1)^T$. Substituindo na segunda, obtemos

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -w_1 - w_2 = 1 \\ w_1 + w_2 = -1 \end{cases} \implies w_2 = -1 - w_1.$$

Fazendo $w_1 = 0$, temos que $\mathbf{w} = (0 \ -1)^T$ satisfaz a segunda equação, e portanto,

$$\mathbf{x}^2(t) = t e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t e^{2t} \\ -e^{2t}(t+1) \end{pmatrix}$$

é uma segunda solução linearmente independente com $\mathbf{x}^1(t)$. (Prove este fato). \square

Apresentemos agora um **procedimento geral** para resolver o caso (ii).

Suponhamos que A tenha $k < n$ autovetores linearmente independentes. Então teremos apenas k soluções linearmente independentes da forma $e^{\lambda t} \mathbf{v}$. Para obter as $n - k$ soluções, que juntamente com estas formem uma base para o espaço das soluções, devemos proceder do seguinte modo:

1) Para cada autovalor λ de A , com multiplicidade maior do que 1, procuramos soluções do tipo $\mathbf{x}(t) = t e^{\lambda t} \mathbf{v} + e^{\lambda t} \mathbf{w}$, em que

$$\begin{cases} (A - \lambda I)\mathbf{v} = 0 \\ (A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}. \end{cases}$$

2) Se ainda não tivermos as n soluções linearmente independentes, devemos procurar solução do tipo $\mathbf{x}(t) = \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} \mathbf{v} + t e^{\lambda t} \mathbf{w} + e^{\lambda t} \mathbf{u}$, em que

$$\begin{cases} (A - \lambda I) \mathbf{v} = 0 \\ (A - \lambda I) \mathbf{w} = \mathbf{v} \\ (A - \lambda I) \mathbf{u} = \mathbf{w}. \end{cases}$$

3) Prosseguimos deste modo até obter as n soluções linearmente independentes.

EXEMPLO 5.12. Encontrar uma base para o espaço das soluções de

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

SOLUÇÃO: O polinômio característico é $p(\lambda) = (2 - \lambda)^3$ e, portanto, $\lambda = 2$ é autovalor de multiplicidade 3. Procuremos todos os vetores $\mathbf{v} \neq 0$ tais que $(A - 2I)\mathbf{v} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b + 3c = 0 \\ -c = 0. \end{cases}$$

Logo, $b = c = 0$ e a é arbitrário. Conseqüentemente, todo autovetor é da forma $\mathbf{v} = a(1 \ 0 \ 0)^T$ e, portanto,

$$\mathbf{x}^1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

é uma solução do sistema.

Como A possui apenas um autovetor linearmente independente associado a $\lambda = 2$, devemos procurar outra solução da forma $\mathbf{x}^2(t) =$

$t e^{2t} \mathbf{v} + e^{2t} \mathbf{w}$, em que \mathbf{v} é autovetor associado a $\lambda = 2$ e \mathbf{w} é tal que $(A - 2I) \mathbf{w} = \mathbf{v}$. Assim

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} w_2 + 3w_3 = 1 \\ -w_3 = 0. \end{cases}$$

Logo, $w_2 = 1$, $w_3 = 0$ e w_1 é arbitrário. Portanto,

$$\mathbf{x}^2(t) = t e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

é uma segunda solução do sistema.

A terceira e última solução será da forma $\mathbf{x}^3(t) = \frac{t^2}{2} e^{2t} \mathbf{v} + t e^{2t} \mathbf{w} + e^{2t} \mathbf{u}$, em que \mathbf{v} é autovetor associado a $\lambda = 2$, \mathbf{w} foi determinado acima e \mathbf{u} é tal que $(A - 2I) \mathbf{u} = \mathbf{w}$. Ou seja,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} u_2 + 3u_3 = 0 \\ -u_3 = 1. \end{cases}$$

Logo, $u_2 = 3$, $u_3 = -1$ e u_1 é arbitrário. Portanto,

$$\mathbf{x}^3(t) = \frac{t^2}{2} e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 e^{2t}/2 \\ (t+3) e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$$

é a terceira solução do sistema.

Mostre que estas 3 soluções são linearmente independentes. \square

EXERCÍCIOS 5.2. 1) a) Transforme a equação $y^{(3)} - 3\ddot{y} - 6\dot{y} - 2y = 0$, num sistema de equações diferenciais de 1^ª ordem.

b) Calcule uma matriz fundamental para o sistema.

c) Dê a solução geral do sistema.

d) Dê a solução geral da equação dada.

2) Determine uma base de soluções, uma matriz fundamental e a solução geral dos sistemas abaixo:

$$\text{a) } \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad \text{b) } \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

$$\text{c) } \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad \text{d) } \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

$$\text{e) } \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad \text{f) } \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

$$\text{g) } \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad \text{h) } \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

3) Resolva os P.V.I.:

a) $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, em que A é dada no exercício 2-h) e $\mathbf{x}(0) = (1 \ 2 \ -1 \ 1)^T$.

b) $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, em que A é dada no exercício 2-g) e $\mathbf{x}(0) = (1 \ 1 \ 2)^T$.

$$\text{c) } \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \text{ com } \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4) Três soluções de $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ são

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t + e^t \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} e^t + e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \varphi_3(t) = \begin{pmatrix} e^t - e^{3t} \\ -e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Determine os autovalores e os autovetores da matriz A .

5) Determine se $X(t)$ é uma matriz fundamental de $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, para alguma matriz constante A . Em caso afirmativo determine A , em que

$$\text{a) } X(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 & t+1 & t^2+1 \\ 1 & 2(t+1) & 4t^2 \\ 1 & t+2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{b) } X(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 2e^{-t} & e^{3t} \\ 2e^t & 2e^{-t} & e^{3t} \\ 3e^t & e^{-t} & 2e^{3t} \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } X(t) = \begin{bmatrix} -5 \cos 2t & -5 \sin 2t & 3e^{2t} \\ -2(\cos 2t + \sin 2t) & 2(\cos 2t - \sin 2t) & 0 \\ \cos 2t & \sin 2t & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

6) Suponha que $Y(t) = X(t)C$, em que $X(t)$ e $Y(t)$ são matrizes fundamentais de $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ e C é uma matriz constante. Prove que $\det C \neq 0$.

7) Seja $X(t)$ uma matriz fundamental de $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ e C uma matriz constante com $\det C \neq 0$. Mostre que $Y(t) = X(t)C$ também é uma matriz fundamental de $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$.

5.3 SISTEMAS LINEARES NÃO HOMOGÊNEOS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos o sistema linear não homogêneo

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad [\text{L.N.H.}]$$

em que A é uma matriz $n \times n$ constante e $\mathbf{g}(t)$, $n \times 1$, é contínua num intervalo J .

O nosso objetivo é procurar uma solução para [L.N.H.].

TEOREMA 5.7. *Sejam $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ duas soluções quaisquer de $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$. Então a sua diferença $\varphi(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)$ é solução de $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$.*

A demonstração será deixada como exercício.

TEOREMA 5.8. *Seja $X(t) = (\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t))$ uma M.F. de $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Seja $\mathbf{x}_p(t)$ uma solução particular de [L.N.H.]. Então*

$$\mathbf{x}(t) = X(t) \mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t)$$

é a solução geral de [L.N.H.], em que $\mathbf{x} = (c_1 \cdots c_n)^T$.

DEMONSTRAÇÃO. Primeiramente, mostraremos que $\mathbf{x}(t) = X(t) \mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t)$ é solução de [L.N.H.]. De fato

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{X}(t) \mathbf{c} + \dot{\mathbf{x}}_p(t) = A X(t) \mathbf{c} + A \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{g}(t) \\ &= A [X(t) \mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t)] + \mathbf{g}(t) = A \mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t). \end{aligned}$$

Seja $\mathbf{x}(t)$ uma solução qualquer de [L.N.H.]. Então, pelo Teorema 5.5, temos que $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_p(t)$ é solução de $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Logo,

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_p(t) = X(t) \mathbf{c}$$

e, portanto,

$$\mathbf{x}(t) = X(t) \mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t). \quad \blacksquare$$

Pelo Teorema 5.8, vemos que para resolver um sistema linear não homogêneo precisamos saber encontrar uma solução particular.

O **método dos coeficientes a determinar** aplica-se sob as mesmas condições vistas para equações de 2^a ordem.

EXEMPLO 5.13. Determine uma solução particular para o sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + e^t \mathbf{z}$, em que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUÇÃO: $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 8$. Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -4$. Como não existe solução do sistema homogêneo sob a forma

$e^t \mathbf{u}$, tentaremos uma solução da forma $\mathbf{x}_p(t) = e^t \mathbf{v}$. Substituindo no sistema, obtemos

$$e^t \mathbf{v} = A e^t \mathbf{v} + e^t \mathbf{z} \iff \mathbf{v} = A \mathbf{v} + \mathbf{z} \iff (A - I) \mathbf{v} = -\mathbf{z}.$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ 8a - 3b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = b = -\frac{1}{5}.$$

Logo,

$$\mathbf{x}_p(t) = -\frac{e^t}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

é uma solução particular. \square

EXEMPLO 5.14. Determine uma solução particular do sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + e^{-t}\mathbf{z}$, em que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

SOLUÇÃO : $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$. Logo, os autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$. Como existe uma solução do sistema homogêneo da forma $e^{-t}\mathbf{u}$, vamos tentar uma solução particular da forma $\mathbf{x}_p(t) = e^{-t}(\mathbf{v} + t\mathbf{w})$, com \mathbf{v} e $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$. Substituindo no sistema, obtemos

$$e^{-t}(-\mathbf{v} + \mathbf{w} - t\mathbf{w}) = A[e^{-t}(\mathbf{v} + t\mathbf{w})] + e^{-t}\mathbf{z}$$

ou

$$-\mathbf{v} + \mathbf{w} - t\mathbf{w} = A\mathbf{v} + tA\mathbf{w} + \mathbf{z}.$$

Igualando termos em t e termos constantes, vemos que \mathbf{v} e \mathbf{w} devem satisfazer

$$\begin{cases} A\mathbf{w} = -\mathbf{w} \\ A\mathbf{v} + \mathbf{u} = -\mathbf{v} + \mathbf{w} \end{cases} \implies \begin{cases} (A + I)\mathbf{w} = 0 \\ (A + I)\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{z}. \end{cases}$$

A primeira destas equações implica que \mathbf{w} deve ser um (conveniente) autovetor de A . Logo, $\mathbf{w} = \alpha(1 \ -2)^T$ para algum α . Pondo $\mathbf{v} = (a \ b)^T$, a segunda equação nos fornece

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 4 \\ -2\alpha - 4 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2a + b = \alpha + 4 \\ 4a + 2b = -2\alpha - 4. \end{cases}$$

Logo, $\alpha = -3$ e $b = 1 - 2a$. Pondo $a = 0$, obtemos $b = 1$. Portanto,

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{-t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -3te^{-t} \\ (1 + 6t)e^{-t} \end{pmatrix}$$

é uma solução particular. \square

5.4 MÉTODO DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS

Outro método para determinar uma solução particular do sistema não homogêneo é o **Método da Variação dos Parâmetros**, que é mais geral que o anterior, pois aplica-se também no caso $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$.

Seja $X(t) = (\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t))$ uma *M.F.* de $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Queremos encontrar uma solução do tipo

$$\mathbf{x}_p(t) = X(t)\mathbf{u}(t),$$

em que $\mathbf{u}(t)$ é uma função vetorial, isto é, $\mathbf{u}(t) = (u_1(t) \ \dots \ u_n(t))^T$. Temos

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = AX(t)\mathbf{u}(t) + X(t)\dot{\mathbf{u}}(t). \quad (5.9)$$

Como $\mathbf{x}_p(t)$ é solução particular do sistema não homogêneo, temos

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = A\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{g}(t) = AX(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t). \quad (5.10)$$

De (5.9) e (5.10), vem que $X(t)\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{g}(t)$, ou

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = X^{-1}(t)\mathbf{g}(t).$$

Integrando essa expressão de t_0 a t , obtemos

$$\mathbf{u}(t) = \int_{t_0}^t X^{-1}(s) \mathbf{g}(s) ds,$$

onde tomamos $\mathbf{u}(t_0) = 0$, pois procuramos **uma** solução particular. Logo,

$$\mathbf{x}_p(t) = X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s) \mathbf{g}(s) ds.$$

Assim temos que a solução de [L.N.H.] tal que $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ é dada por

$$\mathbf{x}(t) = X(t) X^{-1}(t_0) \mathbf{x}_0 + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s) \mathbf{g}(s) ds,$$

que é conhecida como **Fórmula da Variação dos Parâmetros** (ou fórmula da variação das constantes).

EXEMPLO 5.15. Resolver o P.V.I.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUÇÃO: $p(\lambda) = -\lambda(-1 - \lambda)$. Logo, os autovalores são: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$.

i) $\lambda = 0$: Procuremos um vetor $\mathbf{v} \neq 0$ tal que $(A - 0I) \mathbf{v} = 0$. Ou seja,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies a = 0 \text{ e } b \text{ é arbitrário.}$$

Logo, $\mathbf{v}^1 = (0 \ 1)^T$ é um autovetor e $\mathbf{x}^1(t) = e^{0t} (0 \ 1)^T = (0 \ 1)^T$ é uma solução.

ii) $\lambda = -1$: Procuramos um vetor $\mathbf{v} \neq 0$ tal que $(A + 1I) \mathbf{v} = 0$. Assim

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies b = 0 \text{ e } a \text{ é arbitrário.}$$

Logo, $\mathbf{v}^2 = (1 \ 0)^T$ é um autovetor e uma segunda solução é $\mathbf{x}^2(t) = e^{-t}(1 \ 0)^T = (e^{-t} \ 0)^T$. Portanto,

$$X(t) = (\mathbf{x}^1(t) \ \mathbf{x}^2(t)) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma *M.F.* de $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Temos que

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^t & 0 \end{pmatrix} \implies X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, a solução do P.V.I. é

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= X(t) \left[X^{-1}(t_0) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(s) \mathbf{g}(s) ds \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-s} \\ 1 \end{pmatrix} ds \right] \\ &= \begin{pmatrix} (1+t)e^{-t} \\ 1+t \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 5.3. 1) Determine a solução geral dos sistemas abaixo:

a) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$. b) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$.

c) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$. d) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^t$.

2) Resolva os P.V.I.'s:

a) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 4e^t \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$c) \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3) Em cada um dos problemas abaixo, verifique que $\mathbf{x}^1(t)$ e $\mathbf{x}^2(t)$ são soluções do sistema homogêneo correspondente, e então resolva o sistema não homogêneo. Suponha que $t > 0$.

$$a) t \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ 2t \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \text{ e } \mathbf{x}^2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1}.$$

$$b) t \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2t + 2 \\ t^4 + 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-1} \text{ e } \mathbf{x}^2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2.$$

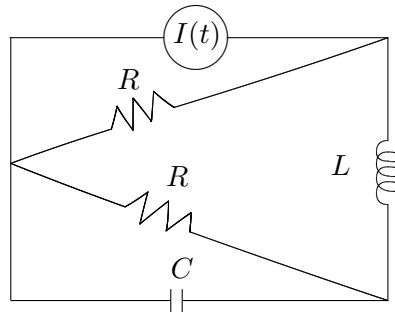
$$c) \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/t \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \cos \pi t \\ 2/t^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{x}^2(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ 1/t \end{pmatrix}.$$

4) O circuito elétrico dado na figura abaixo é descrito pelo sistema de equações diferenciais $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/8 \\ 2 & -1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} I(t)$,

em que $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2)^T$, x_1 é a corrente no indutor, x_2 é a queda de voltagem no capacitor e $I(t)$ é a corrente fornecida pela fonte externa.

a) Determine uma matriz fundamental $X(t)$ para o sistema homogêneo correspondente.

b) Se $I(t) = e^{-t/2}$, determine a solução que satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(0) = 0$.



5.5 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS PELA TRANSFORMADA DE LAPLACE

A transformada de Laplace, descrita no Capítulo 4, também se aplica à resolução de sistemas de equações diferenciais. O método consiste em transformar um dado sistema de equações diferenciais em um sistema de equações algébricas. Vamos ilustrar este procedimento através de alguns exemplos.

EXEMPLO 5.16. Resolver o P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y + 4e^{5t} \\ \dot{y} = x - 2y \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

SOLUÇÃO: Sejam $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ e $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$. Aplicando transformada de Laplace a cada uma das equações do sistema (5.11), obtemos o sistema algébrico

$$\begin{cases} sX - 1 = 3Y + \frac{4}{s-5} \\ sY = X - 2Y \end{cases}$$

cuja solução é:

$$X(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s-5)} = \frac{1}{8} \left[\frac{7}{s-5} + \frac{1}{s+3} \right],$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+3)(s-5)} = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{s-5} - \frac{1}{s+3} \right].$$

Logo, a solução do P.V.I. é

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{8} (7e^{5t} + e^{-3t}), \\ y(t) = \frac{1}{8} (e^{5t} - e^{-3t}). \quad \square \end{cases}$$

EXEMPLO 5.17. Resolver o P.V.I.

$$\begin{cases} \ddot{x} + y = 0 \\ \dot{x} + \dot{y} = 0 \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad y(0) = -1. \end{cases} \quad (5.12)$$

SOLUÇÃO: Sejam $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ e $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$. Aplicando transformada de Laplace a cada uma das equações de (5.12), obtemos o sistema algébrico

$$\begin{cases} s^2 X + Y = 1 \\ sX + sY = -1, \end{cases}$$

cuja solução é

$$X(s) = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s},$$

$$Y(s) = \frac{-1}{s-1}.$$

Logo, a solução do P.V.I. é

$$x(t) = e^t - 1, \quad y(t) = -e^t. \quad \square$$

Como podemos notar no Exemplo 5.17, não é necessário que as equações diferenciais do sistema sejam de 1^ª ordem.

EXERCÍCIOS 5.4. Usando transformada de Laplace ache a solução de cada um dos seguintes problemas de valor inicial:

$$1) \begin{cases} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = x + y \\ x(0) = 3, \quad y(0) = 2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = -3x + y \\ x(0) = 5, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = 0 \\ \ddot{x} + x + y = 0 \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad y(0) = -2. \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x + y - \dot{y} = -1 \\ \dot{x} - 3x - 4y = -1 \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \dot{x} = x - y + \text{sen } 3t \\ \dot{y} = x - y \\ x(0) = 1/3, \quad y(0) = 0. \end{cases} \quad 6) \begin{cases} \ddot{x} + x + \dot{y} = 0 \\ 3x - \dot{y} = 1 + 8t \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 2, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Capítulo 6

Equações Não Lineares de Primeira Ordem

Estudaremos agora alguns tipos de equações diferenciais não lineares. Frequentemente é conveniente escrever a equação

$$\dot{y} = f(t, y)$$

na forma

$$M(t, y) + N(t, y) \dot{y} = 0.$$

Isto é sempre possível: basta colocar $M(t, y) = -f(t, y)$ e $N(t, y) = 1$.

6.1 EQUAÇÕES EXATAS

Queremos resolver a equação diferencial $(t^2 + y^2)dt + 2ty dy = 0$, que não é linear. Então precisamos encontrar um método para resolvê-la.

DEFINIÇÃO 6.1. Dada a equação diferencial de 1ª ordem

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$$

ou

$$M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0, \quad (6.1)$$

em que $M, N: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, e Ω é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^2 , dizemos que (6.1) é uma **equação diferencial exata** se existir uma função $V = V(t, y): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial V(t, y)}{\partial t} = M(t, y) \quad e \quad \frac{\partial V(t, y)}{\partial y} = N(t, y)$$

para todo $(t, y) \in \Omega$.

EXEMPLO 6.1. A equação $(t^2 + y^2) dt + 2ty dy = 0$ é exata pois, existe $V(t, y) = \frac{t^3}{3} + ty^2$ tal que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = t^2 + y^2 = M(t, y) \quad e \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2ty = N(t, y). \quad \square$$

DEFINIÇÃO 6.2. A função $V(t, y)$ é chamada uma **integral primeira** de (6.1) e as curvas definidas pela equação $V(t, y) = c$ são chamadas **curvas integrais** de (6.1).

Observemos que as soluções da equação exata são dadas implicitamente por $V(t, y) = c$.

EXEMPLO 6.2. No exemplo anterior, $V(t, y) = \frac{t^3}{3} + ty^2$ é uma integral primeira da equação dada e $\frac{t^3}{3} + ty^2 = c$ são as curvas integrais. \square

No exemplo acima é fácil ver que a equação é exata e achar sua solução reconhecendo que o primeiro membro é a diferencial de $\frac{t^3}{3} +$

ty^2 , mas, para equações mais complicadas, pode não ser possível fazer isto. O próximo teorema nos fornece um critério para determinar se a equação dada é exata ou não.

TEOREMA 6.1. *Suponhamos que M , M_y , M_t , N_y e N_t sejam contínuas num retângulo $R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < t < b \text{ e } c < y < d\}$. Então (6.1) é uma equação diferencial exata se, e somente, se*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \quad (6.2)$$

para todo $(t, y) \in R$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que (6.1) seja exata. Então existe uma função $V(t, y)$ tal que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = M \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = N.$$

Assim,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial y}.$$

Como M_y e N_t são contínuas, segue que V_{ty} e V_{yt} são contínuas. Pelo Teorema de Schwarz temos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Reciprocamente, se M e N satisfazem (6.2), então mostraremos que (6.1) é exata, isto é, vamos construir uma função $V(t, y)$ satisfazendo

$$\frac{\partial V}{\partial t} = M \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = N.$$

Observamos que a primeira das equações acima é equivalente a

$$V(t, y) = \int M(t, y) dt + h(y),$$

onde $h(y)$ é uma função arbitrária de y . Derivando esta expressão em relação a y , obtemos

$$\frac{\partial V(t, y)}{\partial y} = \int \frac{\partial M}{\partial y}(t, y) dt + h'(y).$$

Teremos que $\frac{\partial V}{\partial y}(t, y) = N(t, y)$ se, e somente, se

$$N(t, y) = \int \frac{\partial M}{\partial y}(t, y) dt + h'(y) \quad (6.3)$$

ou

$$h'(y) = N(t, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}(t, y) dt.$$

Observamos que o segundo membro de (6.3), apesar de sua aparência, depende apenas de y . De fato,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(N(t, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}(t, y) dt \right) = \frac{\partial N}{\partial t}(t, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = 0$$

pois, por hipótese, M e N satisfazem (6.2). Integrando (6.3), obtemos

$$h(y) = \int \left[N(t, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}(t, y) dt \right] dy$$

e, portanto,

$$V(t, y) = \int M(t, y) dt + \int \left[N(t, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}(t, y) dt \right] dy$$

é tal que $\frac{\partial V}{\partial t} = M$ e $\frac{\partial V}{\partial y} = N$. ■

Observamos que a demonstração do Teorema 6.1 nos fornece um método para calcularmos $V(t, y)$ e, portanto, a solução da equação diferencial (6.1). Entretanto, é melhor repetir o processo cada vez que for preciso do que tentarmos lembrar a expressão de $V(t, y)$. Note também que a solução é obtida na forma implícita, podendo ou não ser possível encontrarmos a solução explicitamente.

EXEMPLO 6.3. Resolver a equação $(t^2 + y^2) dt + 2ty dy = 0$.

SOLUÇÃO: Aqui $M(t, y) = t^2 + y^2$ e $N(t, y) = 2ty$. Esta equação é exata pois, $M_y = 2y = N_t$. Logo, existe uma função $V(t, y)$ tal que

$$(i) V_t(t, y) = t^2 + y^2 \quad e \quad (ii) V_y(t, y) = 2ty.$$

Integrando a primeira destas equações, obtemos

$$V(t, y) = \frac{t^3}{3} + ty^2 + h(y).$$

Derivando esta expressão em relação a y e usando (ii), obtemos

$$h'(y) = 0 \implies h(y) = c_1$$

e, portanto,

$$V(t, y) = \frac{t^3}{3} + ty^2 + c_1.$$

Assim, a solução desta equação diferencial é dada implicitamente por

$$t^3 + 3ty^2 = c. \quad \square$$

EXEMPLO 6.4. Resolver o P.V.I.

$$\begin{cases} y \cos t + 2te^y + (\sin t + t^2 e^y + 2) \dot{y} = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

SOLUÇÃO: Aqui $M(t, y) = y \cos t + 2te^y$ e $N(t, y) = \sin t + t^2 e^y + 2$. Esta equação é exata, pois $M_y = \cos t + 2te^y = N_t$. Portanto, existe uma função $V(t, y)$ tal que

$$(i) V_t(t, y) = y \cos t + 2te^y \quad e \quad (ii) V_y(t, y) = \sin t + t^2 e^y + 2.$$

Integrando (i), obtemos

$$V(t, y) = y \sin t + t^2 e^y + h(y).$$

Derivando esta expressão em relação a y e usando (ii), temos

$$\operatorname{sen} t + t^2 e^y + h'(y) = \operatorname{sen} t + t^2 e^y + 2 \implies h'(y) = 2 \implies h(y) = 2y.$$

Observamos que não há necessidade de colocar constante de integração em $h(y)$ pois ela fica incorporada na solução quando escrevemos $V(t, y) = c$. Portanto, as curvas integrais são dadas por

$$V(t, y) = y \operatorname{sen} t + t^2 e^y + 2y = c.$$

Como $t = 0$, temos que $y = 1$ e $c = 2$. Logo, a solução do nosso P.V.I. é definida implicitamente pela equação

$$y \operatorname{sen} t + t^2 e^y + 2y = 2. \quad \square$$

EXERCÍCIOS 6.1. 1) Determine se cada uma das equações abaixo é exata ou não. Se for exata encontre as curvas integrais

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (2t + 3) + (2y - 2)\dot{y} = 0. & \text{b) } (2t + 4y) + (2t - 2y)\dot{y} = 0. \\ \text{c) } (9t^2 + y - 1) - (4y - t)\dot{y} = 0. & \text{d) } \frac{t dt}{(t^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y dy}{(t^2 + y^2)^{3/2}} = 0. \end{array}$$

$$\text{e) } (e^t \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} t) dt + (e^t \cos y + 2 \cos t) dy = 0.$$

$$\text{f) } (e^t \operatorname{sen} y + 3y) dt - (3t - e^t \operatorname{sen} y) dy = 0.$$

$$\text{g) } \left(\frac{y}{t} + 6t\right) dt + (\ln t - 2) dy = 0, t > 0.$$

$$\text{h) } (2ty^2 + 2y) + (2t^3y + 2t)\dot{y} = 0.$$

$$\text{i) } (ye^{ty} \cos 2t - 2e^{ty} \operatorname{sen} 2t + 2t) dt + (te^{ty} \cos 2t - 3) dy = 0.$$

2) Ache o valor de a que torne cada uma das seguintes equações exatas e então resolva-as, usando este valor de a .

$$\text{a) } (ty^2 + at^2y) dt + (t+y)t^2 dy = 0. \quad \text{b) } (ye^{2ty} + t) dt + ate^{2ty} dy = 0.$$

3) Resolva cada um dos P.V.I.

- a) $2ty^3 + 3t^2y^2 \dot{y} = 0, y(1) = 1.$
 b) $3t^2 + 4ty + (2y + 2t^2) \dot{y} = 0, y(0) = 1.$
 c) $3ty + y^2 + (t^2 + ty) \dot{y} = 0, y(2) = 1.$

6.2 EQUAÇÕES COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Consideremos a equação:

$$M(t) N(y) dt + P(t) Q(y) dy = 0, \quad (6.4)$$

onde $P(t) \neq 0$ para todo t e $N(y) \neq 0$ para todo y . Multiplicando (6.4) por $\mu(t, y) = \frac{1}{P(t) N(y)}$, obtemos:

$$\frac{M(t)}{P(t)} dt + \frac{Q(y)}{N(y)} dy = 0$$

que é uma equação exata pois, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{M(t)}{P(t)} \right) = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q(y)}{N(y)} \right)$. Então as curvas integrais são dadas por:

$$V(t, y) = \int \frac{M(t)}{P(t)} dt + \int \frac{Q(y)}{N(y)} dy = c$$

que definem implicitamente a solução $y(t)$ de (6.4).

EXEMPLO 6.5. Determine a solução do P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{y} = t^3 e^{-2y} \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

SOLUÇÃO: A equação diferencial pode ser escrita na forma $e^{2y} dy = t^3 dt$. Integrando o primeiro membro em relação a y e o segundo em relação a t , temos

$$\frac{e^{2y}}{2} = \frac{t^4}{4} + c_1 \quad \implies \quad 2e^{2y} - t^4 = c$$

que define implicitamente $y = y(t)$. Neste caso podemos explicitar a solução. Como

$$e^{2y} = \frac{t^4 + c}{2} \implies \ln e^{2y} = \ln\left(\frac{t^4 + c}{2}\right) \implies y = \ln\left(\frac{t^4 + c}{2}\right)^{1/2}.$$

Como $t = 1$, temos que $y = 0$ e $c = +1$. Logo, a solução do P.V.I. é

$$y(t) = \ln\left(\frac{t^4 + 1}{2}\right)^{1/2}. \quad \square$$

EXERCÍCIOS 6.2. 1) Resolva cada uma das equações abaixo e estabeleça as regiões do plano ty em que são satisfeitas as condições do Teorema de Existência e Unicidade.

| | |
|---------------------------------------|---|
| a) $\dot{y} = \frac{t^2}{y}$. | b) $\dot{y} + y^2 \operatorname{sen} t = 0$. |
| c) $\dot{y} = \frac{t^2}{y(1+t^3)}$. | d) $t\dot{y} = (1-y^2)^{1/2}$. |
| e) $\dot{y} = \frac{t^2}{1+y^2}$. | f) $\dot{y} = \frac{t - e^{-t}}{y + e^y}$. |

2) Ache a solução, na forma explícita, de cada P.V.I.:

| | |
|---|---|
| a) $\dot{y} = \frac{2t}{(t+t^2)y}, y(0) = -2$. | b) $\dot{y} = \frac{2t}{1+2y}, y(2) = 0$. |
| c) $t dt + y e^{-t} dy = 0, y(0) = 1$ | d) $\operatorname{sen} 2t dt + \cos 3y dy = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$. |

3) Mostre que a equação $\dot{y} = \frac{y-4t}{t-y}$ não é separável, mas se fizermos a mudança de variável $v = \frac{y}{t}$, então a equação se torna separável em t e v . Ache a solução da equação dada usando esta técnica.

6.3 FATORES INTEGRANTES

Quando uma equação diferencial do tipo

$$M(t, y) + N(t, y) \dot{y} = 0$$

não é exata, naturalmente perguntamos se poderíamos ou não torná-la exata, pela multiplicação de ambos os membros da equação por uma função conveniente.

EXEMPLO 6.6. A equação $y dt - t dy = 0$ não é exata, pois, $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$ e $\frac{\partial N}{\partial t} = -1$. Mas, se multiplicarmos ambos os membros da equação por $\mu(t, y) = \frac{1}{ty}$, obtemos

$$\frac{1}{t} dt - \frac{1}{y} dy = 0$$

que é uma equação exata. \square

Quando uma função $\mu(t, y)$ transforma uma equação não exata do tipo

$$M(t, y) + N(t, y) \dot{y} = 0 \tag{6.5}$$

em uma equação exata

$$\mu(t, y) M(t, y) + \mu(t, y) N(t, y) \dot{y} = 0$$

dizemos que $\mu(t, y)$ é um **fator integrante** de (6.5).

Em geral, é difícil determinarmos fatores integrantes pois, temos que μ é fator integrante de (6.5) se, e somente, se

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t} \quad \text{ou} \quad M \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \frac{\partial N}{\partial t}$$

que é uma equação bastante complicada.

Vamos apresentar uma classe de equações diferenciais do tipo (6.5) cujo fator integrante pode ser encontrado sem dificuldades.

Suponhamos que seja possível encontrar um fator integrante para (6.5) que seja função só de t . Portanto,

$$\mu(t) M(t, y) + \mu(t) N(t, y) \dot{y} = 0$$

é exata. Conseqüentemente

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(t) M(t, y)) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu(t) N(t, y))$$

ou

$$\mu(t) \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{d\mu(t)}{dt} N + \mu(t) \frac{\partial N}{\partial t}$$

ou

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) \mu(t).$$

Mas esta equação só tem sentido se a expressão $\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right)$ for uma função apenas de t , isto é, $\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) = f(t)$ e, portanto, temos

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = f(t) \mu(t)$$

que é uma equação linear homogênea de 1^a ordem, cuja solução é

$$\mu(t) = e^{\int f(t) dt}.$$

Analogamente se $\frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = g(y)$, então $\mu(y) = e^{\int g(y) dy}$ é um fator integrante de (6.5).

EXERCÍCIOS 6.3. 1) Mostre que as equações abaixo não são exatas, mas se tornam exatas quando multiplicadas pelo fator integrante dado. Resolva então as equações:

a) $t^2 y^3 + t(1 + y^2)y' = 0$, $\mu(t, y) = 1/ty^3$.

b) $\left(\frac{\operatorname{sen} y}{y} - 2e^{-t} \operatorname{sen} t\right) dt + \left(\frac{\cos t + 2e^{-t} \cos t}{y}\right) dy = 0$, $\mu(t, y) = ye^t$.

2) Em cada um dos problemas abaixo, ache o fator integrante e resolva a equação:

a) $y' = e^{2t} + y - 1$.

b) $y dt + (2ty - e^{-2y}) dy = 0$.

c) $dt + \left(\frac{t}{y} - \operatorname{sen} y\right) dy = 0$.

d) $(3t^2y + 2ty + y^3) dt + (t^2 + y^2) dy = 0$.

3) Mostre que se $(N_t - M_y)/(tM - yN) = R$, em que R depende apenas de t, y , então a equação diferencial $M + N y' = 0$ tem um fator integrante da forma $\mu(ty)$. Encontre a fórmula geral para este fator integrante.

6.4 EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

DEFINIÇÃO 6.3. Dizemos que $f(t, y)$ é uma **função homogênea de grau n** se

$$f(\lambda t, \lambda y) = \lambda^n f(t, y)$$

para todo $\lambda \neq 0$ e para todo $(t, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 6.7. $f(t, y) = t^2 - ty - y^2$ é homogênea de grau 2, pois $f(\lambda t, \lambda y) = \lambda^2 t^2 - \lambda^2 ty - \lambda^2 y^2 = \lambda^2 (t^2 - ty - y^2) = \lambda^2 f(t, y)$. \square

EXEMPLO 6.8. $f(t, y) = \frac{t^2 - y^2}{t^2 + y^2}$ é homogênea de grau zero pois,

$$f(\lambda t, \lambda y) = \frac{\lambda^2 (t^2 - y^2)}{\lambda^2 (t^2 + y^2)} = \lambda^0 f(t, y). \quad \square$$

DEFINIÇÃO 6.4. Dizemos que a equação diferencial

$$M(t, y) + N(t, y) \dot{y} = 0 \quad \text{ou} \quad \dot{y} = -\frac{M(t, y)}{N(t, y)}$$

é **homogênea** se as funções $M(t, y)$ e $N(t, y)$ são homogêneas de mesmo grau.

Para resolver a equação homogênea

$$M(t, y) + N(t, y) \dot{y} = 0 \quad \text{ou} \quad \dot{y} = -\frac{M(t, y)}{N(t, y)}$$

precisamos fazer a mudança de variável

$$y = tv \implies dy = v dt + t dv$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} v dt + t dv &= dy = -\frac{M(t, y)}{N(t, y)} dt = -\frac{M(t \cdot 1, t \cdot v)}{N(t \cdot 1, t \cdot v)} dt = \\ &= -\frac{t^m M(1, v)}{t^m N(1, v)} dt = -\frac{M(1, v)}{N(1, v)} dt \end{aligned}$$

ou

$$\left[v + \frac{M(1, v)}{N(1, v)} \right] dt + t dv = 0$$

ou

$$\frac{1}{t} dt + \frac{1}{v + \frac{M(1, v)}{N(1, v)}} dv = 0$$

que é uma equação de variáveis separadas.

EXEMPLO 6.9. Resolver a equação $t^2 + y^2 + 3ty \dot{y} = 0$.

SOLUÇÃO : $M(t, y) = t^2 + y^2$ e $N(t, y) = 3ty$ são homogêneas de grau 2. Logo a equação dada é homogênea. Fazendo $y = tv$, temos que $dy = v dt + t dv$ e, portanto,

$$dy = -\frac{t^2 + y^2}{3ty} dt = -\frac{t^2 + (tv)^2}{3t(tv)} dt = -\frac{t^2(1 + v^2)}{3t^2v} dt = -\frac{1 + v^2}{3v} dt.$$

Logo,

$$v dt + t dv = -\frac{1+v^2}{3v} dt$$

ou

$$\frac{1}{t} dt + \frac{1}{v + \frac{1+v^2}{3v}} dv = 0.$$

Integrando,

$$\int \frac{dt}{t} + \int \frac{3v}{4v^2+1} dv = c.$$

Logo,

$$\ln|t| + \frac{3}{8} \ln[4v^2+1] = \ln c \implies \ln t^8(4v^2+1)^3 = \ln c \implies t^8\left(\frac{4y^2}{t^2}+1\right)^3 = c. \quad \square$$

6.5 HOMOGENEIZAÇÃO

Casos que se reduzem a casos homogêneos

Consideremos a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}$. Se $c = c' = 0$, então temos o caso homogêneo.

Se $c \neq 0$ ou $c' \neq 0$, temos que $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ são duas retas

- (i) paralelas (distintas ou coincidentes) ou
- (ii) concorrentes

No caso (i) temos

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \implies ab' = a'b \implies \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = k \implies a' = ka \text{ e } b' = kb.$$

Substituindo na equação, vem que $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{k(ax + by) + c'}$. Fazendo $v = ax + by$, temos $\frac{dv}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} = a + b \frac{v + c}{kv + c'}$ e, portanto,

$$\frac{dv}{a + b \frac{v + c}{kv + c'}} = dx$$

que é uma equação de variáveis separadas.

EXEMPLO 6.10. Resolva a equação $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 3y + 1}{4x + 6y - 5}$.

SOLUÇÃO: $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \implies$ retas paralelas. Fazendo $v = -2x - 3y$, vem

$$\frac{dv}{dx} = -2 - 3 \frac{dy}{dx} = -2 - 3 \left(\frac{v + 1}{-2v - 5} \right) \implies \frac{-2v - v}{v + 7} dv = dx.$$

Integrando, temos

$$-2v + 9 \ln |v + 7| = x + c.$$

Logo, as curvas integrais são

$$-2(-2x - 3y) + 9 \ln |(-2x - 3y) + 7| = x + c. \quad \square$$

No caso (ii), as retas

$$r: ax + by + c = 0$$

e

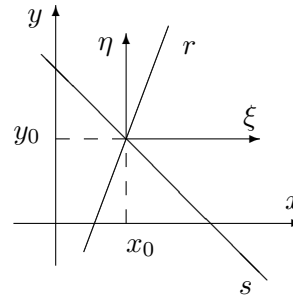
$$s: a'x + b'y + c' = 0$$

são concorrentes em um ponto (x_0, y_0) . Fazemos uma mudança no sistema de coordenadas, tal que as duas retas passem pela origem do novo sistema

$$\begin{aligned}x &= \xi + x_0 \implies dx = d\xi \text{ e} \\y &= \eta + y_0 \implies dy = d\eta.\end{aligned}$$

Como a reta r passa por (x_0, y_0) , temos $ax_0 + by_0 + c = 0$ e portanto

$$\begin{aligned}ax + by + c &= a(\xi + x_0) + b(\eta + y_0) + c \\&= a\xi + b\eta + ax_0 + by_0 + c \\&= a\xi + b\eta.\end{aligned}$$



Analogamente,

$$a'x + b'y + c' = a'\xi + b'\eta.$$

Portanto, nossa equação fica

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\xi + b\eta}{a'\xi + b'\eta}$$

que é uma equação homogênea.

EXEMPLO 6.11. Resolver a equação $\frac{dy}{dx} = \frac{6x - y - 5}{4x - y - 3}$.

SOLUÇÃO: $\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies$ as retas são concorrentes, e o ponto de intersecção é $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Fazendo a mudança de variável

$$\begin{cases} x = \xi + 1 \implies dx = d\xi \\ y = \eta + 1 \implies dy = d\eta \end{cases}$$

e a nossa equação fica

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{6\xi - \eta}{4\xi - \eta}$$

que é homogênea. Fazendo $\eta = \xi v$ temos $d\eta = v d\xi + \xi dv$. Por outro lado, $d\eta = \frac{6-v}{4-v} d\xi$. Logo,

$$\frac{1}{\xi} d\xi + \frac{4-v}{-v^2 + 5v + 6} dv = 0.$$

Integrando, temos

$$\ln |\xi| + \ln \frac{(v-2)^2}{|v-3|} = \ln k.$$

Logo, as curvas integrais são dadas por:

$$\frac{|\xi|(v-2)^2}{|v-3|} = k. \quad \square$$

EXERCÍCIOS 6.4. 1) Encontre a solução de cada uma das equações:

a) $\frac{dy}{dt} = \frac{t+y}{t}.$

b) $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 + ty + y^2}{t^2}.$

c) $\frac{dy}{dt} = \frac{4y - 3t}{2t - y}.$

d) $(t^2 + 3ty + y^2) dt - t^2 dy = 0.$

e) $\frac{dy}{dt} = \frac{2y - t + 5}{2t - y - 4}.$

f) $\frac{dy}{dt} = \frac{4t + 3y + 15}{2t + y + 7}.$

g) $\frac{dy}{dt} = \frac{t + 3y - 5}{t - y - 1}.$

h) $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 + 3y^2}{2ty}.$

2) Mostre que, se $M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0$ é uma equação homogênea, então $\mu(t, y) = \frac{1}{tM(t, y) + yN(t, y)}$ é um fator integrante para esta equação.

3) Use o resultado do problema 2 para resolver as equações:

a) $2y dt - t dy = 0.$

b) $(t^2 + 3y^2) dt - 2ty dy = 0.$

Respostas dos Exercícios

EXERCÍCIOS 1.1

$$1) y_n(t) = t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \cdots + \frac{t^{2n}}{n!}$$

$$2) y_1(t) = e^t - 1, \quad y_2(t) = t - e^t + \frac{1 + e^2}{2}$$

$$y_3(t) = -\frac{107}{48} + \frac{t}{4} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 2(1-t)e^t + \frac{(1+t)e^{2t}}{2} - \frac{e^{3t}}{3} + \frac{e^{4t}}{16}$$

EXERCÍCIOS 1.2

$$1) y(t) = \operatorname{sen} \frac{t^2}{2}$$

EXERCÍCIOS 2.1

$$1) y(t) = \frac{3}{2} e^{1-e^t}$$

EXERCÍCIOS 2.2

$$1) \text{ a) } y(t) = e^{\operatorname{sen} t}$$

$$\text{ b) } y(t) = \frac{11}{6} t^{-2} + \frac{t^4}{6}$$

$$\text{ c) } y(t) = \frac{t}{2} + \frac{150}{t}$$

$$\text{ d) } y(t) = e^{-t} \left(\int \frac{e^t}{1+t^2} dt + 5 \right)$$

$$\text{ e) } y(t) = (1+t^2)^{-2} \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + \frac{1}{4} \right)$$

$$2) \text{ a) } y(t) = (1 + ce^{t^3})^{-1/3} \quad \text{b) } y(t) = \pm(ct^2 + \frac{2}{9}t^5)^{3/2}$$

$$\text{c) } y(t) = (2t^{10} - \frac{31}{16}t^8)^{-1/4}$$

$$4) \text{ a) } y(t) = e^{-t^4/4} (c + \int t^2 e^{-t^4/4} dt)^{-1} + t$$

$$\text{b) } y(t) = 1 + \frac{1}{-t + 1 + ce^{-t}} \quad \text{c) } y(t) = \frac{1}{1 + ce^{-t}} + e^t$$

$$\text{d) } y(t) = t - 1 + \frac{1}{ce^{-t^2} + 1/2}$$

EXERCÍCIOS 2.3

$$1) v(t) = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\alpha t/m})$$

$$3) T = \frac{24 \ln 100}{\ln 2}$$

$$4) \text{ a) } t = 40 \text{ min}$$

$$\text{b) } y(40) = 49.600 \text{ g}$$

EXERCÍCIOS 3.1

$$1) \text{ b) } W[y_1, y_2](t) = -\frac{3\sqrt{t}}{2t^2}, \quad W[y_1, y_2](t) \rightarrow \infty \text{ quando } t \rightarrow 0$$

$$\text{c) } y(t) = 2\sqrt{t}$$

EXERCÍCIOS 3.2

$$1) y_2(t) = e^{-2t} \quad 2) y_2(t) = te^t \quad 3) y_2(t) = \frac{1}{t}, \quad t \neq 0$$

$$4) y_2(t) = \frac{1}{t}, \quad t \neq 0 \quad 5) y_2(t) = \frac{1}{t^2}$$

EXERCÍCIOS 3.3

$$1) \text{ a) } y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \quad \text{b) } y(t) = c_1 + c_2 e^{7t}$$

$$\text{c) } y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \quad \text{d) } y(t) = e^{2t} (c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$$

$$\text{e) } y(t) = e^{2t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{f) } y(t) = c_1 t + c_2$$

$$3) \text{ a) } y(t) = c_1 \cos(\ln t) + c_2 \sin(\ln t)$$

$$b) y(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left[c_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} \ln t + c_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2} \ln t \right]$$

EXERCÍCIOS 3.4

$$1) a) y_p(t) = \frac{4}{17} \cos t - \frac{1}{17} \sin t$$

$$b) y_p(t) = \frac{t}{4} \sin 2t$$

$$c) y_p(t) = t \left(\frac{1}{4} - \frac{t}{4} + \frac{t^2}{6} \right) e^t$$

$$d) y_p(t) = \frac{t^2}{2} + e^{-t}$$

$$e) y_p(t) = \frac{1}{5} + \frac{1}{17} (\cos 2t - 4 \sin 2t)$$

$$f) y_p(t) = \frac{t}{16} (\sin 2t - 2t \cos 2t)$$

$$g) y_p(t) = -\frac{1}{16} \cos 3t + \frac{t}{4} \sin t$$

$$h) y_p(t) = t(e^{2t} - e^t)$$

$$i) y_p(t) = -\frac{1}{50} (\cos t + 7 \sin t) + \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{5} \right) \frac{t e^{2t}}{5}$$

$$2) b) y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{3t} + \frac{4}{35} t^{7/2} e^{3t}$$

EXERCÍCIOS 3.5

$$1) a) y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - (\cos t) \ln(\operatorname{tg} t + \sec t)$$

$$b) y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} + \frac{t}{2} e^t$$

$$f) y(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t - 4$$

$$g) y(t) = c_1 t + c_2 t^2 + \frac{t^4}{6}$$

$$h) y(t) = c_1 t + c_2 t^2 + \frac{t^{-2}}{12}$$

$$i) y(t) = c_1 + c_2 t^2 + (2t - 2) e^t$$

$$2) y(t) = c_1 t^{-1/2} \cos t + c_2 t^{-1/2} \sin t - \frac{3}{2} t^{1/2} \cos t$$

$$3) y(t) = c_1 t^2 + c_2 t^{-1} + \frac{t^2}{3} \ln t$$

$$4) y(t) = c_1 (1+t)^2 + c_2 \frac{1}{1+t} + t(1+t)^2 + \frac{(1+t)^3}{4}$$

EXERCÍCIOS 3.6

$$1) a) I(t) = 50 e^{-4t} \operatorname{sen} 3t, \quad Q(t) = e^{-4t} (-6 \cos 3t - 8 \operatorname{sen} 3t) + 6$$

$$b) I(t) = \frac{75}{52} (2 \cos 3t + 3 \operatorname{sen} 3t) - \frac{25}{52} e^{-4t} (17 \operatorname{sen} 3t + 6 \cos 3t),$$

$$Q(t) = \frac{25}{52} [2 \operatorname{sen} 3t - 3 \cos 3t + e^{-4t} (3 \cos 3t + 2 \operatorname{sen} 3t)]$$

$$2) a) I(t) = \cos t + 2 \operatorname{sen} t$$

$$b) I(t) = 10 (\cos 5t + \operatorname{sen} 5t)$$

$$3) \text{Amplitude} = \frac{1}{4}, \text{período} = \frac{2\pi}{\sqrt{64,4}}, \text{frequência} = \sqrt{64,4}$$

$$4) y(t) = -e^{-t} \left[\frac{e^\pi + \pi + 1}{2} \cos t + \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} t \right]$$

EXERCÍCIOS 3.7

- 1) a) $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-4t}$
 b) $y(t) = (c_1 + c_3 t) \cos t + (c_2 + c_4 t) \sin t$
 c) $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t}$
 d) $y(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^{2t} + c_4 e^{-t}$
 e) $y(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-3t}$
 f) $y(t) = c_1 e^t - e^{-t} (c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t)$
 g) $y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + t (c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t)$
 h) $y(t) = c_1 + c_2 t + e^{-t} (c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t)$
- 2) a) $y(t) = -3 - 2t - \frac{t^2}{2} + (3 - t) e^t$
 b) $y(t) = \frac{7}{6} + \frac{e^{2t}}{10} - \frac{4e^{-3t}}{15}$
 c) $y(t) = 2 - 2 \cos t + \sin t$
 d) $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{-t} + c_5 \cos t + c_6 \sin t$
- 3) $y_1(t) = t^2$, $y_2(t) = t^3$ e $y_3(t) = t^{-2}$
- 4) $y(t) = e^t (c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t) + c_4 e^{-t}$

EXERCÍCIOS 3.8

- 1) a) $y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + \frac{t}{2} e^{-t} + 3$
 b) $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t + \frac{t}{2} e^{-t} + 4(t - 1)$
 c) $y(t) = c_1 e^t + e^{-t/2} (c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t)$
 d) $y(t) = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t + 1 - \cos t - \ln(\cos t) - (\sin t) \ln(\sec t + \operatorname{tg} t)$

$$e) y(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t} + \frac{t}{4} (e^{-2t} - 1) - \frac{1}{5} \operatorname{sen} t$$

$$f) y(t) = (c_1 + c_3 t) \cos t + (c_2 + c_4 t) \operatorname{sen} t + \frac{t^2}{4} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{3} \right) \cos t + \left(\frac{3}{4} + \frac{t}{6} - \frac{t^2}{12} \right) \operatorname{sen} t \right]$$

$$2) a) y(t) = \frac{3}{16} (1 - \cos 2t) + \frac{t^2}{8}$$

$$b) y(t) = (t - 4) \cos t - \left(\frac{3t}{2} + 4 \right) \operatorname{sen} t + 3t + 4$$

$$c) y(t) = \frac{11}{8} e^t - \frac{5}{8} e^{-t} + \frac{\cos t}{4} + 2 \operatorname{sen} t - 3t - \frac{t}{4} \operatorname{sen} t$$

$$d) y(t) = 1 + \frac{1}{4} (t^2 + 3t) - t e^t$$

EXERCÍCIOS 3.9

$$1) a) y_p(t) = -\frac{2}{3} t^3 - 4t \quad b) y_p(t) = \frac{t^3}{6} e^t$$

$$c) y_p(t) = \frac{t}{4} (e^{-2t} - 1) - \frac{\operatorname{sen} t}{5} \quad d) y_p(t) = t - 1 + \frac{t}{2} e^{-t}$$

$$e) y_p(t) = \frac{t^2}{4} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{3} \right) \cos t + \left(\frac{3}{4} + \frac{t}{6} - \frac{t^2}{12} \right) \operatorname{sen} t \right]$$

$$f) y_p(t) = \frac{1}{6} e^{4t}$$

EXERCÍCIOS 4.1

1) a), b) e d) convergem c) diverge

EXERCÍCIOS 4.2

$$1) \text{ a) } \frac{(2s^2 - 3s + 2)}{s^3} \quad \text{b) } \frac{4s}{s^2 + 9} - \frac{10}{s^2 + 4} \quad \text{c) } \frac{2}{(s-3)^2}$$

$$\text{d) } \frac{2s^3 - 150s}{(s^2 + 25)^3} \quad \text{e) } \frac{6, (s-2)}{[(s-2)^2 + 9]^2} \quad \text{f) } \frac{1 - e^{-\pi s}}{s}$$

EXERCÍCIOS 4.3

$$1) \frac{e^{-2t} \operatorname{sen} 3t}{3} \quad 2) e^{3t} \cos t + 3e^{3t} \operatorname{sen} t$$

$$3) e^t (\cos 3t + 2 \operatorname{sen} 3t) \quad 4) t e^{4t}$$

$$5) t \operatorname{sen} 3t \quad 6) \frac{1 + e^{-2t}}{2}$$

$$7) 3t e^t - 3e^t + 3 \cos t \quad 8) 1 + \frac{3(e^{3t} - e^{-3t})}{2}$$

$$9) \cos 2t + \operatorname{sen} 2t - 1$$

EXERCÍCIOS 4.4

$$1) \text{ a) } 3 \cos t + \operatorname{sen} t \quad \text{b) } e^t + e^{3t}$$

$$\text{c) } 2 \cos 3t + (t-2) \frac{\operatorname{sen} 3t}{6} \quad \text{d) } \frac{5 + e^{-t} - 13e^t + 7e^{2t}}{2}$$

$$2) \text{ a) } c_1 e^t + c_2 t e^t - \operatorname{sen} t \quad \text{b) } e^{-t} (c_1 \operatorname{sen} 2t + c_2 \cos 2t + 2 \operatorname{sen} t)$$

EXERCÍCIOS 4.5

$$1) \text{ a) } \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s^2} \quad \text{b) } \frac{1 + 2e^{-s} - 3e^{-4s}}{s}$$

$$2) \text{ a) } (t-2) u_2(t) \quad \text{b) } u_{\pi/2}(t) \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

EXERCÍCIOS 4.6

$$1) \text{ a) } e^{4t} - e^{3t} \quad \text{c) } t e^t \quad \text{d) } \frac{1 - e^{-5t} - 5t e^{-5t}}{25}$$

$$2) \text{ a) } 5t + \frac{5t^3}{6} \quad \text{b) } 2 \operatorname{sen} 2t$$

EXERCÍCIOS 5.1

2) a) Não, pois $\det X(t) = 0$ para $t = 0$ e $t = 1$

b) Sim $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6/t^3 & -6/t^2 & 3/t \end{pmatrix} = x$; $X(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 & t^3 \\ 0 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{pmatrix}$

4) a) x^1 e x^2 são *l.i.* em todo intervalo que não contém $t = 0$.

b) Pelo menos um coeficiente deve ser descontínuo em $t = 0$.

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2t^{-2} & 2t^{-1} \end{pmatrix} x$

5) a) x^1 e x^2 são *l.i.* em todo intervalo que não contém $t = 0$ e $t = 2$

b) Deve haver menos um coeficiente descontínuo em $t = 0$ e $t = 2$

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2-2t}{t^2-2t} & \frac{t^2-2}{t^2-2t} \end{pmatrix} x$

EXERCÍCIOS 5.2

1) a) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} x$ b) $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{at} + c_3 e^{bt}$

c) $x(t) = X(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ d) $X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{at} & e^{bt} \\ -e^{-t} & a e^{at} & b e^{bt} \\ e^{-t} & a^2 e^{at} & b^2 e^{bt} \end{pmatrix}$

em que $a = 2 + \sqrt{6}$ e $b = 2 - \sqrt{6}$

2) a) base: $x^1(t) = (1 \ 2)^T e^{-t}$, $x^2(t) = (2 \ 1)^T e^{2t}$

M.F.: $\begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{2t} \\ 2e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix}$; solução geral: $x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t)$

c) base: $x^1(t) = (1 \ -4 \ 1)^T e^t$; $x^2(t) = (1 \ 0 \ -1)^T e^{-t}$
 $x^3(t) = (2 \ 1 \ 2)^T e^{8t}$

d) base: $x^1(t) = (1 \ 1 \ 1)^T e^{4t}$; $x^2(t) = (1 \ -2 \ 1)^T e^t$
 $x^3(t) = (1 \ 0 \ -1)^T e^{-t}$

e) base: $x^1(t) = (2 \ -2 \ 3)^T e^t$; $x^2(t) = (0 \ \cos 2t \ \sin 2t)^T e^t$;
 $x^3(t) = (0 \ -\sin 2t \ \cos 2t)^T e^t$

f) base: $x^1(t) = (2 \ -3 \ 2)^T e^t$; $x^2(t) = (0 \ \cos 2t \ \sin 2t)^T e^t$;
 $x^3(t) = (0 \ \sin 2t \ -\cos 2t)^T e^t$

g) base: $x^1(t) = (0 \ 0 \ 1)^T e^{-2t}$; $x^2(t) = (1 \ 0 \ 0)^T e^{-t}$
 $x^3(t) = (-t \ 1 \ 0)^T e^{-t}$

h) base: $x^1(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T e^{-2t}$; $x^2(t) = (t \ 1 \ 0 \ 0)^T e^{-2t}$;
 $x^3(t) = (\frac{t^2}{2} \ t \ 1 \ 0)^T e^{-2t}$; $x^4(t) = (\frac{t^3}{6} \ \frac{t^2}{2} \ t \ 1)^T e^{-2t}$

3) a) $x(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T e^{-2t} + (2t \ 2 \ 0 \ 0)^T e^{-2t} -$
 $-(\frac{t^2}{2} \ t \ 1 \ 0)^T e^{-2t} + (\frac{t^3}{6} \ \frac{t^2}{2} \ t \ 1)^T e^{-2t}$

b) $x(t) = (0 \ 0 \ 2)^T e^{-2t} + (1 \ 0 \ 0)^T e^{-t} + (-t \ 1 \ 0)^T e^{-t}$

c) $x(t) = (1 \ 0 \ 0)^T e^{3t} + (t \ 1 \ 0)^T e^{3t} - (0 \ 1 \ -1)^T e^{2t}$

4) Autovalores: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$

Autovetores: $v_1 = (1 \ 0 \ 0)^T$, $v_2 = (1 \ 1 \ 0)^T$ e $v_3 = (1 \ 1 \ 1)^T$

$$5) \text{ c) } A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 16 & -25 & 30 \\ 8 & -6 & -24 \\ 0 & 13 & 26 \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS 5.3

$$1) \text{ a) } x(t) = c_1 (1 \quad -2 + \sqrt{7})^T e^{\sqrt{7}t} + c_2 (1 \quad -2 - \sqrt{7})^T e^{-\sqrt{7}t} + (3 \quad 2)^T e^{3t}$$

$$\text{c) } x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} t-1 \\ -t \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4}t^2 - t - \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } x(t) = \begin{pmatrix} [-c_1 + c_2(-t+1) + c_3(-\frac{t^2}{2} + t + 1)] e^{2t} \\ [c_1 + c_2 t + c_3(\frac{t^2}{2} + 1)] e^{2t} \\ [c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2}] e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

$$2) \text{ a) } x(t) = \begin{pmatrix} 3e^{3t} - 2e^{2t} - te^{2t} \\ e^{2t} \\ 3e^{3t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } x(t) = 2e^t \begin{pmatrix} t \cos t + 3t \sin t + \sin t \\ -2t \sin t \end{pmatrix}$$

$$3) \text{ a) } x(t) = c_1 (1 \ 1)^T t + c_2 (1 \ 3)^T t^{-1} - (2 \ 3)^T + \frac{1}{2} (1 \ 3)^T t - (1 \ 1)^T t \ln t - \frac{1}{3} (4 \ 3)^T t^2$$

$$\text{b) } x(t) = c_1 (2 \ 1)^T t^2 + c_2 (1 \ 2)^T t^{-1} + (3 \ 2)^T t + \frac{1}{10} (-2 \ 1)^T t^4 - \frac{1}{2} (2 \ 1)^T$$

$$\text{c) } x(t) = \begin{pmatrix} 1 & \ln t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} \sin \pi t + (\ln t)^2 \\ \frac{2}{t} \ln t \end{pmatrix}$$

$$4) \text{ a) } X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t/2} \cos \frac{t}{2} & e^{-t/2} \sin \frac{t}{2} \\ 4e^{-t/2} \sin \frac{t}{2} & -4e^{-t/2} \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{ b) } x(t) = e^{-t/2} \begin{pmatrix} \sin \frac{t}{2} \\ 4 - 4 \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS 5.4

$$1) x(t) = (7e^{3t} - e^{-t})/8 ; \quad y(t) = (7e^{3t} + e^{-t})/4$$

$$2) x(t) = 3e^{4t} + 2e^{-t} ; \quad y(t) = -3e^{4t} + 3e^{-t}$$

$$3) x(t) = t^2 ; \quad y(t) = -2 - t^2$$

$$4) x(t) = -1 + 2e^{5t} + e^{-t} ; \quad y(t) = 1 + e^{5t} - e^{-t}$$

$$5) x(t) = (6 + 6t - 3 \cos 3t - \sin 3t)/9 ; \quad y(t) = (6t - \sin 3t)/9$$

$$6) x(t) = 2t - \sin 2t + (1 - \cos 2t)/4 ; \quad y(t) = -5 - \frac{t}{4} - t^2 + \\ + 6 \cos 2t - \frac{3}{8} \sin 2t$$

EXERCÍCIOS 6.1

$$1) \text{ a) } t^2 + 3t + y^2 - 2y = c \quad \text{ b) Não é exata}$$

$$\text{ c) } 3t^3 + ty - t - 2y^2 = c \quad \text{ d) } t^2 + y^2 = c$$

$$\text{ e) } e^t \sin y + 2y \cos t = c \text{ e } y = 0 \quad \text{ f) Não é exata}$$

$$\text{ g) } y \ln t + 3t^2 - 2y = c \quad \text{ h) } t^2 y^2 + 2ty = c$$

$$\text{ i) } e^{ty} \cos 2t + t^2 - 3y = c$$

$$2) \text{ a) } a = 3 ; \quad t^2 y^2 + 2t^3 y = c \quad \text{ b) } a = 1 ; \quad e^{2ty} + t^2 = c$$

$$3) \text{ a) } y(t) = t^{-2/3} \quad \text{ b) } y(t) = -t^2 + \sqrt{t^4 - (t^3 - 1)}$$

$$\text{ c) } t^2 - 3y + e^{ty} \cos 2t = 1$$

EXERCÍCIOS 6.2

- 1) a) $3y^2 - 2t^3 = c$; $y \neq 0$
- b) $y^{-1} + \cos t = c$, se $y \neq 0$; também $y = 0$ em todo ponto
- c) $3y^2 - 2 \ln |1 + t^3| = c$; $1 + t^3 \neq 0$; $y \neq 0$
- d) $y = \text{sen}(\ln |t| + c)$ se $t \neq 0$ e $|y| < 1$
também $y = \pm 1$; $t \neq 0$ e $|y| < 1$
- e) $3y + y^3 - t^3 = c$, em todo ponto
- f) $y^2 - t^2 + 2(e^y - e^{-t}) = c$; $y + e^y \neq 0$
- 2) a) $y = -[4 \ln(1 + t) + 4]^{1/2}$ b) $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4t^2 - 15}$
- c) $y = [2(1 - t)e^t - 1]^{1/2}$ d) $y = \frac{1}{3} \arcsen(3 \cos^2 t)$
- 3) $|y + 2t|^3 |y - 2t| = c$

EXERCÍCIOS 6.3

- 1) a) $t^2 + 2 \ln |y| - y^{-2} = c$; também $y = 0$
- b) $e^t \text{sen } y + 2y \cos t = c$
- 2) a) $\mu(t) = e^{-t}$; $y = ce^t + 1 + e^{2t}$
- b) $\mu(y) = \frac{e^{2y}}{y}$; $te^{2y} - \ln |y| = c$; também $y = 0$
- c) $\mu(y) = y$; $ty + y \cos y - \text{sen } y = c$
- d) $\mu(t) = e^{3t}$; $(3t^2 + y^3)e^{3t} = c$

Referências Bibliográficas

- [1] R.C. Bassanezi e M.C. Ferreira Jr, *Equações Diferenciais com Aplicações*, Editora Harbra Ltda., 1988.
- [2] W.E. Boyce e R.C. DiPrima, *Introduction to Ordinary Differential Equations*, John Wiley, New York, 1970.
- [3] W.E. Boyce e R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley, New York, 1969.
- [4] M. Braun, *Equações Diferenciais e suas Aplicações*, Editora Campus, 1979.
- [5] R. Bronson, *Moderna Introdução às Equações Diferenciais*, Coleção Schaum, 1976.
- [6] E. Coddington, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Halls Englewood Cliffs, 1961.
- [7] N. Curle, *Equações diferenciais aplicadas*, Edgard Blucher, 1975.
- [8] D.G. Figueiredo, *Equações Diferenciais Aplicadas*, 12^o Colóquio Brasileiro de Matemática, 1979.
- [9] F.G. Hagin, *A First Course in Differential Equations*, Prentice-Halls Englewood Cliffs, 1975.

- [10] W. Leighton, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Livros Técnicos e Científicos, 1981.
- [11] G. F. Simmons, *Cálculo com Geometria*, Volume 2, MacGraw-Hill, 1987.