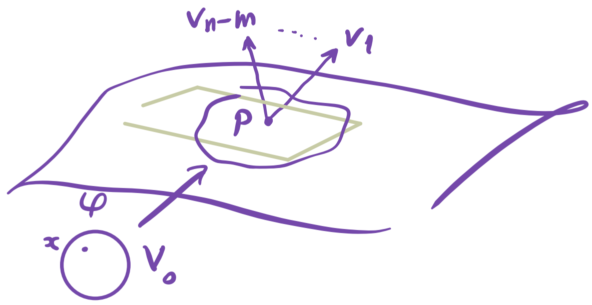
Um (+1) resultado fundamental p/ entender Superfícies Orientáveis

Def: Campo de Vetores normais à Superfície $M \subseteq \mathbb{R}^n$

Teorema: Seja $M \subseteq \mathbb{R}^n$ uma Superfície de dimensão m, que admite $(n-m)$-Campos normais Contínuos $v_1, \ldots, v_{n-m} : M \to \mathbb{R}^n$ linearmente independentes então M é Orientável.

Demonstração:



A: Parametrizações C^1 $\varphi : V_0 \to V \subset M$ V_0 Conexo e

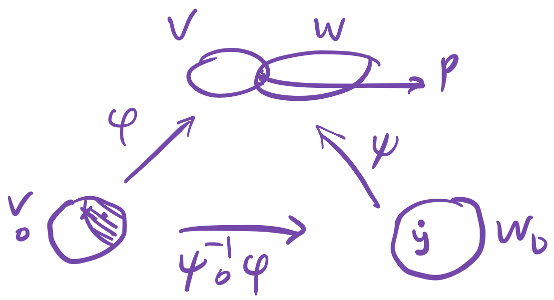
$$\Phi(x) = \left[\underset{\in \mathbb{R}^n}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)}, \ldots \underset{\in \mathbb{R}^n}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(x)}, v_1(\varphi(x)), \ldots, v_{n-m}(\varphi(x)) \right]_{n \times n}$$

$\det \Phi(x) > 0$.

✓. $\Phi(x)$ é invertível. $\Rightarrow$ $\det \Phi(x) > 0$ ou $\det \Phi(x) < 0$ $\forall x \in V_0$

. Sinal de $\det \Phi(x)$ em V_0.

Afirmação: $\mathcal{A}$ é Coerente $\Longrightarrow$ M orientável.



$\varphi(x) = \psi(y) = p$

$\Phi(x) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}, v_1 \cdots v_{n-m}\right]$

$\Psi(y) = \left[\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \psi}{\partial x_m} \; v_1, \cdots v_{n-m}\right]$

$\boxed{J(\psi^{-1}\circ\varphi)} = D(\psi^{-1}\circ\varphi)(x) = [\alpha_{ij}] = A$

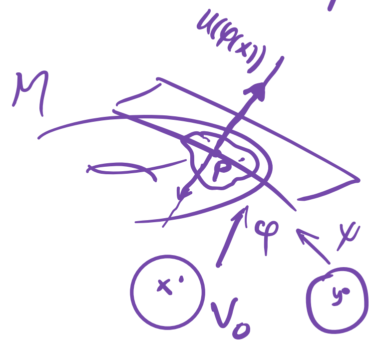
$\Longrightarrow \Phi(x) = \Psi(y).\tilde{A}$ $\qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & id \end{pmatrix}$

$\det \Phi(x) = \det(\Psi(y)).\det(\tilde{A})$

$\det(\Phi(x)), \det \Psi(y) > 0 \Rightarrow \det(\tilde{A}) > 0 \Rightarrow \det(A) > 0.$

Teorema: Se $M^{(n)} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ é hiperfície (Codimensão Um) e Orientável então existe Um Campo Contínuo normal $v: M \to \mathbb{R}^{n+1}$ e $v(p) \neq 0 \ \forall p \in M$.

Corolário: P/ superfícies dim 2 em $\mathbb{R}^3$, Condição necessária e suficiente Para Orientabilidade é existência de Campo Cont. normal $\neq 0$ $\forall p$.



Demonstração: M é orientável.

$\varphi: V_0 \to V$ Parametrização

$$\Phi(x) = \Big[\underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)}_{\in \mathbb{R}^{n+1}}, \dots \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x), \overset{u(\varphi(x))}{\square}\Big], \quad \det \Phi(x) > 0.$$

$\varphi(x) = \psi(y) = p.$

$u(p)$

• Independência à Parametrização

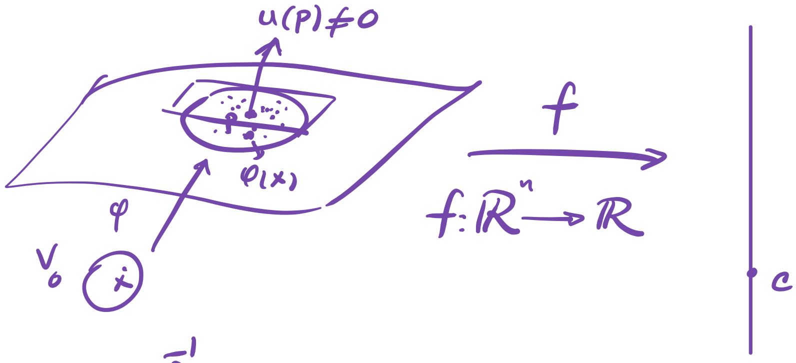
$$\Phi(x) = \Psi(y) \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix}$$

$$\Psi(y) = \left[\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n}(y), u(\varphi(x))\right]$$

$$\underbrace{\det \Phi(x)}_{+} = \det(\Psi(y)) \cdot \underbrace{\det(A)}_{+}$$

sup. é Orientável

• Continuidade do Campo $\vec{u}$.



$$f^{-1}(\{c\})$$

$$v(p) = \operatorname{grad} f_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(p) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\det \underbrace{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x), v(\varphi(x)) \right]}_{\downarrow} > 0$$

Após trocar $v \longrightarrow -v$

$$\vec{u}(\varphi(x)) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{grad} f_{\varphi(x)}}{\| \quad \|} & \text{se } \det \Phi(x) > 0 \\ -\dfrac{\operatorname{grad} f}{\| \quad \|} & \text{se } \det \Phi(x) < \end{cases}$$