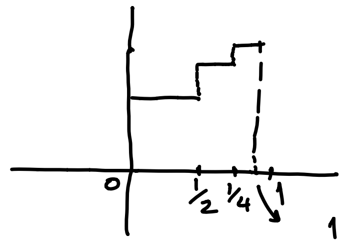
$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad A \subseteq \mathbb{R} \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

$\chi_{\mathbb{Q}}$ não é integrável. $U = 1$ $L = 0$.

Escada de Zeno:



(monotona)

$1 - \frac{1}{2^n}$ Descontinuidade.

<u>Teorema</u>: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se somente se f é limitada e o Conj dos pts descontinuidade é de medida nula.

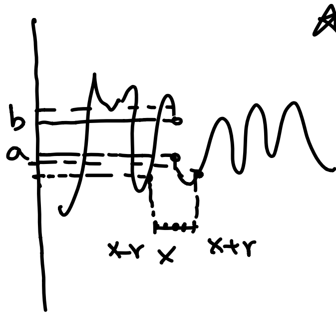
$$Z \subset \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{I_i\} \quad \bigcup I_i \supset Z \quad \sum |I_i| \leqslant \varepsilon.$$

Demonstração:

$\text{Oscilação}_x(f)$: Osc. no ponto x. (Quantificar a descontinuidade)

$$* \, \text{Osc}_x(f) = \lim_{r \to 0} \text{diam} \, f([x-r, x+r]) \qquad r > 0$$

$$* \, \text{Osc}_x(f) = \limsup_{t \to x} f(t) - \liminf_{t \to x} f(t)$$



$\text{Osc}_x(f) = b - a$

<u>obs</u>: Se f é Contínua em x

$\text{Osc}_x(f) = 0$.

$\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$.

$D :=$ Conj pontos descontinuidade $f: [a,b] \to [-M, M]$.

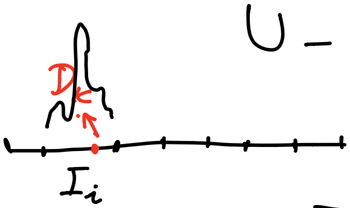
$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{1/k} \qquad D_k = \{x \in [a,b], \ \text{Osc}_x(f) \geqslant k\}$$

D é de medida nula $\Longleftrightarrow$ $D_{1/k}$ é de medida nula.

Assumimos f é integrável $\xRightarrow{\text{Provamos}}$ D é de medida nula.

já que f é integrável, $\varepsilon, k > 0$ existe P (partição)

$$U - L = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon k$$

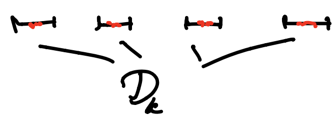


$$(M_i - m_i) \geq k.$$

mas sabemos $\sum \underline{(M_i - m_i)} \Delta x_i < \varepsilon k$.

Se somamos sobre intervalos que contem ponto de D_k.

$$k \sum \Delta x_i < \varepsilon k \Longrightarrow \underbrace{\sum \Delta x_i} < \varepsilon .$$



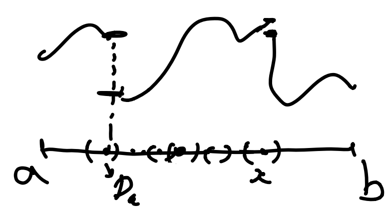
Reciprocamente: Assumimos que D tem medida nula $\Longrightarrow f$ integrável

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta$ tq $|P| < \delta \quad U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Escolhemos $k > 0$ tq $\boxed{k < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$ $\quad f : [a,b] \to [-M, M]$

Pela hip $D_k \subset D$ tem medida nula. $\Rightarrow \exists \; J_j = (a_j, b_j)$

$$\sum |J_j| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$



$x \notin D_k \quad x \in [a,b] \setminus D_k \quad \exists \; I_x$ tq

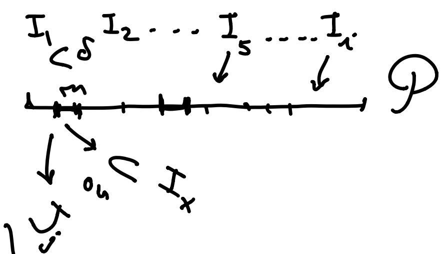
$$\sup \{ f(t), t \in I_x \} - \inf \{ f(t) : t \in I_x \} < k.$$

J_j's e I_x's cobrem $[a,b]$.

$\exists\, \delta > 0$ (número de Lebesgue): Todo intervalo $|I| < \lambda$ é dentro de algum J_j ou I_x.

Agora seja P uma Partição $|P| < \underline{\underline{\delta}}$. $\overset{??}{\Longrightarrow}$ $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Todo I_i (elemento da Partição) é contido em algum I_x ou J_j.



$\mathbf{J} = \{ i : I_i \text{ esta contido em algum } J_j \}$

$\mathbf{I} = \{ i ;\ I_i \subset I_x \}$.

$f : [a,b] \to [-M, M]$

$$\boxed{U - L} = \sum (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i \in \mathbf{J}} \overbrace{(M_i - m_i)}^{\le 2M} \Delta x_i + \sum_{i \in \mathbf{I}} (M_i - m_i)\Delta x_i$$

$$\le \sum_{i \in \mathbf{J}} 2M\,\Delta x_i + \sum_{i \in \mathbf{I}} k\cdot\Delta x_i \le 2M \underbrace{\left(\sum_{i \in \mathbf{J}} \Delta x_i\right)}_{\varepsilon/4M} + \underbrace{k}_{k < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \overbrace{\left(\sum_{i \in \mathbf{I}} \Delta x_i\right)}^{\le b-a}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \boxed{\varepsilon}$$

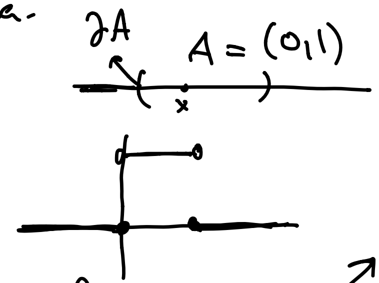
Corolários fantásticos:

Cor 1: Toda função contínua é integrável. Toda função contínua por pedaços também é integrável.

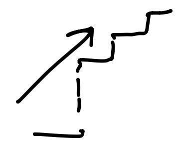
Cor 2: Se $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \subset [a,b]$ χ_A é integrável se

Somente se ∂A tem medida nula.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$



<u>Cor 3</u>: Toda função monotona é integravel.



Ponto de descont. é enumerável.

Todo Conj enumerável tem medida nula.

<u>Cor 4</u>. f e g integráveis então $f \cdot g$ também é integrável.

<u>Dem</u>: $f \cdot g$ é limitada. $D(f)$, $D(g)$ tem medida nula.

$D(f \cdot g) \subseteq D(f) \cup D(g)$. $\Longrightarrow$ $D(f \cdot g)$ tem medida nula.

$\boxed{\text{Cor 5}}$: Se $f : [a,b] \to [c,d]$ é integrável e $\phi : [c,d] \to \mathbb{R}$ é <u>Contínua</u>, então $\phi \circ f$ é integrável.

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\phi \circ f"'] & {[c,d]} \arrow[r, "\phi"] & {} \end{tikzcd}$$

<u>Dem</u>: $D(\phi \circ f) \subset D(f)$. $\Longrightarrow$ $\overline{D(\phi \circ f)}$ tem medida nula.

ϕ Contínua $\phi|_{[c,d]}$ é limitada.

$\phi \circ f$ é limitada.

Cor' 5.5: Se $f \in \mathcal{R}$ então $|f| \in \mathcal{R}$ (integrável).

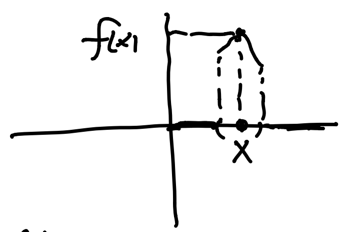
<u>Exercício</u>: Dê exemplo $f, g \in \mathcal{R}$ mas $f \circ g$ não é.

Corolário 6: Se $a<c<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrável então $f|_{[a,c]}$, $f|_{[c,b]}$ também são integráveis,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$$f|_{[a,c]} = f \cdot \chi_{[a,c]}.$$

Corolário 7: Se $f:[a,b]\to\overbrace{[0,M]}$ integrável e $\int_a^b f(x)dx = 0$ então $\forall x\in[a,b]$ ponto de <u>continuidade</u>, $f(x)=0$.



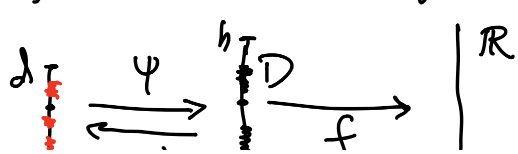
Corolário 8: Se f é integrável e ψ é uma bijeção cuja inversa é Lipschitz então $f\circ\psi$ é integrável.

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend right, "f\circ\psi"'] & \cdot \arrow[r, "f"] & \cdot \end{tikzcd}$$

<u>Lipschitz</u>: $|\psi^{-1}(x) - \psi^{-1}(y)| \le \overbrace{K}^{\text{Const. Lipschitz}} |x-y|$

Lipschitz $\Longrightarrow$ Contínua.

<u>Demonstração</u>: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrável. $\psi:[c,d]\to[a,b]$



C^1 $\quad \varphi^{-1}$ $\quad \int_a$ integrável

$\varphi(c)=a$, $\varphi(d)=b$.

$|\varphi^{-1}(s)-\varphi^{-1}(t)| \leq K|s-t|$. Note que φ^{-1} é homeomorfismo.

obj: $f\circ\varphi$ é integrável.

D: descontinuidade de f. $\varphi^{-1}(D)=D'$.

D' é o conj dos pontos de descont. de $f\circ\varphi$.

Basta ver que D' tem medida nula.

<u>Ideia</u>: Se D medida nula φ^{-1} é Lipschitz $\varphi^{-1}(D)$ também tem medida nula.

$\forall \varepsilon\ \exists I_i \quad \sum |I_i| < \varepsilon/K, \quad \bigcup I_i \supseteq D.$

$\{\varphi^{-1}(I_i)\} \quad \bigcup \varphi^{-1}(I_i) \supset \boxed{\varphi^{-1}(D)=D'}$

φ^{-1}, $\leq K|x-y|$, $x\ y$, I_i

$\sum |\varphi^{-1}(I_i)| \leq K\sum |I_i| \leq \varepsilon\cancel{K}/\cancel{K} = \varepsilon.$

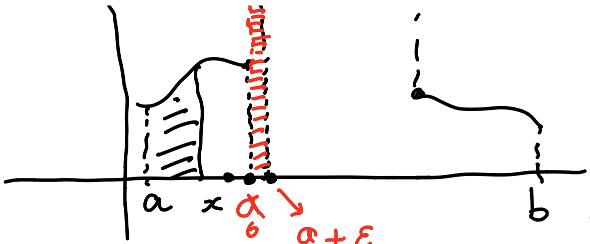
Teorema Fundamental do Cálculo:

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é Riemann integrável então

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad (\text{integral indefinida})$$

F é uma função contínua. A derivada $F'(x)$ existe e é igual a $f(x)$ ($F'(x)=f(x)$) em todo x ponto de continuidade de f.

$F(a)$



$F(a_0)$

$F(a_0+\varepsilon)$

$$F(\overbrace{a_0+\varepsilon}^{x}) - F(a_0) = \int_{a_0}^{a+\varepsilon} f(t)\,dt$$

$$\int_a^{a_0+\varepsilon} f - \int_a^{a_0} f$$

Cont. de F: $\forall \alpha > 0\ \exists \beta$ tq $|x - a_0| < \beta \Rightarrow |F(x) - F(a_0)| < \alpha$.
em $\underline{\underline{a_0}}$

$$|F(x) - F(a_0)| = \underbrace{\left| \int_{a_0}^{x} f(t)\,dt \right|}_{f \text{ integrál} \Rightarrow f \text{ é limitada.}} \overset{*}{\leq} M|(x - a_0)|$$

$|f| \leq M.$

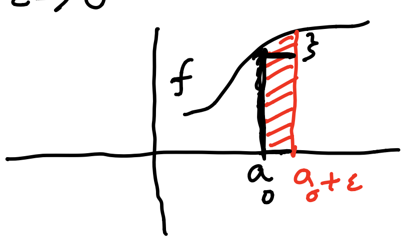
$$* \left| \int_{a_0}^{x} f(t)\,dt \right| \leq \int_{a_0}^{x} \underbrace{|f(t)|}_{\leq M} dt \leq \underline{\underline{M}}\, |x - a_0|$$

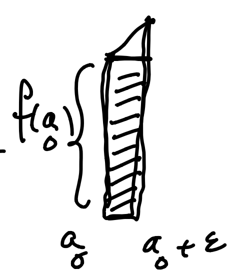
De fato mostramos F é Lipschitz $\Longrightarrow$ Contínua.

Lembrete: Toda $f \in \mathcal{R} \Rightarrow$ Pontos de descont. tem medida nula.

Vamos escolher a_0 um ponto de continuidade de f.
provamos que F é dif. no ponto a_0.

$$\underline{\underline{F'(a_0)}} \overset{?}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(a_0+\varepsilon) - F(a_0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{a_0}^{a_0+\varepsilon} f(t)\,dt}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon f(a_0) + \triangle}{\varepsilon}$$

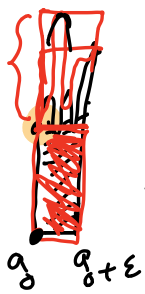




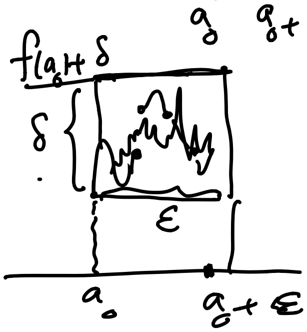
$$= \underline{\underline{f(a_0)}} + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\triangle}{\varepsilon}$$

Continua

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cdots}{|\varepsilon|}\leq\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cdots}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cancel{\varepsilon}\times(f(a_0+\varepsilon)-f(a_0))}{\cancel{\varepsilon}}\overset{\uparrow}{=}0$$



$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\overbrace{f(a_0+\varepsilon)-f(a_0)}^{\varepsilon_0 f(a_0)+\cdots}}{\varepsilon}\qquad\frac{(\overbrace{f(\xi)-f(a_0)}^{\to 0})\cdot\cancel{\varepsilon}}{\cancel{\varepsilon}}$$

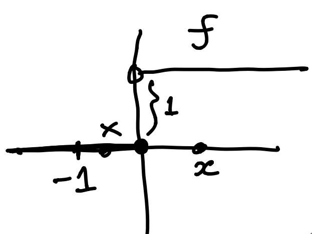


$f(a_0+\varepsilon)-f(a_0)$

Pela Cont. de f em a_0 : $\forall\delta,\ \exists\varepsilon$

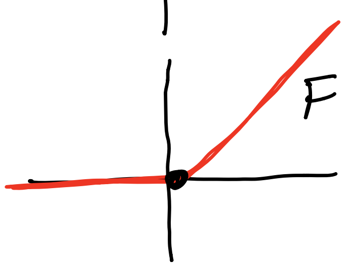
$\forall x\in(a_0,a_0+\varepsilon)\quad f(x)<f(a_0)+\delta.$

Exemplo: $f(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ 1 & x>0\end{cases}$

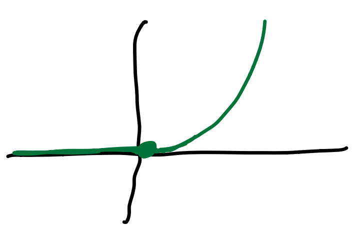


$\longrightarrow\quad F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\,dt$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ x. & x>0\end{cases}$$



F não é diferenciável $x=0$.



$$G(x)=\int_{-1}^{x}F(t)\,dt$$

$$G(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ \frac{1}{2}x^2 & x>0\end{cases}$$

Corolário:

Se f é contínua então $\exists\, F$ (primitiva) tal que $F'(x) = f(x)$. $\forall x \in [a,b]$

Def: F é primitiva (anti derivative) de f se F é diferenciável e $F'(x) = f(x)$. $\forall x \in [a,b]$.

$f \in \mathcal{R} \longrightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad F'(x) = f(x)$ x é cont. de f.

$f \in C^0([a,b]) \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad F$ é uma primitiva.

Se F e G são duas primitivas então $\exists\, \underline{\underline{C}} \in \mathbb{R}$

$F(x) = G(x) + C$.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

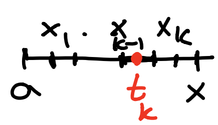
Teorema de Anti derivada: A primitiva de uma função integrável (quando existir), difere da integral indefinida de uma constante.

f tem primitiva $F \Longrightarrow \exists\, C$ tq $\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C.}$ ⊛

$(C = F(a))$.

$F'(x) = f(x)$. não está claro que f é integrável.

Demonstração: Particione $[a, x]$



$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = x$

Pelo Teorema Valor medio: $\exists\, t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tq

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = \underbrace{F'(t_k)}_{f(t_k)} \cdot \Delta x_k .$$

$$F(x) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \left(F(x_k) - F(x_{k-1}) \right) = \underbrace{\sum f(t_k) \cdot \Delta x_k}_{\text{Soma de Riemann.}}$$

$$\cancel{F(x_1)} - F(x_0)$$
$$\cancel{F(x_2)} - \cancel{F(x_1)}$$
$$\vdots$$
$$F(x_n) - \cancel{F(x_{n-1})}$$

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + F(a).$$

Exercício: Ache uma função f que tenha primitiva, mas não seja integrável.

$F' = f$. Caminho: Achar F (diferenciável) e F' não seja contínua num conj de medida não nula.

Teorema Mudança de variável:

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ g diferenciável.

tal que $g([c,d]) \subseteq [a,b]$.

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d (f \circ g)(t) \cdot g'(t)\,dt$$

$g(t) = x$ (Custo)

Dem:

f tem primitiva (pois é contínua) $F : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = F(g(d)) - F(g(c))$$

$$(F \circ g)(d) - (F \circ g)(c)$$

$$(F \circ g)'(x) \underset{R.C}{=} F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

f

$(F \circ g)$ é primitiva de $(f \circ g) \cdot g'$

$$\int_c^d (f \circ g)_{(t)} \cdot g'(t)\,dt = F \circ g(d) - (F \circ g)(c)$$

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d (f \circ g)(t)\, g'(t)\,dt$$