

Integrais Múltiplas

Texto baseado no livro Cálculo, Volume II, de James Stewart

Conteúdo

- 1 Integrais Duplas sobre Regiões Retangulares
- 2 Integrais Duplas sobre Regiões Gerais
- 3 Integrais Duplas em Coordenadas Polares
- 4 Integrais Triplas
- 5 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas
- 6 Cálculo de Centros de Massa e Momentos de Inércia
- 7 Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Nesta parte da disciplina, estendemos o conceito de integral definida de uma função de uma variável para integrais duplas e triplas de funções reais de duas e três variáveis, respectivamente. Examinamos aplicações envolvendo integração para calcular volumes, massas e centroides de regiões. Veremos também como o uso de outros sistemas de coordenadas (como coordenadas polares, cilíndricas e esféricas) simplifica o cálculo de integrais múltiplas sobre alguns tipos de regiões e de funções. Se o tempo permitir, usaremos integrais duplas para calcular probabilidades quando as variáveis envolvidas forem aleatórias.

Volumes e Integrais Duplas

Motivação. Consideremos uma região retangular fechada R no plano xy dada por

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$. O gráfico de f representa uma superfície acima do plano xy com equação $z = f(x, y)$.

Seja S o sólido que está acima de R e abaixo do gráfico de f (Figura 1), isto é, a base do sólido é o retângulo R no plano xy e o seu topo é o gráfico de f . Em termos de conjunto, podemos escrever

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}.$$

Queremos determinar o volume V do sólido S .

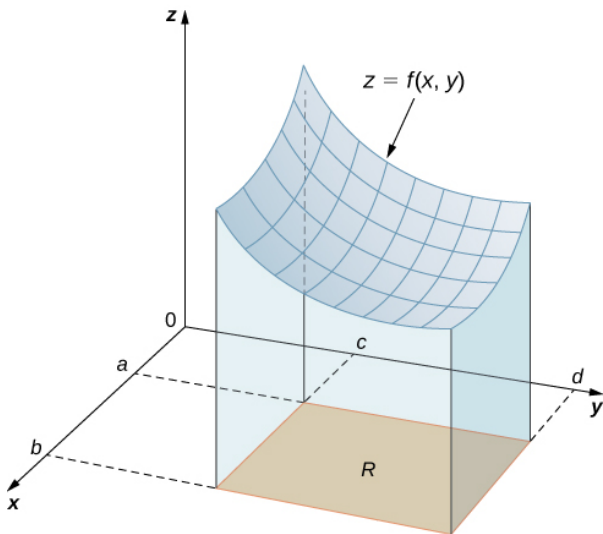


Figura: 1. Sólido S (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

O primeiro passo consiste em dividir a região R em sub-retângulos R_{ij} , cada um com área ΔA e com lados Δx e Δy .

Fazemos isso dividindo o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos de mesmo comprimento $\Delta x = (b - a)/m$ e dividindo o intervalo $[c, d]$ em n subintervalos de comprimento $\Delta y = (d - c)/n$. Traçando retas paralelas aos eixos coordenados passando pelos extremos dos subintervalos, conforme Figura 2, formamos os sub-retângulos R_{ij} definidos por

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

cada um dos quais com área $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

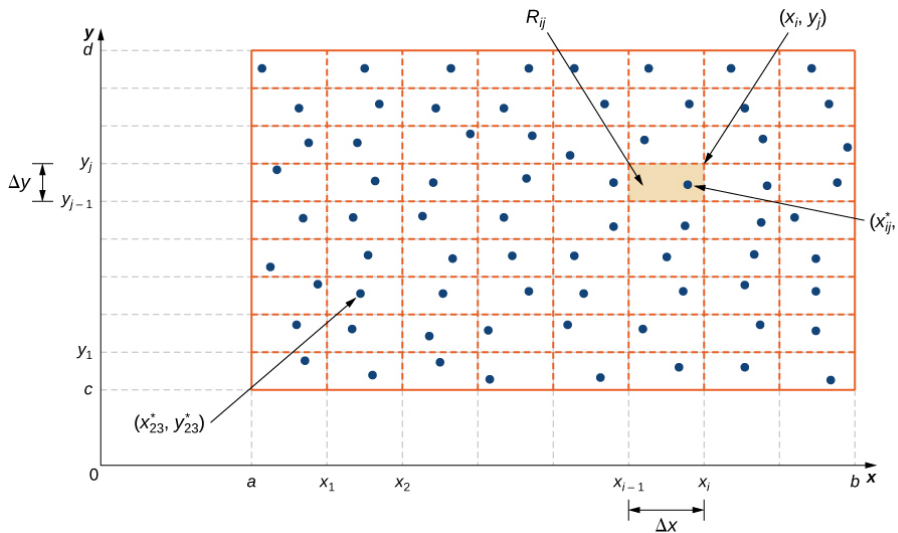


Figura: 2. O retângulo R é dividido em pequenos retângulos R_{ij} , cada um com área ΔA (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Se escolhermos um ponto arbitrário, que chamaremos de **ponto amostral**, (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em cada subretângulo R_{ij} , poderemos aproximar a parte de S que está acima de cada R_{ij} por uma caixa retangular fina (ou coluna) com base R_{ij} e altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, como mostrado na Figura 3. O volume dessa caixa é dado por

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A.$$

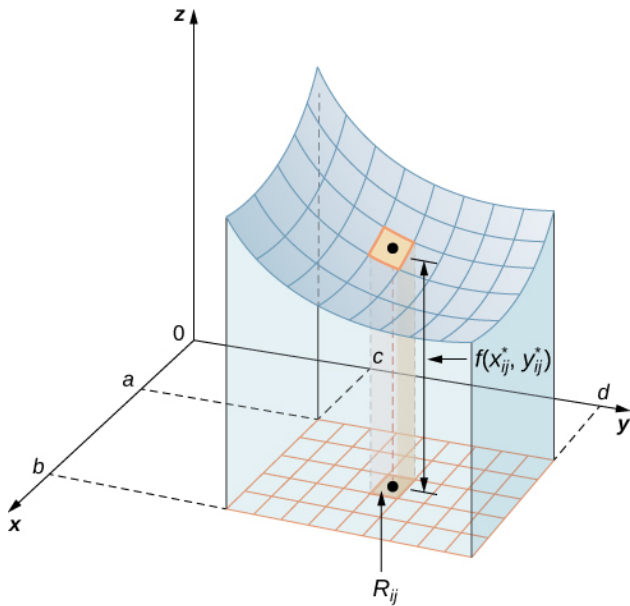


Figura: 3. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Se seguirmos com esse procedimento para todos os subretângulos e somarmos os volumes das caixas correspondentes, obteremos uma aproximação do volume total de S :

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A.$$

Veja Figura 4. Essa soma é conhecida como **soma de Riemann** e pode ser usada para aproximar o valor do volume do sólido. Aqui a soma significa que para cada subretângulo avaliamos a função no ponto escolhido, multiplicamos pela área de cada retângulo e depois somamos todos os resultados.

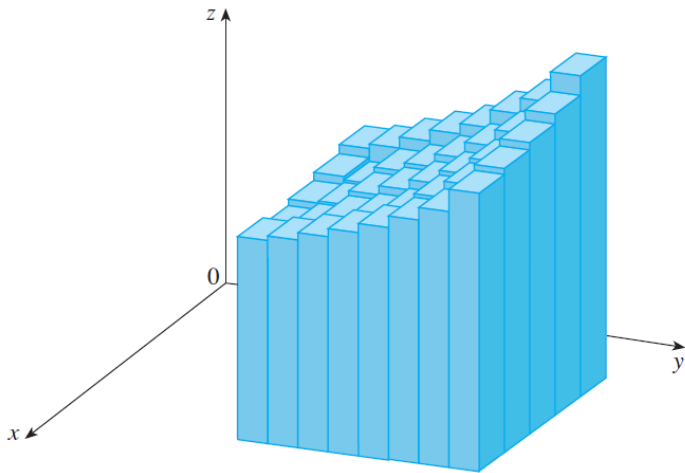


Figura: 4. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Nossa intuição diz que obteremos uma melhor aproximação do volume quando aumentamos os valores de m e n , e portanto devemos esperar que

$$V = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A, \quad (1)$$

se este limite existir.

Agora estamos prontos para definir a integral dupla.

Definição 1. A integral dupla da função $f(x, y)$ sobre o retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ no plano xy é definida como

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A,$$

se esse limite existir e for independente da escolha dos pontos amostrais (x_{ij}^*, y_{ij}^*) nos subretângulos R_{ij} . Neste caso, diremos que f é integrável em R .

Teorema 1. Sejam $R = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo no plano xy e $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ uma função **contínua** em R . Então f é integrável em R .

Mais ainda, funções não necessariamente contínuas num retângulo R podem ser integrais, como podemos ver por meio do próximo teorema.

Teorema 2. Sejam $R = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo no plano xy e $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ uma função **limitada** em R . Se o conjunto de descontinuidade de f pode ser descrito como uma união finita de curvas de classe C^1 , então f é integrável em R .

As demonstrações destes teoremas requerem alguns conceitos que não são abordados, em geral, num primeiro curso de Cálculo II, por isso serão omitidas aqui.

Comparando o limite (1) e a Definição 1, vemos que o volume pode ser escrito como uma integral dupla:

Se $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ e $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$, então o volume V do sólido S , que está acima de R no plano xy e sob o gráfico de f é

$$V = \iint_R f(x, y) dA.$$

Exemplo 1. Estime o volume V do sólido S que está acima do retângulo $R = [0, 2] \times [0, 2]$ no plano xy e sob o gráfico de $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$.

Resolução. A função $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2 \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$ e é contínua em R . Para encontrar o volume de S , dividimos o retângulo R em pequenos subretângulos R_{ij} , cada um com área ΔA e com lados Δx e Δy , e escolher (x_{ij}^*, y_{ij}^*) como pontos amostrais em cada R_{ij} . Assim,

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (16 - x^2 - 2y^2) dA \\ &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [16 - (x_{ij}^*)^2 - 2(y_{ij}^*)^2] \Delta A \end{aligned}$$

Aproximando o volume usando uma soma de Riemann com $m = n = 2$ temos $\Delta A = \Delta x \Delta y = 1$. Além disso, escolhendo pontos amostrais como $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 2)$, encontramos

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \\ &= f(1, 1) \Delta A + f(1, 2) \Delta A + f(2, 1) \Delta A + f(2, 2) \Delta A \\ &= 13 + 7 + 10 + 4 = 34. \end{aligned}$$

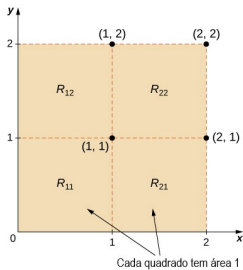


Figura: 5. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

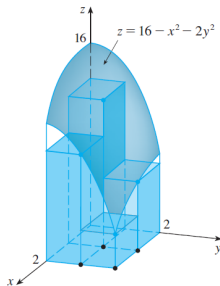


Figura: 6. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

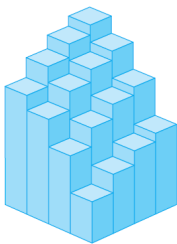
A aproximação do volume melhora quando aumentamos o número de quadrados. Por exemplo,

(a) $m = n = 4, V \approx 41,5$

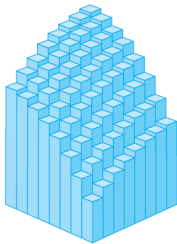
(b) $m = n = 8, V \approx 44,875$

(c) $m = n = 16, V \approx 46,46875$

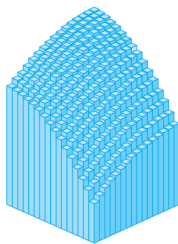
onde os pontos amostrais foram tomados como os vértices superior direito dos subretângulos R_{ij} . No Exemplo 3 seremos capazes de mostrar que o volume exato é 48.



(a) $m = n = 4, V \approx 41,5$



(b) $m = n = 8, V \approx 44,875$



(c) $m = n = 16, V \approx 46,46875$

Figura: 7. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Valor Médio

Em Cálculo I vimos que o valor médio de uma função integrável $f(x)$ de uma variável definida num intervalo $[a, b]$ é

$$f_{\text{méd}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Mais ainda, se $f(x)$ for contínua em $[a, b]$, então existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\bar{x}).$$

De modo semelhante definimos o **valor médio** de uma função integrável $f(x, y)$ num retângulo R como sendo

$$f_{\text{méd}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) dA.$$

onde $A(R)$ é a área de R . É possível mostrar que se $f(x, y)$ for contínua em R , então existe $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ tal que

$$\frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) dA = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

Uma interpretação geométrica desse resultado pode ser dada se $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$. A equação

$$f_{\text{méd}} A(R) = \iint_R f(x, y) dA$$

diz que a caixa com base R e altura $f_{\text{méd}}$ tem o mesmo volume do sólido delimitado pelo gráfico de f .

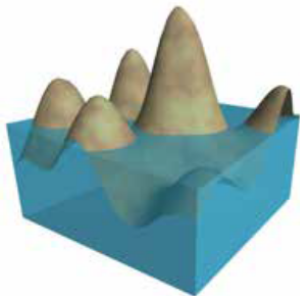


Figura: 8. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Exemplo 3. Um mapa de contorno é mostrado para uma função $f(x, y)$ no retângulo $R = [-3, 6] \times [-1, 4]$. Estime o valor o valor médio da função $f(x, y)$.

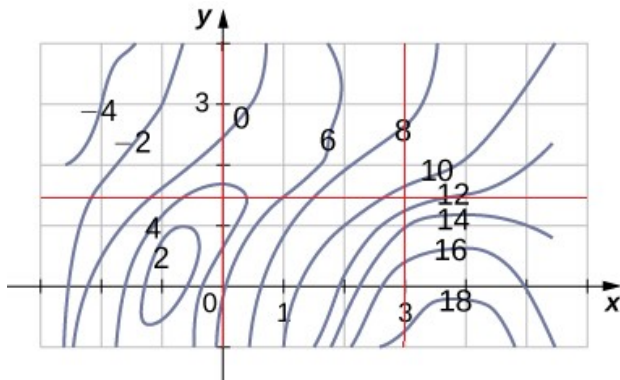


Figura: 9. Mapas de contornos de f

Resolução. O valor médio de médio da função f é

$$f_{\text{méd}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) dA = \frac{1}{45} \iint_R f(x, y) dA.$$

Para estimar o valor dessa integral dupla, vamos usar uma soma de Riemann com $m = 3$, $n = 2$, onde o ponto amostral (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij} é tomado como o ponto central de R_{ij} . Usando o mapa de contornos para estimar o valor de f no ponto central de cada subretângulo, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &\approx \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \\ &\approx \Delta A [4 + (-2) + 10 + 6 + 16 + 10] \\ &= 3 \cdot 2,5[44] = 330. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f_{\text{méd}} \approx \frac{330}{45} \approx 7,333$$

Propriedades das Integrais Duplas

Teorema 3. Se $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$ são funções integráveis no retângulo R e $c \in \mathbb{R}$, então

i) $f + g$ é integrável em R e

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA$$

ii) cf é integrável em R e

$$\iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA$$

Teorema 4. Se $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$ são funções integráveis no retângulo R e $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in R$, então

$$\iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA$$

Integrais duplas sobre regiões genericas

Vamos agora estender o conceito de integral dupla para regiões no plano mais gerais, como a região D ilustrada na Figura 10.

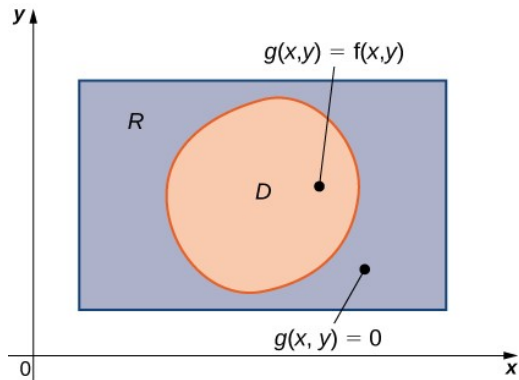


Figura: 10.

Dada $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região limitada, considere uma região retangular R contendo D . Definimos uma nova função g com domínio R por

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{se } (x, y) \in R \text{ mas } (x, y) \notin D \end{cases}$$

Se g for integrável sobre R , então definimos a integral dupla de f sobre D por

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R g(x, y) dA.$$

Essa definição faz sentido porque R é um retângulo e, portanto, $\iint_R g(x, y) dA$ já está definida. O procedimento usado é razoável, pois os valores de $g(x, y)$ são 0 quando (x, y) está fora do conjunto D e dessa forma não contribuem para o valor da integral. Isso significa que não importa qual o retângulo R tomado, desde que contenha D .

Pelo Teorema 2, note que se a fronteira de D for uma união finita de curvas de classe C^1 , e se f for contínua em D , então g é integrável em R .

No caso de $f(x, y) \geq 0$, podemos interpretar $\iint_D f(x, y) dA$ como o volume do sólido contido acima de D e abaixo do gráfico de f .

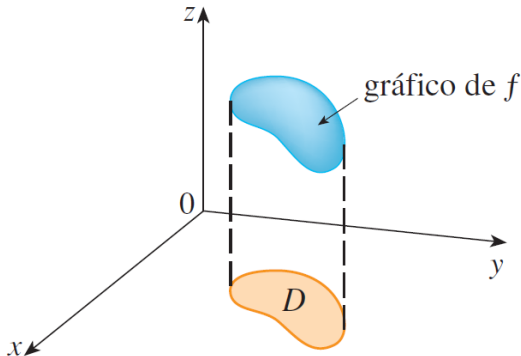


Figura: 11. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Integrais Iteradas

Suponha que $f(x, y)$ seja uma função contínua no retângulo

$R = [a, b] \times [c, d]$. Usaremos a notação $\int_c^d f(x, y) dy$ significando que $x \in [a, b]$ é mantido fixo e $f(x, y)$ é integrada em relação a y no intervalo $[c, d]$. Esse procedimento é chamado integração parcial em relação a y . Como $\int_c^d f(x, y) dy$ é um número que depende do valor de x , ele define uma função de x :

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Se agora integrarmos a função $A(x)$ com relação à variável x no intervalo $[a, b]$, obtemos

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (2)$$

A integral do lado direito em (2) é chamada **integral iterada**. Em geral, os colchetes são omitidos. Assim.

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (3)$$

significa que primeiro integramos com relação a y de c a d e depois em relação a x de a até b . Da mesma forma, a integral iterada

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (4)$$

significa que primeiro integramos com relação a x de a a b e depois em relação a y de c até d . Observe que em ambas as equações (24) e (9), operamos de dentro para fora.

Exemplo 2. Calcule o valor das integrais iteradas

(a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx$

(b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy$

Solução.

(a)

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx &= \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y \, dy \right] dx = \int_0^3 \left[x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_{y=1}^{y=2} \right] dx \\ &= \int_0^3 \left[\frac{3}{2} x^2 \right] dx = \frac{x^3}{2} \Big|_0^3 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy &= \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \Big|_{x=0}^{x=3} \right] dy \\ &= \int_1^2 9y \, dy = 9 \frac{y^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

Observe que no Exemplo 1 obtemos a mesma resposta se integramos primeiro em relação a y ou a x . Em geral acontece (veja o Teorema 5) de as duas integrais iteradas das Equações 3 e 4 serem sempre iguais, ou seja, a ordem da integração não é importante.

O seguinte teorema fornece um método prático para calcular algumas integrais duplas por meio de integral iterada em qualquer ordem.

Teorema 5 (Teorema de Fubini). Se $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

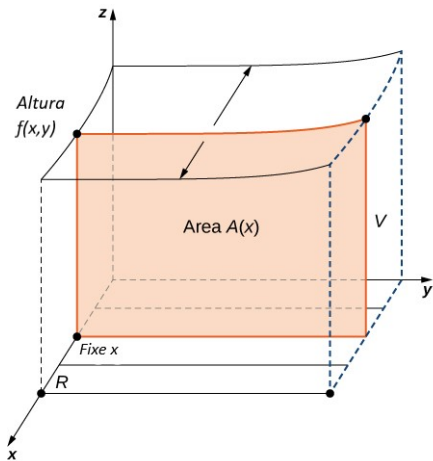
Em verdade, esse resultado vale se supusermos que f seja limitada em $R = [a, b] \times [c, d]$, f podendo ser descontínua num número finito de curvas de classe C^1 , e as integrais iteradas existam.

O Teorema de Fubini tem uma **interpretação geométrica** simples, ilustrada na Figura 12. Se f é contínua e $f(x, y) \geq 0$ em $R = [a, b] \times [c, d]$, o número $\iint_R f(x, y) dA$ é o volume do sólido S que está acima de R e abaixo do gráfico de $z = f(x, y)$. Para cada x no intervalo $[a, b]$, a integral $A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ é a área da seção transversal de S em um plano perpendicular ao eixo x , veja Figura 23(a). Como estudado no Cálculo I, o volume de S é $V = \int_a^b A(x) dx$, se A é uma função contínua. Portanto,

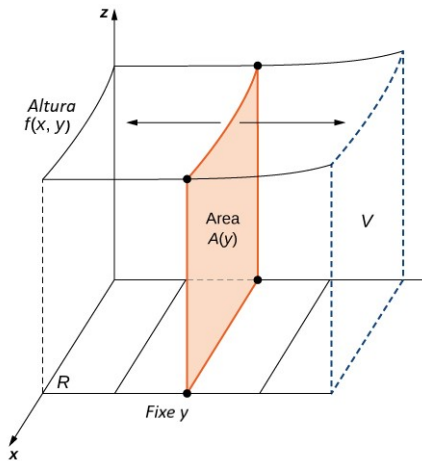
$$\iint_R f(x, y) dA = V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

Uma interpretação semelhante, usando a seção transversal perpendicular ao eixo y como na Figura 12(b), mostra que

$$\iint_R f(x, y) dA = V = \int_c^d A(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$



(a)



(b)

Figura: 12. (a) Integrando primeiro em relação a y e depois em relação a x para encontrar a área $A(x)$ e depois o volume V ; (b) integrando primeiro em relação a x e depois em relação a y para encontrar a área $A(y)$ e depois o volume V .

Exemplo 3. Calcule o volume do sólido S que é limitado pelo parabolóide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, pelos planos $x = 2$ e $y = 2$ e pelos três planos coordenados. (resposta 48)

Solução. Observemos que o sólido S está abaixo do gráfico da função $z = 16 - x^2 - 2y^2$ definida no retângulo $R = [0, 2] \times [0, 2]$. Como esta função é positiva, podemos calcular o volume do sólido usando a integral dupla. Pelo Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (16 - x^2 - 2y^2) dA = \int_0^2 \left[\int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dx \right] dy \\ &= \int_0^2 \left(16x - \frac{x^3}{3} - 2y^2x \right) \Big|_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2 \right) dy = \left(\frac{88y}{3} - \frac{4y^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 48. \end{aligned}$$

Exemplo 4. Calcule a integral dupla $\iint_R y \sin(xy) dA$, onde $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \pi\}$.

Solução 1. Integrando primeiro em relação a x , obtemos

$$\begin{aligned}\iint_R y \sin(xy) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 y \sin(xy) dx dy = \int_0^\pi [-\cos(xy)] \Big|_{x=1}^{x=2} dy \\ &= \int_0^\pi (-\cos(2y) + \cos y) dy = \left(-\frac{1}{2} \sin(2y) + \sin y \right) \Big|_0^\pi = 0\end{aligned}$$

Solução 2. Se agora calcularmos a integral dupla usando as integrais iteradas na ordem invertida, obtemos

$$\iint_R y \sin(xy) dA = \int_1^2 \left[\int_0^\pi y \sin(xy) dy \right] dx.$$

Para calcular a integral interna, usamos a integração por partes

$$u = y \quad dv = \sin(xy)dy$$

$$du = dy \quad v = -\frac{\cos(xy)}{x}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} y \sin(xy) dy &= -\frac{y \cos(xy)}{x} \Big|_{y=0}^{y=\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(xy)}{x} dy \\ &= -\frac{\pi \cos(\pi x)}{x} + \frac{\sin(xy)}{x^2} \Big|_{y=0}^{y=\pi} \\ &= -\frac{\pi \cos(\pi x)}{x} + \frac{\sin(\pi x)}{x^2}\end{aligned}$$

Integrando o primeiro termo por partes com $u = -1/x$ e $dv = \pi \cos(\pi x)dx$, obtemos

$$\int -\frac{\pi \cos(\pi x)}{x} dx = -\frac{\sin(\pi x)}{x} - \int \frac{\sin(\pi x)}{x^2} dx.$$

Logo,

$$\int \left(-\frac{\pi \cos(\pi x)}{x} + \frac{\sin(\pi x)}{x^2} \right) dx = -\frac{\sin(\pi x)}{x}$$

e assim

$$\begin{aligned} \iint_R y \sin(xy) dA &= \int_1^2 \left[\int_0^\pi y \sin(xy) dy \right] dx \\ &= -\frac{\sin(\pi x)}{x} \Big|_{x=1}^{x=2} \\ &= -\frac{\sin 2\pi}{2} + \sin \pi = 0. \end{aligned}$$

No Exemplo 4, a solução 1 é muito mais simples que a 2. Portanto ao calcular uma integral dupla é recomendável verificar se a ordem de integração pode simplificar os cálculos.

Exemplo 5. Calcule a integral dupla $\iint_R \sin x \cos y dA$, onde $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2\}$. (resposta 1).

Note que o Exemplo 4 é caso particular de

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} g(x)h(y)dA = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy.$$

Integrais duplas sobre regiões genéricas

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto limitado e $R = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo que contém D . Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos uma nova função g com domínio R por

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{se } (x, y) \in R \text{ mas } (x, y) \notin D \end{cases}$$

Se a fronteira de D consiste de um número finito de curvas de classe C^1 , então g é integrável e definimos a integral dupla de f sobre D por

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R g(x, y) dA.$$

Consideremos, inicialmente, um subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ descrito como

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

onde g_1 e g_2 são funções de classe C^1 no intervalo $[a, b]$ e $g_1 \leq g_2$. Tal subconjunto é chamado **região de tipo I**.

Exemplos de regiões deste tipo podem ser vistos na Figura 13.

Numa região de tipo I, para cada $t \in [a, b]$, a reta $x = t$ intercepta D segundo um segmento de reta compreendido entre as curvas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$.

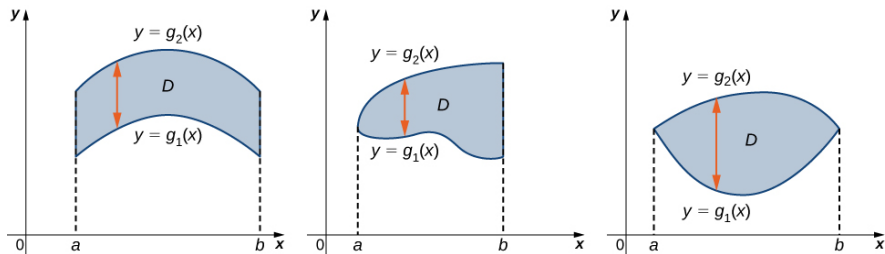


Figura: 13. Algumas regiões de tipo I

Uma região D de tipo II é descrita por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

onde h_1 e h_2 são funções de classe C^1 em $[c, d]$ e $h_1 \leq h_2$.

Exemplos de regiões deste tipo podem ser vistos na Figura 14.

Numa região de tipo II, para cada $t \in [c, d]$, a reta $y = t$ intercepta D segundo um segmento de reta compreendido entre a curvas $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$.

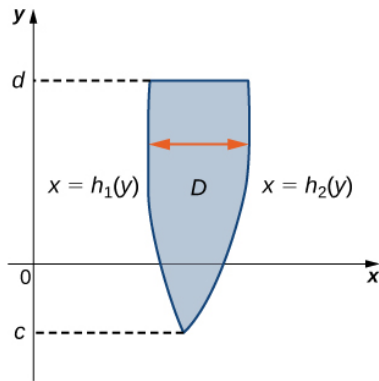
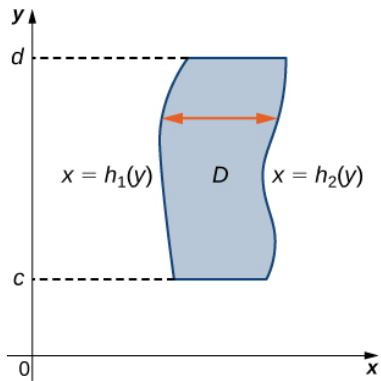


Figura: 14. Algumas regiões de Tipo II

Exemplo 1. Considere a região no primeiro quadrante entre as funções $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$ (Figura 15). Descreva a região primeiro de tipo I e depois de tipo II.

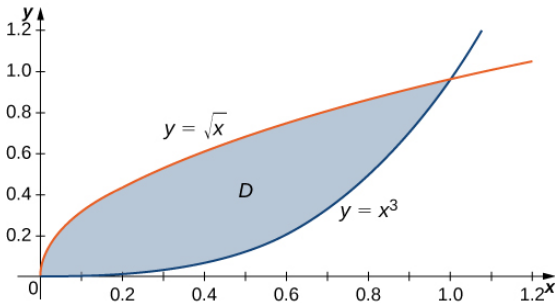


Figura: 15. Região D pode ser descrita de tipos I e II.

Solução. Ao descrever uma região de tipo I, precisamos identificar a função que está acima da região e a função que está abaixo da região. Aqui, a região D é limitada acima por $y = \sqrt{x}$ e abaixo por $y = x^3$ no intervalo para $x \in [0, 1]$. Assim, como tipo I, D é descrito como o conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

No entanto, ao descrever uma região de tipo II, precisamos identificar a função que fica à esquerda da região e a função que fica à direita da região. Aqui, a região D é limitada à esquerda por $x = y^2$ e à direita por $x = \sqrt[3]{y}$ no intervalo para y em $[0, 1]$. Assim, como tipo II, D é descrito como o conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq \sqrt[3]{y}\}.$$

O próximo teorema é uma consequência do Teorema de Fubini.

Teorema 6. Se f é contínua em uma região D de tipo I, então

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad (5)$$

Se f é contínua em uma região D de tipo II, então

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy. \quad (6)$$

Demonstração. Se D é uma região de tipo I, seja $R = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo contendo D . Por definição e pelo Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dA &= \iint_R g(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_c^d g(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_a^b \left[\int_c^{g_1(x)} g(x, y) dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} g(x, y) dy + \int_{g_2(x)}^d g(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_a^b \left[\int_c^{g_1(x)} 0 dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy + \int_{g_2(x)}^d 0 dy \right] dx \\ &= \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \end{aligned}$$

Utilizando o mesmo tipo de argumento que usamos para provar (5) podemos mostrar (6) se a região D é de tipo II.

Por (6),

$$\begin{aligned}\iint_D (3x^2 + y^2) dA &= \int_{-2}^3 \int_{y^2-3}^{y+3} (3x^2 + y^2) dx dy \\&= \int_{-2}^3 (x^3 + xy^2) \Big|_{x=y^2-3}^{x=y+3} dy \\&= \int_{-2}^3 ((y+3)^3 + (y+3)y^2 - (y^2-3)^3 - (y^2-3)y^2) dy \\&= \int_{-2}^3 (-y^6 + 8y^4 + 2y^3 - 12y^2 + 27y + 54) dy \\&= \left[-\frac{y^7}{7} + \frac{8y^5}{5} + \frac{y^4}{2} - 4y^3 + \frac{27y^2}{2} + 54y \right] \Big|_{-2}^3 \\&= \frac{2375}{7}.\end{aligned}$$

Exemplo 7. Determine o volume do tetraedro T limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

Solução. Para a resolução de uma questão como esta, é prudente desenhar o sólido tridimensional e a região plana D sobre a qual o sólido está. A Figura 17(a) mostra o tetraedro limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$. Como o plano $x + 2y + z = 2$ intercepta o plano xy (cuja equação é $z = 0$) na reta $x + 2y = 2$, vemos que T está acima da região triangular D no plano xy limitado pelas retas $x = 2y$, $x + 2y = 2$ e $x = 0$ (Veja a Figura 17(b).)

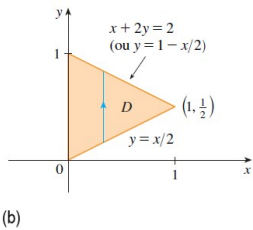
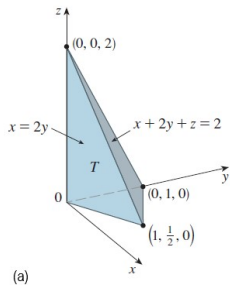


Figura: 17.

O plano $x + 2y + z = 2$ pode ser escrito como $z = 2 - x - 2y$, de modo que o volume pedido está sob o gráfico da função $z = 2 - x - 2y$ e acima de

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x/2 \leq y \leq 1 - x/2\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (2 - x - 2y) \, dA = \int_0^1 \left[\int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y) \, dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[2y - xy - y^2 \right] \Big|_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx \\ &= \int_0^1 \left[2 - x - x(1 - x/2) - (1 - x/2)^2 - x + x^2/2 + x^2/4 \right] dx \\ &= \int_0^1 [x^2 - 2x + 1] \, dx = \left[x^3/3 - x^2 + x \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Exemplo 8. Calcule a integral iterada $\int_0^1 \left[\int_x^1 \sin(y^2) dy \right] dx$.

Solução. Se tentarmos calcular essa integral na forma pela qual ela se apresenta, teremos de resolver o problema de calcular $\int \sin(y^2) dy$. Mas isso é impossível de fazer em termos finitos, uma vez que $\int \sin(y^2) dy$ não se escreve como uma combinação linear de funções elementares. Para superar esta dificuldade mudamos a ordem de integração, o que pode ser feito escrevendo-se inicialmente a integral iterada dada como uma integral dupla e aplicando o Teorema de Fubini.

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx = \iint_D \sin(y^2) dA$$

onde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}.$$

Vemos que um modo alternativo de escrever D é

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}.$$

Usando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx &= \iint_D \sin(y^2) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2) dx dy = \int_0^1 x \sin(y^2) \Big|_{x=0}^{x=y} dy \\ &= \int_0^1 y \sin(y^2) dy = -\frac{1}{2} \cos(y^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 1). \end{aligned}$$

Exemplo 9. Encontre o volume do sólido limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + z^2 = a^2$, onde $a > 0$.

Solução. O volume do sólido é oito vezes o volume do sólido S no primeiro octante de \mathbb{R}^3 limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + z^2 = a^2$. A base do sólido S é a região D no plano xy dada por

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \right\}.$$

Para cada $(x, y) \in D$, a altura do sólido S é $z = \sqrt{a^2 - x^2}$. Então o volume de S é

$$V(S) = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2} \, dA.$$

Pela fórmula (5),

$$\begin{aligned} V(S) &= \iint_D \sqrt{a^2 - x^2} dA = \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2} dy \right] dx \\ &= \int_0^a \left[y \sqrt{a^2 - x^2} \right] \Big|_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\ &= \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2a^3}{3}. \end{aligned}$$

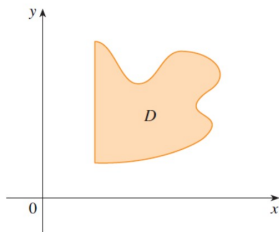
Portanto, o volume do sólido pedido é $\frac{16a^3}{3}$.

Exercício. Encontre o volume do sólido limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$, onde $a > 0$.

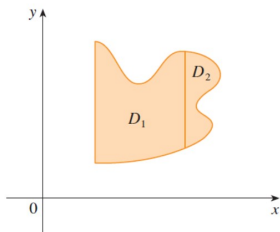
O próximo teorema é útil para calcular integrais duplas sobre regiões D no plano que não são de tipo I e nem de tipo II.

Teorema 7. Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e $D = D_1 \cup D_2$, sendo D_1 e D_2 duas regiões sem pontos em comum, exceto possivelmente um número finito de curvas suaves, então

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA.$$



(a) D não é do tipo I nem do tipo II.



(b) $D = D_1 \cup D_2$, D_1 é do tipo I, D_2 é do tipo II.

Exemplo 10. Expresse a região D mostrada na Figura 19 como uma união de regiões do Tipo I ou Tipo II e calcule a integral

$$\iint_D (2x + 5y) \, dA.$$

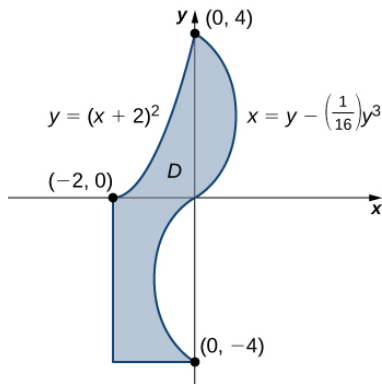


Figura: 19.

Solução. $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, onde

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq (x+2)^2\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq y - \frac{1}{16}y^3\},$$

$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq y \leq 0, -2 \leq x \leq y - \frac{1}{16}y^3\}.$$

Essas regiões são ilustradas na Figura 20.

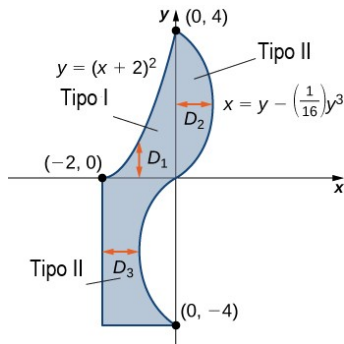


Figura: 20.

Portanto,

$$\begin{aligned} & \iint_D (2x + 5y) \, dA \\ &= \iint_{D_1} (2x + 5y) \, dA + \iint_{D_2} (2x + 5y) \, dA + \iint_{D_3} (2x + 5y) \, dA \\ &= \int_{-2}^0 \int_0^{(x+2)^2} (2x + 5y) \, dy \, dx + \int_0^4 \int_0^{y - \frac{1}{16}y^3} (2x + 5y) \, dx \, dy \\ &\quad + \int_{-4}^0 \int_{-2}^{y - \frac{1}{16}y^3} (2x + 5y) \, dx \, dy \\ &= \frac{1304}{105} \text{ (Verifique.)} \end{aligned}$$

Exemplo 11. Mostre que a área $A(D)$ de uma região D no plano xy é

$$A(D) = \iint_D 1 \, dA, \quad (7)$$

desde que a função $f(x, y) = 1$ seja integrável sobre a região D .

Solução. O cilindro sólido cuja base é D e altura é 1 tem volume igual a $A(D) \cdot 1 = A(D)$. Por lado, se $f(x, y) = 1$ é integrável sobre a região D , então o volume desse cilindro é $\iint_D 1 \, dA$. Portanto,

$$A(D) = \iint_D 1 \, dA.$$

Pelo Teorema 4 e Exemplo 11, temos

Teorema 8. Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in D$, então

$$mA(D) \leq \iint_D f(x, y) dA \leq MA(D).$$

onde $A(D)$ denota a área de D .

Exemplo 12. Estime a integral $\iint_D e^{\sin x \cos y} dA$, onde D é um disco de raio 2.

Resolução. Como $-1 \leq \sin x \cos y \leq 1$, temos

$$e^{-1} \leq e^{\sin x \cos y} \leq e^1 = e, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Aplicando o Teorema 8 para $m = e^{-1}$, $M = e$, $A(D) = 4\pi$, obtemos

$$\frac{4\pi}{e} \leq \iint_D e^{\sin x \cos y} dA \leq 4\pi e.$$

Lista de Exercícios

1. Calcule a integral dupla $\iint_Q \sin(x - y) dx dy$, sendo $Q = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$. (Resp. 0.)
2. Desenhe a região de integração no plano xy e calcule a integral iterada

$$\int_0^4 \int_0^y \sqrt{9 + y^2} dx dy.$$

(Resp. 98/3.)

3. Determine o volume do sólido limitado pelas superfícies $x^2 + y^2 = 16$ e $z = 4x$ para $x \geq 0$. (Resp. 512/3.)
4. Encontre a área da região D limitada abaixo pela curva $y = x^2$ e acima pela reta $y = 2x$ no primeiro quadrante. (Resp. 4/3.)

5. Determine a região de integração D , esboce-a no plano xy e troque a ordem de integração da integral iterada

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx.$$

6. Calcule a integral dupla $\iint_Q \cos(y^3) dx dy$, sendo Q a região no plano xy limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ e $x = 0$. (Resp. $(\sin 8)/3$.)
7. Determine o volume do sólido limitado pelas superfícies $z = 1 - y^2$, $x + z = 2$ e $x = 2$ para $z \geq 0$. (Resp. $8/15$.)

8. No cálculo da integral dupla de uma função f sobre uma região D foi obtida uma soma de integrais iteradas como a que se segue

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y) dx dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y) dx dy.$$

- (a) Desenhe a região D no plano xy .
 - (b) Expresse a integral dupla em uma única integral iterada com ordem de integração contrária.
9. Encontre o volume do sólido limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$.

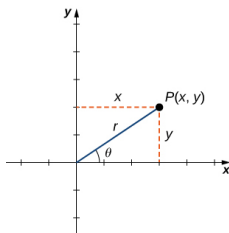
Coordenadas Polares

Seja P um ponto do plano xy , cujas coordenadas cartesianas são (x, y) . Este ponto tem coordenadas *coordenadas polares* (r, θ) , definidas pelas relações:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

A coordenada r é a distância de $P = (x, y)$ à origem O do plano e θ é o ângulo entre o semieixo positivo Ox e o segmento orientado OP , medido a partir do semieixo Ox , tomando como positivo o sentido anti-horário. Assim, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e

$$\theta = \arctan(y/x), \text{ se } x \neq 0, \text{ e } \theta \in \{\frac{\pi}{2} \pm k\pi : k \in \mathbb{N}\}, \text{ se } x = 0.$$



Exemplo 1. Encontre as coordenadas polares do ponto cujas coordenadas cartesianas são $(1, \sqrt{3})$.

Solução. Temos $x = 1$, $y = \sqrt{3}$, de modo que $r = \sqrt{1+3} = 2$. Também,

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto $\theta = \pi/3$, e as coordenadas polares são $(2, \pi/3)$.

Exemplo 2. A equação de uma circunferência de raio 3 e centro na origem é simplesmente $r = 3$. Isto expressa que a distância do ponto (x, y) a origem é a constante 3. Seja D o disco de raio 3 centrado na origem. Assim, D é a região limitada pela circunferência. Então D é o conjunto dos pontos (x, y) tais que as coordenadas polares satisfazem $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 3$. Assim D corresponde a um retângulo D^* no plano $r\theta$ dos (r, θ) que satisfazem $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 3$ por meio da transformação

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta.$$

Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Às vezes, as integrais duplas são muito mais fáceis de avaliar se alterarmos as coordenadas retangulares para coordenadas polares. No entanto, antes de descrevermos como fazer essa mudança, precisamos estabelecer o conceito de integral dupla em uma região retangular polar.

Quando definimos a integral dupla para uma função contínua em coordenadas retangulares em uma região retangular plana R , dividimos R em subretângulos com lados paralelos aos eixos coordenados. Esses lados têm valores x constantes ou valores y constantes.

Em coordenadas polares, a forma com que trabalhamos é um *retângulo polar*, cujos lados têm valores r constantes ou valores θ constantes. Isso significa que podemos descrever um retângulo polar como na Figura 21, com

$$R = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

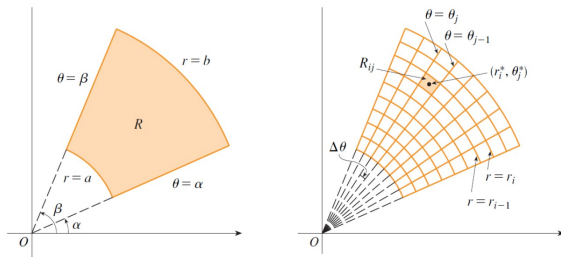


Figura: 21. À esquerda: um retângulo polar R . À direita: R dividido em subretângulos polares R_{ij} .

Para calcular a integral dupla $\iint_R f(x, y) dA$, onde R é um retângulo polar, dividimos o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de comprimentos iguais a $\Delta r = (b - a)/m$ e dividimos o intervalo $[\alpha, \beta]$ em n subintervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ de comprimentos iguais a $\Delta \theta = (\beta - \alpha)/n$. Então os círculos $r = r_i$ e os raios $\theta = \theta_j$ dividem o retângulo polar R em mn subretângulos polares

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}.$$

mostrados na Figura 21. O centro dos subretângulos polares R_{ij} tem coordenadas polares (r_i^*, θ_j^*) , onde

$$r_i^* = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}, \quad \theta_j^* = \frac{\theta_{j-1} + \theta_j}{2}$$

Lembrando que a área de um setor circular de raio r e ângulo central θ é $\frac{1}{2}r^2\theta$, a área de R_{ij} é

$$\begin{aligned}\Delta A &= \frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta = r_i^* \Delta r \Delta\theta.\end{aligned}$$

Usando que as coordenadas retangulares do centro do subretângulo polares R_{ij} é $(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*)$, uma soma de Riemann de $f(x, y)$ em R é

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \Delta A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) r_i^* \Delta r \Delta\theta. \quad (8)$$

Assim,

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) r_i^* \Delta r \Delta\theta.$$

(9)

Por outro lado, se definirmos a função $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)r$ então a soma de Riemann na equação (24) pode ser escrita como

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(r_i^*, \theta_j^*) \Delta r \Delta \theta, \quad (10)$$

que é a soma de Riemann de $g(r, \theta)$ em $[a, b] \times [\alpha, \beta]$, ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(r_i^*, \theta_j^*) \Delta r \Delta \theta &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_a^b g(r, \theta) dr \right] d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \right] d\theta \end{aligned} \quad (11)$$

Combinando (9) com (10) e (11), obtemos

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_a^b r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr \right] d\theta.$$

Resumindo:

Mudança para Coordenadas Polares numa Integral Dupla

Se f for contínua em um retângulo polar R dado por

$$R = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\},$$

onde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, então

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_a^b r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr \right] d\theta. \quad (12)$$

Exemplo 3. Calcule $\iint_D (x^2 + y^2) dA$, onde D é a região no semiplano superior limitado pelas circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Solução. A região D pode ser descrita em coordenadas retangulares como

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

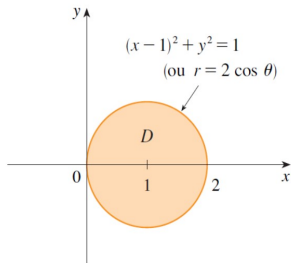
Em coordenadas polares, D pode ser escrito como

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

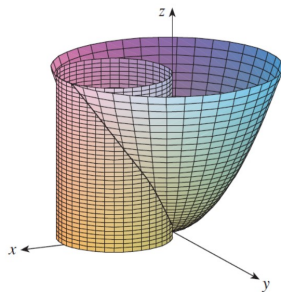
Portanto, pela fórmula (13), temos

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 [(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2] r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 [r^2] r dr d\theta = \int_0^\pi \int_1^2 r^3 dr d\theta \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_1^2 r^3 dr = \pi \frac{r^4}{4} \Big|_1^2 \\ &= \frac{15\pi}{4} \end{aligned}$$

Exemplo 4. Calcule o volume do sólido que está sob o parabolóide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy , e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.



(a)



(b)

Figura: 22. (a) Disco D (base do sólido). (b) Sólido.

Solução. O sólido está acima do disco D (Figuras 22 (a) e (b)) cuja fronteira é a circunferência de equação

$$x^2 + y^2 = 2x, \text{ ou seja } (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Em coordenadas polares a equação $x^2 + y^2 = 2x$ se escreve como $r = 2 \cos \theta$. Portanto, o disco D é dado em coordenadas polares por

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta\}.$$

Portanto, pela fórmula (13), temos

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 r dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^{2 \cos \theta} d\theta \\ &= 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \theta)^2 \theta d\theta \\ &= 8 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right)^2 \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} (1 + 2 \cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \left(1 + 2 \cos(2\theta) + \frac{1 + \cos(4\theta)}{2} \right) d\theta \\ &= 2 \left(\frac{3}{2} \theta + \sin(2\theta) + \frac{1}{8} \sin(4\theta) \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Regiões Polares Gerais

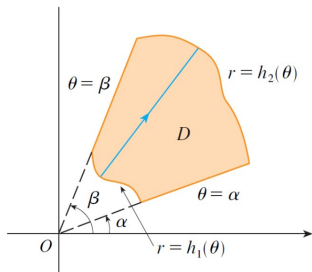


Figura: 23. $D = \{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$

O que fizemos até aqui pode ser estendido para tipos de região mais gerais, como mostrado na Figura 23. Isso é semelhante a uma região em coordenadas retangulares do Tipo II. Combinando a fórmula (13) com o Teorema de Fubini, obtemos:

Se f for contínua numa região polar da forma

$$D = \{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\},$$

onde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, então

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta. \quad (13)$$

Em particular, quando $f(x, y) = 1$ para todo $(x, y) \in D$, $h_1(\theta) = 0$ e $h_2(\theta) = h(\theta)$ nessa fórmula, vemos que a área da região D limitada por $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ e $r = h(\theta)$ é

$$A(D) = \iint_D 1 dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{h(\theta)} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} h(\theta)^2 d\theta$$

que é o mesmo que foi obtido no Cálculo II.

Exemplo 5. Calcule a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = |\cos(2\theta)|$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Solução. A curva descrita pela equação

$$r = \cos(2\theta), \quad -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4,$$

é uma pétala da rosácea de quatro pétalas inscrita na circunferência de raio 1 e centro na origem, mostrada na Figura 24 a seguir.

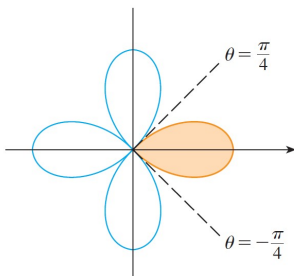


Figura: 24. Uma pétala da rosácea $r = \cos(2\theta)$

A região D contida em um laço da rosácea corresponde à região

$$D = \{(r, \theta) : -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4, 0 \leq r \leq \cos(2\theta)\}.$$

Sua área é

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D 1 \, dA = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos(2\theta))^2 \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos(4\theta)) \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left(\theta + \frac{1}{4} \sin(4\theta) \right) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Lista de Exercícios

1. Calcule $\iint_D \ln(x^2 + y^2) dA$, sendo D a região no primeiro quadrante do plano xy situada entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$. (Resp. $\frac{\pi}{4}(8 \ln 2 - 3)$.)
2. Calcule o volume limitado pelas superfícies $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2y$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. (Resp. $32/9$.)
3. Determine a área da região D no plano xy definida por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \text{ e } x^2 + y^2 \geq 4\}.$$

$$(\text{Resp. } \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}.)$$

4. Determine o volume do sólido W dado por

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 25 \text{ e } x^2 + y^2 \geq 9\}.$$

$$(\text{Resp. } \frac{256\pi}{3}.)$$

5. (a) Definimos uma integral imprópria sobre todo \mathbb{R}^2 por

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dA$$

onde D_a é o disco com raio a e centro na origem. Mostre que

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = \pi.$$

(b) Uma definição equivalente da integral I é

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)} dA$$

onde S_a é o quadrado com vértices $(\pm a, \pm a)$. Use essa definição para mostrar que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \pi.$$

(c) Deduza

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

(d) Fazendo a mudança de variável $t = \sqrt{2}x$, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

(Esse é um resultado fundamental para probabilidade e estatística.)

Aplicações de Integrais Duplas

Já discutimos algumas aplicações de integrais múltiplas, como encontrar áreas, volumes e o valor médio de uma função em uma região limitada. Vamos agora usar integrais duplas para determinar

- ▶ a massa, centro de massa e os momentos de de uma lâmina plana com densidade variável;
- ▶ as probabilidades para variáveis aleatórias;
- ▶ a área da superfície do gráfico de uma função.

Densidade e Massa

Suponha que uma lâmina ocupe uma região D no plano xy , e seja $\rho(x, y)$ sua densidade (em unidades de massa por unidade de área) em qualquer ponto (x, y) , onde ρ é uma função contínua. Portanto,

$$\rho(x, y) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta A},$$

onde Δm e ΔA são a massa e a área de um pequeno retângulo contendo o ponto (x, y) e o limite é tomado quando as dimensões do retângulo tendem para 0 (Figura 25 a).

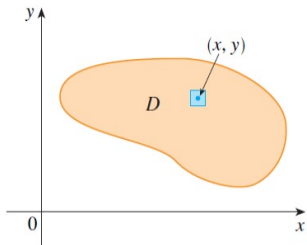


Figura: 25 a. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

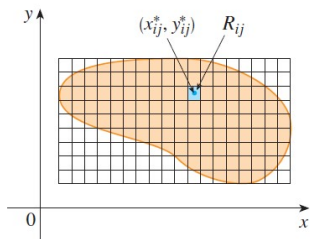


Figura: 25 b.(crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Para encontrar a massa total m da lâmina, dividimos um retângulo R contendo a região D em pequenos retângulos R_{ij} com área ΔA (Figura 26 b), e considerando $\rho(x, y)$ como 0 fora de D . Se escolhermos (x_{ij}^*, y_{ij}^*) como pontos amostrais, então a massa m_{ij} da parte da lâmina que ocupa R_{ij} é aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$. Sejam k e l o número de subintervalos em x e y , respectivamente. Se somarmos todas essas massas, obteremos uma aproximação da massa total da lâmina:

$$m \approx \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A.$$

Como a soma do segundo membro é uma soma de Riemann da função ρ em D , segue que a massa da lâmina é

$$m = \lim_{k, l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D \rho(x, y) dA$$

Os físicos consideram ainda outros tipos de densidade que podem ser tratados da mesma maneira. Por exemplo: se uma carga elétrica está distribuída sobre uma região D e $\rho(x, y)$ é a densidade de carga (em unidades de carga por unidade de área) em qualquer ponto $(x, y) \in D$, então a carga total Q é dada por

$$Q = \iint_D \rho(x, y) dA.$$

Exemplo 1. Considere uma lâmina triangular D com vértices $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$ e com densidade $\rho(x, y) = xy \text{ kg/m}^2$. Encontre a massa total.

Solução. A região D pode ser descrita em coordenadas retangulares como

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 3 - x, 0 \leq x \leq 3\}.$$

Usando a expressão desenvolvida para a massa, vemos que

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x, y) dA = \int_0^3 \int_0^{3-x} xy \, dy dx \\ &= \int_0^3 \left[x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=3-x} \right] dx = \int_0^3 \frac{1}{2} x (3-x)^2 \\ &= \left[\frac{9x^2}{4} - x^3 + \frac{x^4}{8} \right] \Big|_0^3 = \frac{27}{8} \text{ kg}. \end{aligned}$$

Momentos e Centro de massa

Considere uma lâmina com densidade $\rho(x, y)$ que ocupa uma região plana D . O momento de uma partícula em torno de um eixo x é o produto de sua massa pela distância ao eixo (“braço da alavanca”). Particionando D em retângulos pequenos (Figura 25 b), então a massa de R_{ij} é aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$, e podemos aproximar o momento de R_{ij} em relação ao eixo x por $y_{ij}^*\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$. Se somarmos todos esses momentos, obteremos uma aproximação da momento total da lâmina em relação ao eixo x

$$M_x \approx \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l y_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A.$$

Como a soma do segundo membro é uma soma de Riemann da função $y\rho(x, y)$ em D , segue que o momento da lâmina com relação ao eixo x é

$$M_x = \lim_{k, l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l y_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D y \rho(x, y) \, dA$$

Da mesma forma, o momento da lâmina em relação ao eixo y é

$$M_y = \lim_{k,l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l x_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D x \rho(x, y) dA$$

Definimos o centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) da lâmina de modo que

$$m\bar{x} = M_y \quad \text{e} \quad m\bar{y} = M_x$$

ou seja,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) dA}{\iint_D \rho(x, y) dA} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) dA}{\iint_D \rho(x, y) dA} \quad (14)$$

Fisicamente o centro de massa é ponto em que a massa total da lâmina poderia estar concentrada sem alterar seu momento em relação a qualquer dos eixos x e y .

Quando a densidade ρ é constante, ou seja, quando a massa da lâmina está uniformemente distribuída, os ρ podem ser retirados das integrais em (14) e cancelados. Nesse caso, o centro de massa é o centro geométrico da região D e, por essa razão, é chamado de **centróide**.

Exemplo 2. Considere novamente a mesma região triangular D com vértices $(0, 0)$, $(0, 3)$ e $(3, 0)$ e densidade $\rho(x, y) = xy \text{ kg/m}^2$. Encontre o centro de massa.

Solução. Usando as fórmulas que desenvolvemos, temos

$$M_x = \iint_D y \rho(x, y) dA = \int_0^3 \int_0^{3-x} xy^2 dy dx = \frac{81}{20},$$

$$M_y = \iint_D x \rho(x, y) dA = \int_0^3 \int_0^{3-x} x^2 y dy dx = \frac{81}{20},$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{81/20}{27/8} = \frac{6}{5},$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{81/20}{27/8} = \frac{6}{5}.$$

Portanto, o centro de massa é o ponto $(6/5, 6/5)$.

Exemplo 3. A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância ao centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.

Solução. Vamos posicionar a lâmina na metade superior do círculo $x^2 + y^2 = a^2$. Então a distância do ponto (x, y) ao centro do círculo $(0, 0)$ é $\sqrt{x^2 + y^2}$. Portanto, a função densidade é

$$\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2},$$

onde K é uma constante. Tanto a função densidade como o formato da lâmina sugerem a conversão para coordenadas polares. Assim, $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ e a região D é dada por $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Logo a massa da lâmina é

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_D \rho(x, y) \, dA = \iint_D K \sqrt{x^2 + y^2} \, dA \\
 &= \int_0^\pi \int_0^a [Kr] r dr d\theta = K \int_0^\pi \int_0^a r^2 dr \\
 &= K\pi \frac{r^3}{3} \Big|_0^a = \frac{K\pi a^3}{3}
 \end{aligned}$$

Tanto a lâmina como a função densidade são simétricas com relação ao eixo y e, assim, o centro de massa precisa estar sobre o eixo y , ou seja, $\bar{x} = 0$. A coordenada \bar{y} é dada por

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) dA}{m} = \frac{3}{K\pi a^3} \int_0^\pi \int_0^a r \sin \theta (Kr) r dr d\theta \\ &= \frac{3}{\pi a^3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^a r^3 dr = \frac{3}{\pi a^3} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^a \\ &= \frac{3}{\pi a^3} \frac{2a^4}{4} = \frac{3a}{2\pi}.\end{aligned}$$

Portanto, o centro de massa está localizado no ponto $(0, 3a/2\pi)$.

Momento de Inércia

Enquanto os **primeiros momentos** de um objeto dizem respeito do **equilíbrio e do torque** sofrido em torno de diferentes eixos em um campo gravitacional, se um objeto for um corpo que gira estaremos mais interessados na quantidade de energia armazenada no corpo ou na quantidade de energia que é gerada por um objeto girando a uma velocidade escalar específica. É aqui que entra o **momento de inércia**.

O momento de inércia de uma partícula de massa m em relação a um eixo é definido como mr^2 , onde r é a distância da partícula ao eixo. Estendemos o conceito a uma lâmina com função densidade e que ocupa uma região D pelo mesmo processo que fizemos para os momentos normais. Dividimos D em pequenos retângulos, aproximamos o momento de inércia de cada sub-retângulo em relação ao eixo x e tomamos o limite da soma quando o número de sub-retângulos aumenta indefinidamente.

O resultado é o momento de inércia da lâmina em relação ao eixo x :

$$I_x = \lim_{k,l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (y_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D y^2 \rho(x, y) dA.$$

Da mesma forma, o momento de inércia em relação ao eixo y é

$$I_y = \lim_{k,l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (x_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D x^2 \rho(x, y) dA.$$

Às vezes, precisamos encontrar o momento de inércia de um objeto em relação à origem, que é conhecido como momento de inércia polar. Denotamos isso por I_0 e obtemos somando os momentos de inércia I_x e I_y . Por isso

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA.$$

Exemplo 4. Determine os momentos I_x, I_y, I_0 do disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio a .

Resolução. Usando a mudança para coordenadas polares na integral dupla, temos

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r dr d\theta \\ &= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi \rho a^4}{2}. \end{aligned}$$

em vez de calcularmos I_x e I_y diretamente, vamos usar o fato que $I_x + I_y = I_0$ e que pela simetria do problema $I_x = I_y$. Assim,

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi \rho a^4}{4}.$$

No Exemplo 4, observe que a massa do disco é

$$m = \text{densidade} \times \text{area} = \rho(\pi a^2)$$

de modo que o momento de inércia do disco em torno da origem (como uma roda em torno de seu eixo) pode ser escrito como

$$I_0 = \frac{\pi \rho a^4}{2} = \frac{1}{2}(\rho \pi a^2)a^2 = \frac{1}{2}ma^2.$$

Portanto, se aumentarmos a massa ou o raio do disco, aumentaremos o momento de inércia do disco. Em geral, o momento de inércia tem um papel em um movimento de rotação semelhante ao que a massa tem em um movimento linear. O momento de inércia de uma roda é o que torna difícil começar ou parar a rotação da roda, assim como a massa do carro dificulta seu movimento inicial e a frenagem.

O raio de giração de uma lâmina em relação a um eixo é o número R tal que

$$mR^2 = I$$

onde m é a massa da lâmina e I é o momento de inércia em relação ao eixo dado. Esta equação nos diz que se a massa de uma lâmina estiver concentrada a uma distância R do eixo, então o momento de inércia dessa massa pontual será o mesmo que o momento de inércia da lâmina. Em particular, raio de giração \hat{y} em relação ao eixo x e o raio de giração \hat{x} em relação ao eixo y têm equações

$$m\hat{y}^2 = I_x, \quad m\hat{x}^2 = I_y.$$

Então (\hat{x}, \hat{y}) é o ponto no qual podemos concentrar a massa da lâmina sem modificar os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados resultantes. (Observe a analogia com o centro de massa.)

Exemplo 5. Determine o raio de giração em torno do eixo x do disco do Exemplo 4.

Solução.

$$\hat{y}^2 = \frac{I_x}{m} = \frac{\frac{\pi \rho a^4}{4}}{\rho(\pi a^2)} = \frac{a^2}{4}$$

Portanto, o raio de giração em relação ao eixo x é $\hat{y} = \frac{a}{2}$.

Analogamente, $\hat{x} = \frac{a}{2}$, que é metade do raio do disco.

Probabilidade

Consideremos agora um par de variáveis aleatórias X e Y como o tempo de vida de dois componentes de uma máquina ou a altura e o peso de uma pessoa adulta escolhida ao acaso. A **função densidade conjunta** de X e Y é uma função f de duas variáveis tais que a **probabilidade** de que (X, Y) esteja em uma região D é

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dA.$$

Como probabilidades não podem ser negativas e são medidas na escala de 0 a 1, a função densidade conjunta tem as seguintes propriedades:

- ▶ $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) ,
- ▶ $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dA = 1.$

Exemplo 6. Se a função densidade conjunta de X e Y for dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{se } 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

determine o valor da constante C . Então, calcule $P(X \leq 7, Y \geq 2)$.

Solução. Determinamos o valor de C garantindo que a integral dupla de f seja igual a 1. Como $f(x, y) = 0$ para (x, y) fora do retângulo $[0, 10] \times [0, 10]$, temos

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dA &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = \int_0^{10} \int_0^{10} f(x, y) dy dx \\ &= \int_0^{10} \int_0^{10} C(x + 2y) dy dx = C \int_0^{10} (xy + y^2) \Big|_{y=0}^{y=10} dx \\ &= C \int_0^{10} (10x + 100) dx = 1500C. \end{aligned}$$

Portanto, $1500C = 1$ se e somente $C = 1/1500$.

Agora, podemos calcular a probabilidade de X ser no máximo 7 e de Y ser no mínimo 2:

$$\begin{aligned} P(X \leq 7, Y \geq 2) &= \int_{-\infty}^7 \int_2^{\infty} f(x, y) dy dx \\ &= \int_0^7 \int_2^{10} \frac{1}{1500} (x + 2y) dy dx \\ &= \frac{1}{1500} \int_0^7 (xy + y^2) \Big|_{y=2}^{y=10} dx \\ &= \frac{1}{1500} \int_0^7 (8x + 96) dx \\ &= \frac{1}{1500} (4x^2 + 96x) \Big|_0^7 \\ &= \frac{868}{1500} \approx 0.5787 \end{aligned}$$

Suponha que X seja uma variável aleatória com função densidade de probabilidade e Y seja uma variável aleatória com função densidade . Então, X e Y são ditas **variáveis aleatórias independentes** se a função densidade conjunta for o produto das funções densidade individuais:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

O modelo do tempo de espera é dado pela função densidade exponencial

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

onde μ é o tempo médio de espera. No próximo exemplo consideraremos a situação com dois tempos de espera independentes.

Exemplo 7. O gerente de um cinema determina que o tempo médio de espera na fila para as pessoas comprarem entrada para o filme da semana seja de dez minutos e que o tempo médio que levam para comprar pipoca seja de cinco minutos. Supondo que os tempos de espera sejam independentes, determine a probabilidade de um espectador esperar menos de 20 minutos até se dirigir a seu assento.

Solução. Supondo que os tempos de espera X para comprar a entrada e Y para comprar pipoca possam ser modelados por funções densidade de probabilidade exponencial, podemos escrever as funções densidade individuais como

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{10}e^{-x/10} & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ \frac{1}{5}e^{-y/5} & \text{se } y \geq 0 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned}P(X + Y < 20) &= \iint_D f(x, y) dA = \int_0^{20} \int_0^{20-x} \frac{1}{50} e^{-x/10} e^{-y/5} dy dx \\&= \frac{1}{50} \int_0^{20} e^{-x/10} (-5) e^{-y/5} \Big|_{y=0}^{y=20-x} dx \\&= \frac{1}{10} \int_0^{20} e^{-x/10} (1 - e^{(x-20)/5}) dx \\&= \frac{1}{10} \int_0^{20} (e^{-x/10} - e^{-4} e^{x/10}) dx \\&= 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0,7476\end{aligned}$$

Isso significa que cerca de 75% dos espectadores esperam menos de 20 minutos antes de tomarem seus assentos.

Lista de Exercícios

1. Uma carga elétrica é distribuída sobre o disco $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$, de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a carga total no disco.
2. Uma lâmina ocupa a parte do disco $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ no primeiro quadrante. Determine o centro de massa se a densidade em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao eixo x . (Resp. $(3/8, 3\pi/16)$)
3. Determine o centro de gravidade (ou centro de massa) de uma lâmina plana limitada limitada pela parábola $y = x^2$ e pelas retas $y = 0$ e $x = 4$, sabendo-se que a densidade no ponto $P = (x, y)$ é proporcional à abscissa do ponto P .

4. Considere uma pá quadrada de um ventilador com lados de comprimento 2 e com o canto inferior esquerdo colocado na origem. Se a densidade da pá for $\rho(x, y) = 1 + 0,1x$, é mais difícil girar a pá em torno do eixo x ou do eixo y ?
5. A função densidade conjunta para um par de variáveis aleatórias X e Y é

$$f(x, y) = \begin{cases} Cx(1 + y) & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Determine o valor da constante C .
(b) Encontre $P(X \leq 1, Y \geq 1)$.
(c) Encontre $P(X + Y \leq 1)$

(Resp. (a) $1/2$ (b) $0,375$ (c) $5/48 \approx 0,1042$)

Mudança de Variáveis em Integrais Duplas

Na integração de funções de uma variável, usamos o método de substituição para simplificar o cálculo de uma integral. Este método é baseado na fórmula

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u))g'(u) du,$$

onde $x = g(u)$, $a = g(c)$, $b = g(d)$, sendo g invertível com derivada contínua em $[c, d]$ e f contínua em $[a, b]$. Outro modo de escrever essa fórmula é o seguinte

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(x(u)) \frac{dx}{du} du.$$

Mudança de variáveis pode também ser útil em integrais duplas e triplas. Já vimos exemplo disso na mudança para coordenadas polares em integrais duplas. As novas variáveis r e θ estão relacionadas com as variáveis x e y pelas equações

$$\begin{aligned}x &= g(r, \theta) = r \cos \theta, \\y &= h(r, \theta) = r \sin \theta,\end{aligned}$$

e a fórmula de mudança de variáveis que vimos na Aula 22 pode ser escrita como

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

onde S é a região no plano $r\theta$ que corresponde à região R no plano xy .

De modo geral, consideraremos uma mudança de variáveis dada pela **transformação** T do plano uv no plano xy :

$$T(u, v) = (x, y)$$

onde x e y estão relacionados com u e v pelas equações

$$x = g(u, v) \quad \text{e} \quad y = h(u, v),$$

ou, como às vezes escrevemos,

$$x = x(u, v) \quad \text{e} \quad y = y(u, v), \tag{15}$$

Uma transformação $T : S \rightarrow R$ no plano nada mais é do que uma função cujo domínio R e imagem S são ambos subconjuntos de \mathbb{R}^2 . Uma transformação $T : S \rightarrow R$, definida como $T(u, v) = (x, y)$, é chamada **injetora** se não houver dois pontos em S com a mesma imagem em R . Se T é injetora, então existe uma transformação inversa T^{-1} do plano xy para o plano uv e é possível inverter as equações (24) em termos de x e y :

$$u = u(x, y) \quad \text{e} \quad v = v(x, y).$$

A Figura 28 mostra o efeito de uma transformação injetora T em uma região S do plano uv . T transforma S em uma região R no plano xy , denominada imagem de T , constituída das imagens de todos os pontos de S .

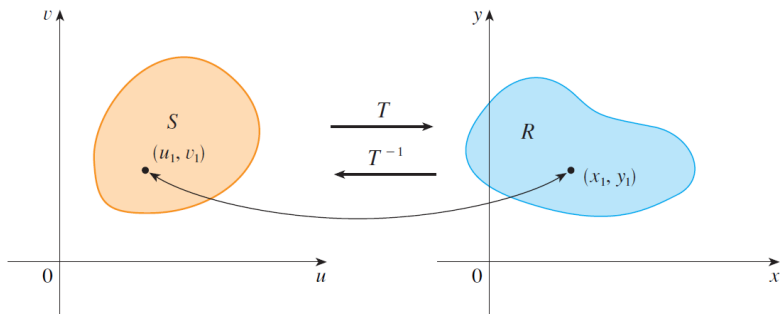


Figura: 28. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Exemplo 1. Uma transformação T é definida pelas equações

$$x = u^2 - v^2 \quad \text{e} \quad y = 2uv$$

Determine a imagem do quadrado

$$S = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$$

pela transformação T .

Solução. A transformação leva a fronteira de S na fronteira da imagem. Assim, começamos por determinar a imagem das arestas de S . A primeira aresta, S_1 , é dada por $v = 0$ e $0 \leq u \leq 1$. (Veja a Figura 29.) Das equações dadas, temos

$$x = u^2 \text{ e } y = 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \text{ e } y = 0.$$

Então, S_1 é levada no segmento de reta que liga $(0, 0)$ a $(1, 0)$ no plano xy .

A segunda aresta, S_2 , é $u = 1$ e $0 \leq v \leq 1$ e, colocando nas equações dadas, temos

$$x = 1 - v^2 \text{ e } y = 2v.$$

Eliminando v , obtemos

$$x = 1 - \frac{y^2}{4}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

que é um arco de uma parábola. Da mesma forma, S_3 é dada por $v = 1$ e $0 \leq u \leq 1$, cuja imagem é o arco parabólico

$$x = \frac{y^2}{4} - 1, \quad -1 \leq x \leq 0.$$

Finalmente, S_4 é dada por $u = 0$ e $0 \leq v \leq 1$, cuja imagem é $x = -v^2$, $y = 0$, ou seja,

$$-1 \leq x \leq 0 \text{ e } y = 0.$$

A imagem do quadrado S é a região R (Figura 29) limitada pelo eixo x e pelas parábolas dadas $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ e $x = \frac{y^2}{4} - 1$.

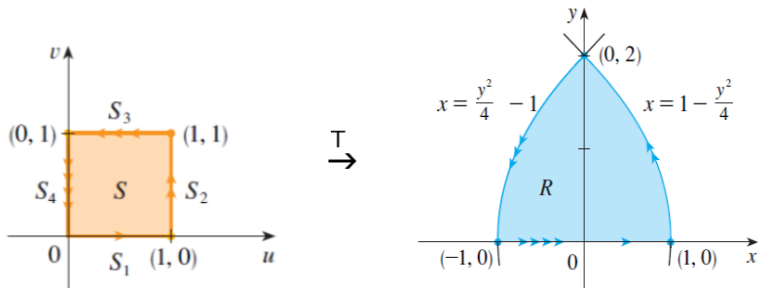


Figura: 29 (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Seja $T(u, v) = (g(u, v), h(u, v))$ uma transformação, onde

$$x = g(u, v) \quad \text{e} \quad y = h(u, v)$$

são de classe C^1 , ou seja, as derivadas parciais de primeira ordem g_u , g_v , h_u e h_v existem e também são contínuas. Queremos ver como T transforma uma pequena região retangular S , com dimensões Δu e Δv , no plano uv (veja a Figura 30).

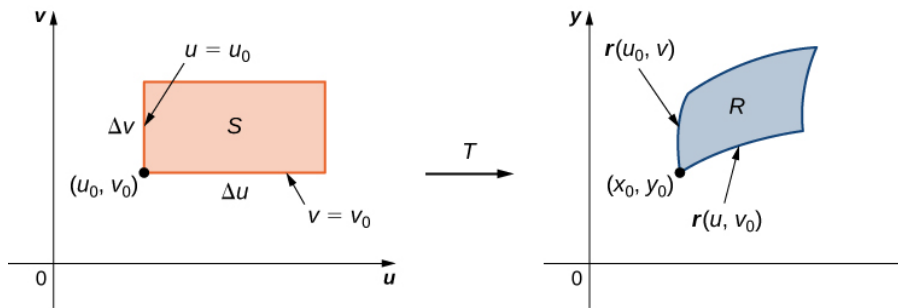


Figura: 30.

Como $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$, temos o vetor posição $\vec{r}(u, v) = g(u, v)\vec{i} + h(u, v)\vec{j}$ da imagem do ponto (u, v) . Suponha que (u_0, v_0) seja a coordenada do ponto do vértice inferior esquerdo, cuja imagem é o ponto $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$. A reta $v = v_0$ tem como imagem a curva da imagem dada pela função vetorial $\vec{r}(u, v_0)$, e o vetor tangente em (x_0, y_0) para a curva da imagem é

$$\vec{r}_u = g_u(u_0, v_0)\vec{i} + h_u(u_0, v_0)\vec{j} = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j}$$

Da mesma forma, a imagem da reta $u = u_0$ é a curva da imagem com função vetorial $\vec{r}(u_0, v)$, e o vetor tangente em (x_0, y_0) para a curva da imagem é

$$\vec{r}_v = g_v(u_0, v_0)\vec{i} + h_v(u_0, v_0)\vec{j} = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j}$$

Podemos aproximar a região imagem $R = T(S)$ pelo paralelogramo determinado pelos vetores secantes

$$\vec{a} = \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0) \quad \text{e} \quad \vec{b} = \vec{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0)$$

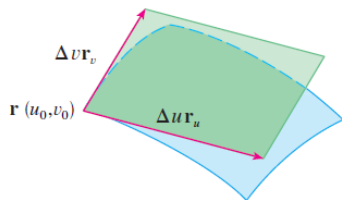
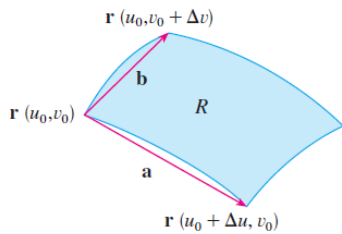


Figura: 31.

Agora, note que

$$\vec{r}_u = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

Assim,

$$\vec{a} = \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0) \approx \Delta u \vec{r}_u$$

Da mesma forma

$$\vec{b} = \vec{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0) \approx \Delta v \vec{r}_v$$

Sendo assim, podemos aproximar R por um paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u \vec{r}_u$ e $\Delta v \vec{r}_v$ (Figura 31).

Portanto, podemos aproximar a área ΔA da imagem R pela área desse paralelogramo, que é

$$\|\Delta u \vec{r}_u \times \Delta v \vec{r}_v\| = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \Delta u \Delta v$$

Calculando o produto produto vetorial, temos

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \vec{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Como $\|\vec{k}\| = 1$, temos

$$\Delta A \approx \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \Delta u \Delta v = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| \Delta u \Delta v,$$

onde as derivadas parciais são calculadas em (u_0, v_0) . O determinante que aparece nesse cálculo é chamado **jacobiano** da transformação e tem uma notação especial:

Definição. O jacobiano da transformação T dada por

$$x = g(u, v) \quad \text{e} \quad y = h(u, v)$$

é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Agora vamos ver como a mudança de variáveis afeta a integral dupla. Para isso, dividimos a região S do plano em retângulos S_{ij} e chamamos suas imagens no plano xy de R_{ij} . (Veja a Figura 32.)

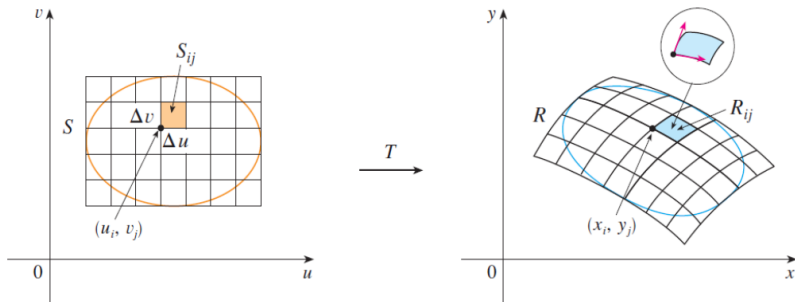


Figura: 32.

Aplicando a aproximação a cada R_{ij} , aproximamos a integral dupla de uma função contínua f em R , como segue

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) dA &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A \\ &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(g(u_i, v_j), h(u_i, v_j)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v\end{aligned}$$

onde o jacobiano é calculado em (u_i, v_j) . Observe que a soma dupla é a soma de Riemann da função $f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$.

A argumentação acima sugere que o seguinte teorema seja verdadeiro.

Teorema da Mudança de Variáveis em Integrais Duplas.

Seja $T : S \rightarrow R$ uma transformação de classe C^1 e injetora, cujo jacobiano seja não nulo em S . Se f é uma função integrável em $R = T(S)$, então

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Esse teorema diz que mudamos de uma integral em x e y para uma integral em u e v escrevendo x e y em termos de u e v e escrevendo

$$dA = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Observação. O teorema da mudança de variáveis ainda é válido se o jacobiano de T for nulo ou T deixa de ser injetora em subconjuntos de S que possam ser descritos por um finito de pontos ou por um conjunto suave ou por uma união finita destes dois tipos.

Exemplo 2. Utilize a mudança de variáveis

$$x = u^2 - v^2 \quad \text{e} \quad y = 2uv$$

para calcular a integral $\iint_R y dA$, onde R é a região limitada pelo eixo x e pelas parábolas $y^2 = 4 - 4x$, $y^2 = 4 + 4x$, $y \geq 0$.

Solução. A região R está mostrada na Figura 29. No Exemplo 1, descobrimos que $T(S) = R$, onde S é o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. De fato, a razão que nos levou a fazer a mudança de variável para calcular a integral é que S é uma região muito mais simples que R . Vamos calcular o jacobiano:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$$

para todo $(u, v) \in S$, exceto para $(u, v) = (0, 0)$.

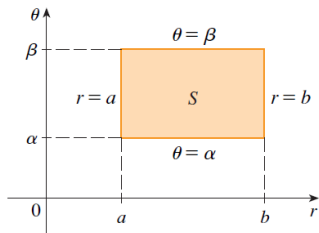
Portanto, pelo Teorema da Mudança de Variáveis,

$$\begin{aligned}\iint_R y dA &= \iint_S 2uv \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv \\&= \int_0^1 \int_0^1 2uv 4(u^2 + v^2) dudv \\&= 8 \int_0^1 \int_0^1 (u^3 v + uv^3) dudv \\&= 8 \int_0^1 \left(\frac{1}{4} u^4 v + \frac{1}{2} u^2 v^3 \right) \Big|_{u=0}^{u=1} dv \\&= \int_0^1 (2v + 4v^3) dv \\&= (v^2 + v^4) \Big|_0^1 \\&= 2.\end{aligned}$$

Exemplo 3 (Mudança polar). Considere uma transformação T seja definida como $T(r, \theta) = (x, y)$ onde

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

A geometria dessa transformação é mostrada na Figura 33. T mapeia um retângulo S no plano $r\theta$ no retângulo polar R no plano xy .



T

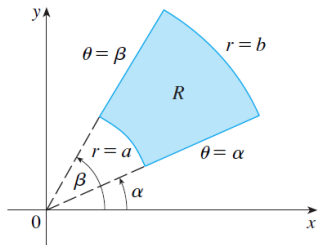


Figura: 33.

O jacobiano de T é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \geq 0.$$

Logo, o teorema de mudança de variáveis nos leva a

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \end{aligned}$$

que é o mesmo que havíamos obtido anteriormente.

Exemplo 4. Calcule a integral $\iint_R (x - y) dA$, onde R é o paralelogramo de vértices $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 5)$.

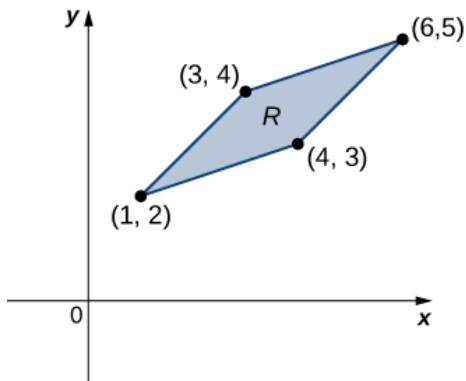


Figura: 34.

Solução. Primeiro, precisamos entender a região de integração R .
Os lados do paralelogramo estão contidos nas retas

$$x - y + 1 = 0, \quad x - y - 1 = 0, \quad x - 3y + 5 = 0, \quad x - 3y + 9 = 0.$$

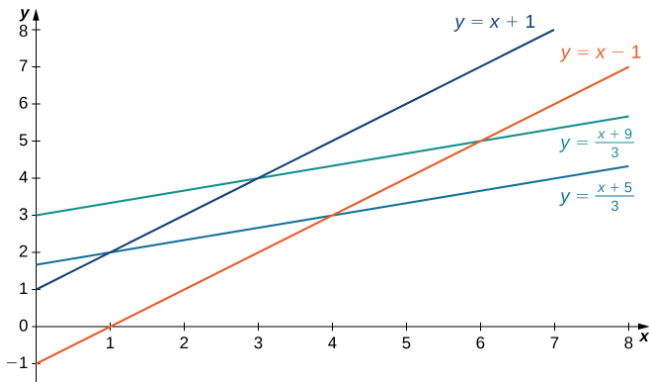


Figura: 35.

Outro modo de escrever essas retas é

$$x - y = -1, \quad x - y = 1, \quad x - 3y = -5, \quad x - 3y = -9.$$

A presença dos termos $x - y$ e $x - 3y$ nas retas que limitam o paralelogramo R sugere a mudança de variáveis

$$u = x - y, \quad v = x - 3y.$$

Então os limites de integração são $-1 \leq u \leq 1$ e $-9 \leq v \leq -5$. Para resolver em x e y , multiplicamos a primeira equação por 3 e subtraímos a segunda equação para obter

$$3u - v = 2x \Rightarrow x = \frac{3u - v}{2}$$

Além disso, se simplesmente subtrairmos a segunda equação da primeira, obtemos

$$u - v = 2y \Rightarrow y = \frac{u - v}{2}.$$

Portanto, podemos escolher a transformação

$$T(u, v) = \left(\frac{3u - v}{2}, \frac{u - v}{2} \right), \quad (u, v) \in [-1, 1] \times [-9, -5],$$

cujo jacobiano é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{2}.$$

Também, o integrando original torna-se

$$x - y = u.$$

Portanto, pelo teorema da mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned}\iint_R (x - y) dA &= \int_{-9}^{-5} \int_{-1}^1 u \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ &= \int_{-9}^{-5} \int_{-1}^1 \frac{u}{2} du dv = \int_{-9}^{-5} dv \int_{-1}^1 \frac{u}{2} du = 0.\end{aligned}$$

Teorema da Função Inversa. Considere o sistema de equações

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (16)$$

sendo $x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ definidas em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Este sistema define uma transformação $T : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = (x, y).$$

Suponha que as funções x e y possuem derivadas parciais contínuas em U e o jacobiano dessa transformação $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ é não nulo em $(u_0, v_0) \in U$, então existe uma bola aberta B de centro $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$ onde o sistema de equações (16) pode ser resolvido de modo único, com

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad (17)$$

para $(x, y) \in B$, ou seja, a transformação T possui uma inversa T^{-1} definida em B . Além disso, as funções de (17) têm derivadas parciais contínuas em B e o jacobiano da transformação da inversa T^{-1} é dado por

$$J^* = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{J}.$$

Exemplo 7. Determine a área da região R no plano limitada pela curva $(2x - 4y + 7)^2 + (x + 5y)^2 = 9$.

Solução. A equação da fronteira de R sugere a aplicação não linear definida por

$$\begin{aligned}u &= 2x - 4y + 7, \\v &= x + 5y.\end{aligned}\tag{18}$$

Como o jacobiano

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14 \neq 0,$$

as equações (18) definem uma mudança de variáveis para x e y como funções de u e v , cujo jacobiano, pelo Teorema da Função Inversa, é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{14}.$$

A região de integração S no plano uv é limitado pela curva $u^2 + v^2 = 9$. Logo, usando o Teorema da Mudanças de Variáveis em Integrais Duplas, a área pedida é

$$\iint_R dx dy = \iint_S \frac{1}{14} du dv = \frac{1}{14} (\text{área de } S) = \frac{9\pi}{14}.$$

Exemplo 8. Calcule $\iint_R (x^2 + y^2) dA$, onde R é a região no primeiro quadrante limitada pelas hipérboles $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 2$ e $xy = 4$.

Solução. As hipérboles no plano xy sugerem a transformação definida por

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= xy \end{aligned} \tag{19}$$

Esta transformação é injetora em R e o jacobiano

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2(x^2 + y^2) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Inversa, as equações (19) definem uma mudança de variáveis para x e y como funções de u e v , e

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{2\sqrt{u^2 + 4v^2}},$$

pois

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = u^2 + 4v^2.$$

A região de integração S no plano uv é o retângulo

$$S = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq u \leq 9, 2 \leq v \leq 4\}.$$

Portanto pelo Teorema da Mudança de Variáveis em Integrais Duplas,

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2 + y^2) dA &= \iint_S \sqrt{u^2 + 4v^2} \frac{1}{2\sqrt{u^2 + 4v^2}} dudv \\ &= \frac{1}{2} \iint_S dudv = \frac{1}{2} (\text{área de } S) = 8. \end{aligned}$$

Lista de Exercícios

1. Considere a transformação definida por

$$x = uv \quad \text{e} \quad y = v - u$$

- a) Usando T , Determine a imagem D no plano xy do retângulo R no plano uv de vértices $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$ e $(0, 2)$.
- b) Calcule a área de D . (Resp.: 2)

2. Considere a transformação T definida por

$$x = u + v \quad \text{e} \quad y = v - u^2$$

- a) Determine a imagem D no plano xy da região Q no plano uv limitada pelas retas $u = 0$, $v = 0$ e $u + v = 2$.
- b) Usando T , calcule $\iint_D \left(x - y + \frac{1}{4}\right)^{-1/2} dA$. (Resp.: 4)

3. Calcule $\iint_D e^{(y-x)/(y+x)} dA$, onde D é a região triangular limitada pela reta $x + y = 2$ e os eixos coordenados. (Resp.: $e - e^{-1}$)
4. Calcule a área do conjunto R no primeiro quadrante limitada pelas retas $y = x$ e $y = 2x$ e hipérboles $xy = 1$ e $xy = 2$. (Resp.: $\frac{1}{2} \ln 2$)
5. Calcule a integral $\iint_R \frac{1}{y^2} dA$, onde R é a região do exercício anterior.

Área da superfície do gráfico de uma função

Seja S a superfície com equação $z = f(x, y)$, onde f tem derivadas parciais contínuas. Para simplificar a dedução da fórmula, suporemos $f(x, y) \geq 0$ e que o domínio D de f seja um retângulo.

Dividamos D em mn subretângulos R_{ij} com área $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

Seja (x_i, y_j) o vértice inferior a esquerda de R_{ij} , seja $P_{ij} = (x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ o ponto em S (Figura 36). O plano tangente a S em P_{ij} é uma aproximação a S próximo de P_{ij} . Então, a área ΔT_{ij} da parte deste plano tangente (um paralelogramo) que fica diretamente acima de R_{ij} é uma aproximação da área ΔS_{ij} da parte de S que fica diretamente acima de R_{ij} . Portanto, a soma $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta T_{ij}$ é uma aproximação da área de S e essa aproximação parece melhorar conforme o número de retângulos aumenta. Portanto, definimos a área da superfície de S como

$$A(S) = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta T_{ij} \quad (20)$$

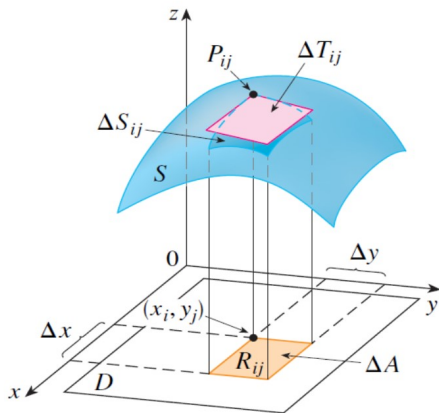


Figura: 36 (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

No que segue, vamos computar a área ΔT_{ij} do paralelogramo. Sejam \vec{a} e \vec{b} os vetores que começam em P_{ij} e ficam ao longo dos lados do paralelogramo com área ΔT_{ij} (Figura 37) Então,

$$\Delta T_{ij} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

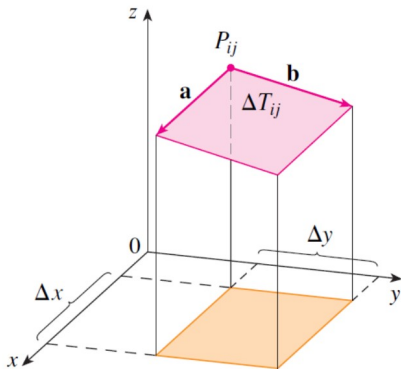


Figura: 37. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Lembrando que as derivadas parciais $f_x(x_i, y_j)$ e $f_y(x_i, y_j)$ são as inclinações das retas tangentes em P_{ij} nas direções de \vec{a} e \vec{b} .
Portanto,

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \Delta x \vec{i} + f_x(x_i, y_j) \Delta x \vec{k} \\ \vec{b} &= \Delta y \vec{j} + f_y(x_i, y_j) \Delta y \vec{k}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Delta x & 0 & f_x(x_i, y_j) \Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y(x_i, y_j) \Delta y \end{vmatrix} \\ &= -f_x(x_i, y_j) \Delta x \Delta y \vec{i} - f_y(x_i, y_j) \Delta x \Delta y \vec{j} + \Delta x \Delta y \vec{k} \\ &= \left(-f_x(x_i, y_j) \vec{i} - f_y(x_i, y_j) \vec{j} + \vec{k} \right) \Delta A\end{aligned}$$

e

$$\Delta T_{ij} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{[f_x(x_i, y_j)^2 + f_y(x_i, y_j)^2 + 1]} \Delta A$$

Por (24),

$$\begin{aligned} A(S) &= \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta T_{ij} \\ &= \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sqrt{[f_x(x_i, y_j)^2 + f_y(x_i, y_j)^2 + 1]} \Delta A \\ &= \iint_D \sqrt{[f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1]} dA. \end{aligned}$$

Definição. A área da superfície com equação $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, onde f_x e f_y são contínuas, é

$$A(S) = \iint_D \sqrt{[f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1]} dA.$$

Exemplo 1. Calcule a área da parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

Solução. O plano intercepta o parabolóide na circunferência

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 9 \end{cases}$$

Portanto, superfície dada é o gráfico de $z = x^2 + y^2$, $(x, y) \in D$, onde D é o disco no plano xy de centro na origem e raio 3. Usando a fórmula, temos

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA \\ &= \iint_D \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} dA = \\ &= \iint_D \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} dA. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} \, dA. = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\theta d\theta \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} r \, dr = 2\pi \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^3 \\ &= \frac{\pi}{6} (37\sqrt{37} - 1). \end{aligned}$$

Exemplo 2. Calcule a área da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ situada dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ay$, $a > 0$.

Solução. A porção da esfera compreendida no interior do cilindro será denotada por S e é formada por duas partes de áreas iguais, uma no hemisfério superior e a outra no inferior. Denote por S_1 a porção do hemisfério superior da esfera que está dentro do cilindro. A superfície S_1 é dada por $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $(x, y) \in D$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq ay\}$. A função $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ possui derivadas parciais contínuas em $D - \{(0, a)\}$ e

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.\end{aligned}$$

Usando fórmula da área da superfície, temos

$$\begin{aligned} A(S_1) &= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA \\ &= \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2} + 1} dA \\ &= \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned}
A(S_1) &= \int_0^\pi \int_0^{a \sin \theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr d\theta = a \int_0^\pi \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_{r=0}^{r=a \sin \theta} d\theta \\
&= a \int_0^\pi (-a|\cos \theta| + a) d\theta = a^2 \int_0^\pi (-|\cos \theta| + 1) d\theta \\
&= a^2 \left(\int_0^{\pi/2} (-\cos \theta + 1) d\theta + \int_{\pi/2}^\pi (\cos \theta + 1) d\theta \right) \\
&= a^2 \left((-\sin \theta + \theta) \Big|_0^{\pi/2} + (\sin \theta + \theta) \Big|_{\pi/2}^\pi \right) \\
&= a^2 \left((-1 + \frac{\pi}{2}) + (0 + \pi - 1 - \frac{\pi}{2}) \right) \\
&= a^2(\pi - 2).
\end{aligned}$$

Logo,

$$A(S) = 2a^2(\pi - 2).$$

Lista de Exercícios

1. Determine a área do plano $z = 2 + 3x + 4y$ que está acima do retângulo $[0, 5] \times [1, 4]$. (Resp. $15\sqrt{26}$)
2. Determine a área do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante. (Resp. $3\sqrt{14}$)
3. Determine a área do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ que está acima do retângulo com vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 2)$ e $(4, 2)$. (Resp. $12 \sin^{-1}(2/3)$)
4. Determine a área do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$. (Resp. $(\pi/6)[17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}]$)
5. Determine a área da superfície dada pela interseção dos cilindros $y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$.

Integrais Triplas

Em integrais duplas, iniciamos a discussão da integral dupla de uma função $f(x, y)$ de duas variáveis sobre uma região retangular no plano. Nesta aula definiremos a integral tripla de uma função $f(x, y, z)$ de três variáveis sobre uma caixa retangular sólida no espaço. Em seguida, estenderemos a definição para regiões mais gerais no espaço.

Definimos uma caixa retangular B em \mathbb{R}^3 como

$$\begin{aligned} B &= [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}. \end{aligned}$$

Seja $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida e limitada numa caixa retangular B .

Em analogia às integrais duplas, dividimos

- ▶ o intervalo $[a, b]$ em l subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimento $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{l}$,
- ▶ o intervalo $[c, d]$ em m subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de comprimento $\Delta y = y_j - y_{j-1} = \frac{d-c}{m}$ e
- ▶ o intervalo $[e, f]$ em n subintervalos $[z_{k-1}, z_k]$ de comprimento $\Delta z = z_k - z_{k-1} = \frac{f-e}{n}$.

Então a caixa retangular B é subdividida em lmn subcaixas $B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$, como mostrado na Figura 38. Cada subcaixa tem volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.

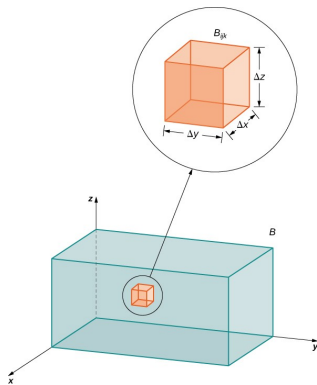


Figura: 38. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Para cada i, j e k , considere um ponto amostral $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ em cada subcaixa B_{ijk} e forme a soma tripla de Riemann

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V. \quad (21)$$

Definimos a integral tripla em termos do limite de uma soma tripla de Riemann, como fizemos para a integral dupla em termos de uma soma dupla de Riemann.

Definição. Seja $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida e limitada numa caixa retangular B . A integral tripla de uma função $f(x, y, z)$ sobre uma caixa retangular B é definida como

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V \quad (22)$$

se o limite existir e for independente da escolha de $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ em cada B_{ijk} .

Quando a integral tripla existe em B , diz-se que a função $f(x, y, z)$ é integrável em B . A integral tripla sempre existe se $f(x, y, z)$ é contínua em B . A continuidade é suficiente, mas não necessária; em outras palavras, se f é limitada em B e contínua exceto possivelmente em uma reunião finita de conjuntos suaves¹ então f é integrável em B .

¹Um conjunto suave em \mathbb{R}^3 é a imagem de um conjunto compacto sob uma função $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^3$, $m = 1$ ou $m = 2$, e ϕ de classe C^1 .

Agora que desenvolvemos o conceito da integral tripla, precisamos saber como calculá-la. Assim como no caso da integral dupla, o método prático para calcular integral tripla consiste em expressá-la como uma integral iterada como se segue.

Teorema de Fubini para Integrais Triplas. Se $f(x, y, z)$ é contínua em uma caixa retangular $B = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, então

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz.$$

Para números reais a, b, c, d, e e f , a integral tripla iterada pode ser expressa em seis ordenações diferentes:

$$\begin{aligned}\int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz &:= \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_c^d \left(\int_e^f \left(\int_a^b f(x, y, z) dx \right) dz \right) dy \\ &= \int_a^b \left(\int_e^f \left(\int_c^d f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx \\ &= \int_e^f \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_e^f f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx\end{aligned}$$

Exemplo 1. Calcule a integral tripla $\iiint_B (x + yz^2) dV$, onde $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 5, 2 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}$.

Resolução. Podemos usar qualquer uma das seis ordens de integração. Se escolhermos integrar em relação a x primeiro, depois y e depois z , obtemos

$$\begin{aligned}\iiint_B (x + yz^2) dV &= \int_0^1 \int_2^4 \int_{-1}^5 (x + yz^2) dx dy dz \quad (\text{integre com relação a } x) \\ &= \int_0^1 \int_2^4 \left[\left(\frac{x^2}{2} + xyz^2 \right) \Big|_{x=-1}^{x=5} \right] dy dz \\ &= \int_0^1 \int_2^4 [12 + 6yz^2] dy dz \quad (\text{integre com relação a } y) \\ &= \int_0^1 \left[(12y + 3y^2 z^2) \Big|_{y=2}^{y=4} \right] dz \\ &= \int_0^1 [24 + 36z^2] dz \quad (\text{integre com relação a } z) \\ &= (24z + 12z^3) \Big|_{z=0}^{z=1} = 36.\end{aligned}$$

Integrais triplas sobre uma região limitada geral

Dada $f(x, y, z)$ uma função definida uma região limitada genérica $E \subset \mathbb{R}^3$, considere B uma caixa retangular contendo E e defina a extensão g de f da seguinte forma:

$$g(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{se } (x, y, z) \in E \\ 0 & \text{se } (x, y, z) \in B \setminus E \end{cases}$$

Por definição

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iiint_B g(x, y, z) dV.$$

Esta integral existe se f for contínua e a fronteira de E consiste de uma união finita de conjuntos suaves.

Vamos restringir nossa atenção às funções contínuas f e a certos tipos de regiões.

Uma região $E \subset \mathbb{R}^3$ é dita ser do **tipo 1** se está contida entre os gráficos de duas funções contínuas, ou seja,

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}.$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xy (Figura 39).

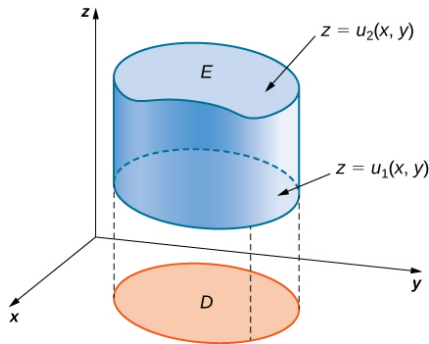


Figura: 39. Uma região tipo 1 (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Teorema. A integral tripla de uma função contínua $f(x, y, z)$ sobre a região limitada

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\},$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xy , é

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA. \quad (23)$$

Se D no plano xy é do Tipo I (Figura 40), então

$$E = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}.$$

Neste caso, a integral tripla se torna

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

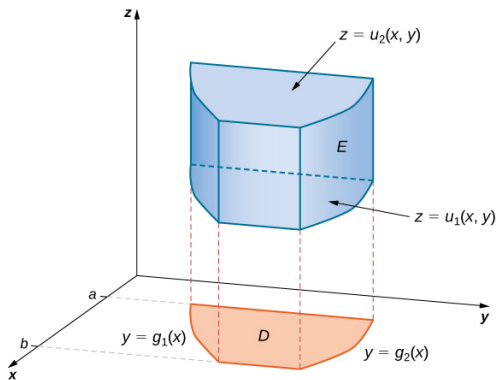


Figura: 40. Uma região tipo 1 e a projeção D é tipo I (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

$$E = \{(x, y, z) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

e a integral tripla fica

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡

Uma região $E \subset \mathbb{R}^3$ é dita ser do **tipo 2** (Figura 42) se é da forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano yz . Neste caso, a integral tripla se torna

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dA.$$

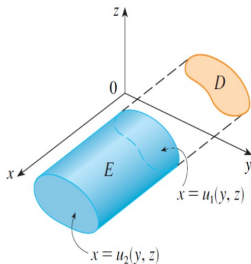


Figura: 42. Uma região tipo 2 (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Exemplo 2. Calcule a integral tripla $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} dV$, onde E é a região limitada pelo parabolóide $y = x^2 + z^2$ e pelo plano $y = 4$.

Solução. A região de integração está mostrada na Figura 44 à esquerda. Vendo-a como tipo 1, precisamos considerar a sua projeção D_1 sobre o plano xy que está mostrada na Figura 44 à direita.

De $y = x^2 + z^2$, temos $z = \pm\sqrt{y - x^2}$. Logo E como tipo 1 é

$$E = \{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, -\sqrt{y - x^2} \leq z \leq \sqrt{y - x^2}\}.$$

Assim,

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} dV = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2} dz dy dx.$$

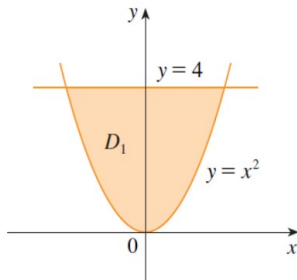
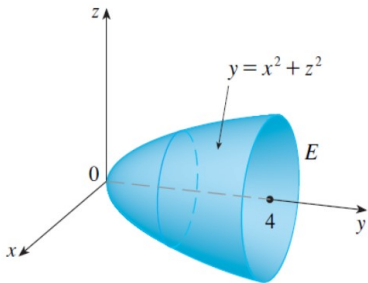


Figura: 44. A figura à esquerda é a região de integração e a figura à direita é a projeção no plano xy (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Apesar dessa expressão estar correta, é difícil de calculá-la. Vamos, em vez disso, considerar a projeção de E como tipo 3. Como tal, sua projeção D_3 no plano xz é o disco circular $x^2 + z^2 \leq 4$. Portanto, a descrição de E como tipo 3 é

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D_3, x^2 + z^2 \leq y \leq 4\}$$

e obtemos

$$\begin{aligned} \iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} dV &= \iint_{D_3} \left[\int_{x^2+z^2}^4 \sqrt{x^2 + z^2} dy \right] dA \\ &= \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2 + z^2} dA. \end{aligned}$$

Apesar dessa última integral dupla poder ser escrita como

$$\iint_{D_3} (4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2}dA = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2} dz dx$$

fica mais fácil mudar para coordenadas polares no plano xz :

$x = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$, o que nos dá

$$\begin{aligned}\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}dV &= \iint_{D_3} (4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2}dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4-r^2)rr dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2-r^4) dr = 2\pi \left(\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^2 \\ &= \frac{128\pi}{15}\end{aligned}$$

Aplicações da Integral Tripla

1. Se $f(x, y, z) = 1$ para todo $(x, y, z) \in E$, então

$$\iiint_E 1 dV = \text{volume de } E.$$

Para ver isso no caso de uma região do tipo 1, pondo $f(x, y, z) = 1$ na Fórmula 23, temos

$$\iiint_E 1 dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} dz \right] dA = \iint_D [u_2(x, y) - u_1(x, y)] dA,$$

que sabemos que é o volume do sólido que está entre as superfícies $z = u_1(x, y)$ e $z = u_2(x, y)$.

Exemplo 1. Calcule o volume do sólido W limitado pelas superfícies de equações $z + x^2 = 9$, $y + z = 4$, $y = 0$ e $y = 4$.

Solução. O sólido W é limitado superiormente pela superfície $z = 9 - x^2$ e inferiormente pelo plano $z = 4 - y$ (faça uma esboço). Portanto,

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 - y \leq z \leq 9 - x^2, (x, y) \in D\},$$

onde D é a projeção de W no plano xy (faça um esboço) que pode ser descrita por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{y+5} \leq x \leq \sqrt{y+5}, 0 \leq y \leq 4\}.$$

Assim, o volume de W é

$$\begin{aligned}\iiint_W 1 dV &= \iint_D \left(\int_{4-y}^{9-x^2} dz \right) dA \\ &= \iint_D (5 - x^2 + y) dA \\ &= \int_0^4 \left(\int_{-\sqrt{y+5}}^{\sqrt{y+5}} (5 - x^2 + y) dx \right) dy\end{aligned}$$

Complete os cálculos para verificar que o valor dessa integral é $8(243 - 25\sqrt{5})/15$.

2. Se $\rho(x, y, z)$ é a função que fornece a densidade (massa por unidade de volume) em cada ponto $(x, y, z) \in E$, então a **massa** M de E é dada por

$$M = \iiint_E \rho(x, y, z) dV$$

e os seus **momentos** em relação aos planos coordenados xy , xz e yz são respectivamente

$$M_{xy} = \iiint_E z\rho(x, y, z) dV,$$

$$M_{xz} = \iiint_E y\rho(x, y, z) dV,$$

$$M_{yz} = \iiint_E x\rho(x, y, z) dV.$$

O **centro de massa** está localizado no ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Se a densidade é constante, o centro de massa de E é chamado **centróide** de E .

Os **momentos de inércia** em relação aos eixos x , y e z são respectivamente

$$I_x = \iiint_E (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV,$$

$$I_y = \iiint_E (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV,$$

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV.$$

3. Como na integral dupla, a **carga elétrica** sobre um objeto sólido ocupando a região E e tendo densidade de carga $\sigma(x, y, z)$ é

$$Q = \iiint_E \sigma(x, y, z) dV$$

Exemplo 3. Determinar o volume da região E compreendida entre as superfícies $z = 8 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + 3y^2$.

Solução. Se um ponto (x, y, z) está na interseção das superfícies então

$$8 - x^2 - y^2 = x^2 + 3y^2 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 4$$

Assim, a projeção de E no plano xy é a região D no plano xy limitada pela elipse $x^2 + 2y^2 = 4$. Portanto,

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 3y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2, (x, y) \in D\}$$

onde

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{\frac{4 - x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{4 - x^2}{2}} \right\}$$

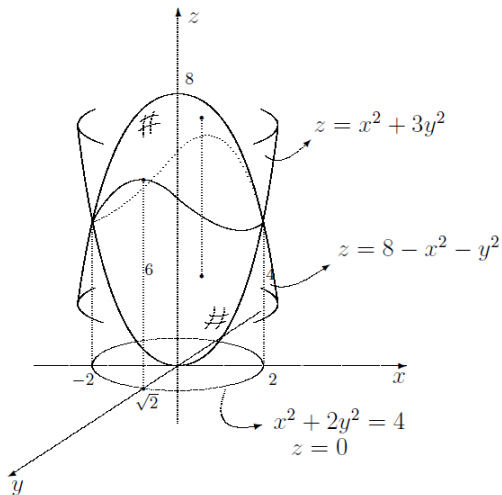


Figura: 45. (crédito: NOTAS DE AULA, Cláudio Martins Mendes)

$$\begin{aligned}
 \text{Volume} &= \iiint_E 1 dV = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz dy dx \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} (8 - 2x^2 - 4y^2) dy dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left[(8 - 2x^2)y - \frac{4}{3}y^3 \right] \Big|_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} dx \\
 &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{-2}^2 (4 - x^2)^{3/2} dx.
 \end{aligned}$$

Fazendo a mudança trigonométrica $x = 2 \sin u$, $-\pi/2 < u < \pi/2$, na última integral, temos $dx = 2 \cos u du$ e

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 (4 - x^2)^{3/2} dx &= 16 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 u du = 16 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 u)^2 du \\&= 16 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2u}{2} \right)^2 du \\&= 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + 2 \cos 2u + \cos^2 2u) du \\&= 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + 2 \cos 2u + \frac{1 + \cos 4u}{2} \right) du \\&= 4 \left(\frac{3}{2} u + \sin 2u + \frac{1}{8} \sin 4u \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 6\pi.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Volume} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{-2}^2 (4 - x^2)^{3/2} dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} 6\pi = 8\sqrt{2}\pi.$$

Exemplo 4. Determine o centro de massa do sólido com densidade constante limitado por $x = y^2$, $x = z$, $z = 0$ e $x = 1$.

Solução. As superfícies inferior e superior de E são os planos $z = 0$ e $z = x$. Descrevendo E como uma região tipo 1, temos

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x\}.$$

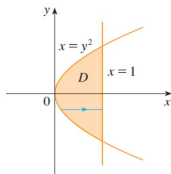
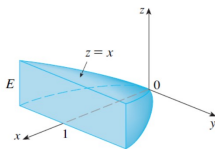


Figura: 46. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Se a densidade $\rho(x, y, z) = \rho$ (constante), a massa é

$$\begin{aligned} M &= \iiint_E \rho dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x \rho dz dx dy \\ &= \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x dx dy = \rho \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} \Big|_{x=y^2}^{x=1} dy \\ &= \frac{\rho}{2} \int_{-1}^1 (1 - y^4) dy = \rho \int_0^1 (1 - y^4) dy \\ &= \rho \left[y - \frac{y^5}{5} \right] \Big|_0^1 = \frac{4\rho}{5} \end{aligned}$$

Por causa da simetria de E e ρ em relação xz , temos $M_{xz} = 0$ e, portanto, $\bar{y} = 0$. Os outros dois momentos são

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_E x \rho dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x x \rho dz dx dy \\ &= \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x^2 dx dy = \rho \int_{-1}^1 \left. \frac{x^3}{3} \right|_{x=y^2}^{x=1} dy \\ &= \frac{\rho}{3} \int_{-1}^1 (1 - y^6) dy = \frac{2\rho}{3} \int_0^1 (1 - y^6) dy \\ &= \frac{2\rho}{3} \left[y - \frac{y^7}{7} \right] \Big|_0^1 = \frac{4\rho}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{xy} &= \iiint_E z \rho dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x z \rho dz dx dy \\
 &= \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=x} dx dy = \frac{\rho}{2} \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x^2 dx dy \\
 &= \frac{\rho}{2} \int_{-1}^1 \frac{x^3}{3} \Big|_{x=y^2}^1 dy = \frac{\rho}{6} \int_{-1}^1 (1 - y^6) dy \\
 &= \frac{\rho}{3} \int_0^1 (1 - y^6) dy = \frac{\rho}{3} \left[y - \frac{y^7}{7} \right] \Big|_0^1 = \frac{2\rho}{7}
 \end{aligned}$$

Logo, o centro de massa é

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M} \right) = \left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14} \right).$$

Lista de Exercícios

1. Calcule a integral tripla $\iiint_D xy^2z^3 dV$ onde D é a região no primeiro octante limitado pela superfície $z = xy$ e os planos $y = x$, $x = 1$ e $z = 0$. (Resp. $1/364$.)
2. Calcule a integral tripla $\iiint_D x dV$ onde D é o tetraedro com faces sobre os planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e o sobre o plano $x + \frac{y}{2} + z = 1$. (Resp. $1/12$.)
3. Calcule o volume do sólido abaixo do gráfico de $z = 1 + x^2 + 3y^2$ e acima do plano xy para (x, y) restrito a região limitada pelas curvas $y = x$, $y = -x + 2$ e $y = 0$. (Resp. $8/3$.)
4. Use integral tripla para calcular o volume da região entre os planos $x + y + 2z = 2$ e $2x + 2y + z = 4$ no primeiro octante. (Resp. 2 .)

Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

Nas aulas anteriores mostramos como converter uma integral dupla em coordenadas retangulares em uma integral dupla em coordenadas polares para lidar mais convenientemente com problemas envolvendo simetria circular. Uma situação semelhante ocorre com integrais triplas, mas aqui precisamos distinguir entre simetria cilíndrica e simetria esférica. Nesta aula, convertemos integrais triplas em coordenadas retangulares em integrais triplas em coordenadas cilíndricas ou esféricas.

Revisão de Coordenadas Cilíndricas

Como vimos, no espaço bidimensional \mathbb{R}^2 , um ponto com coordenadas retangulares (x, y) tem representação em coordenadas polares dada por (r, θ) , onde

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(y/x), \text{ se } x \neq 0, \text{ e } \theta \in \{\frac{\pi}{2} \pm k\pi : k \in \mathbb{N}\}, \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

No espaço tridimensional \mathbb{R}^3 , um ponto P com coordenadas retangulares (x, y, z) é representado em coordenadas cilíndricas por (r, θ, z) , onde r e θ são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy e z é a distância orientada do plano xy a P , conforme mostrado na Figura 47.

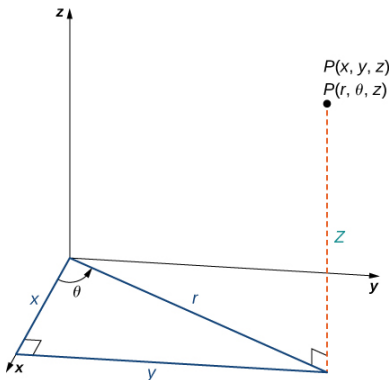


Figura: 47.

Para converter de coordenadas cilíndricas, usamos as relações

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

enquanto que para converter de coordenadas retangulares para cilíndricas, usamos

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(y/x), \text{ se } x \neq 0, \text{ e } \theta \in \{\frac{\pi}{2} \pm k\pi : k \in \mathbb{N}\}, \text{ se } x = 0. \\ z = z \end{cases}$$

Vamos considerar as diferenças entre coordenadas retangulares e cilíndricas observando as superfícies geradas quando cada uma das coordenadas é mantida constante:

- ▶ Se c é uma constante, então em coordenadas retangulares, as superfícies da forma $x = c$, $y = c$ ou $z = c$ são todas planas. Planos dessas formas são paralelos ao plano yz , ao plano xz e ao plano xy , respectivamente. Quando convertemos em coordenadas cilíndricas, a coordenada z não muda. Portanto, em coordenadas cilíndricas, superfícies da forma $z = c$ são planos paralelos ao plano xy (Figura 48).

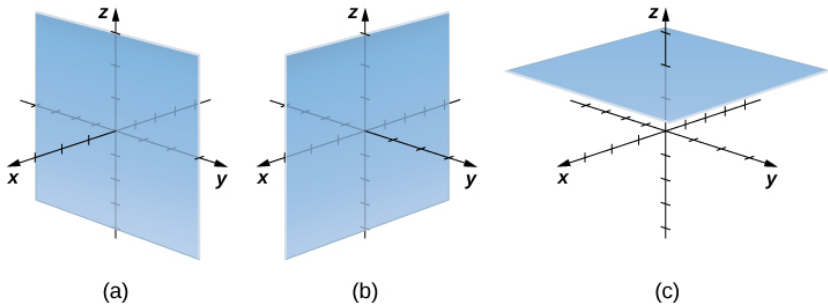
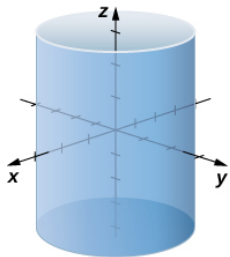
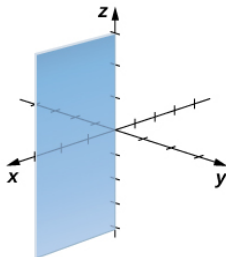


Figura: 48. Em coordenadas retangulares, (a) superfícies da forma $x = c$ são planos paralelos ao plano yz , (b) superfícies da forma $y = c$ são planos paralelos ao plano xz e (c) superfícies da forma $z = c$ são planos paralelos ao plano xy .

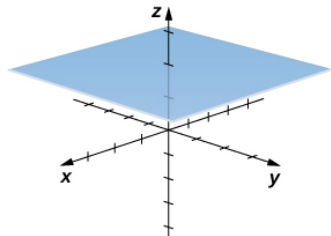
- ▶ Agora, vamos pensar em superfícies da forma $r = c$. Os pontos nessas superfícies estão a uma distância fixa do eixo z . Em outras palavras, essas superfícies são cilindros circulares verticais. Por último, e quanto à $\theta = c$? Os pontos em uma superfície da forma $\theta = c$ estão em um ângulo fixo do eixo x , o que nos dá um semiplano que começa no eixo z (Figura 49).



(a)



(b)



(c)

Figura: 49. Em coordenadas cilíndricas, (a) superfícies da forma $r = c$ são cilindros verticais de raio C , (b) superfícies da forma $\theta = c$ são semiplanos no ângulo c do eixo x , e (c) superfícies de a forma $z = c$ são planos paralelos ao plano xy .

Exemplo 1. Descreva as superfícies com as equações cilíndricas dadas.

a) $\theta = \pi/4$

b) $r^2 + z^2 = 9$

c) $|z| = r$

Solução. a) Quando o ângulo θ é mantido constante enquanto r e z podem variar, o resultado é um semiplano.

b) Substitua $r^2 = x^2 + y^2$ na equação $r^2 + z^2 = 9$ para expressar a forma retangular da equação: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Esta equação descreve uma esfera centrada na origem com raio 3.

c) A equação $|z| = r$ diz que o valor $|z|$, ou altura, de cada ponto da superfície é o mesmo que r , a distância do ponto ao eixo z . Como θ não aparece, essa coordenada pode variar. Assim, qualquer corte horizontal no plano $|z| = k$ é um círculo de raio k . Esses cortes sugerem que a superfície é um cone. Essa previsão pode ser confirmada convertendo a equação para coordenadas retangulares. De $|z| = r$, temos $r^2 = z^2$. Substitua $r^2 = x^2 + y^2$ nessa equação para obter

$$z^2 = r^2 = x^2 + y^2$$

que é a equação de cone circular cujo eixo é o eixo z .

Coordenadas cilíndricas são úteis em problemas que envolvem simetria em torno de um eixo e o eixo z é escolhido de modo a coincidir com o eixo de simetria. Por exemplo, o eixo do cilindro circular com equação cartesiana $x^2 + y^2 = c^2$ é o eixo z . Em coordenadas cilíndricas, este cilindro tem a equação muito simples $r = c$. Esta é a razão para o nome coordenadas “cilíndricas”.

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Cilíndricas

Suponha que E seja uma região no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 do tipo 1 (veja a Figura 50),

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

cuja projeção D no plano xy tenha uma representação conveniente em coordenadas polares (veja a Figura 50), a saber,

$$D = \{(r, \theta) \mid h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

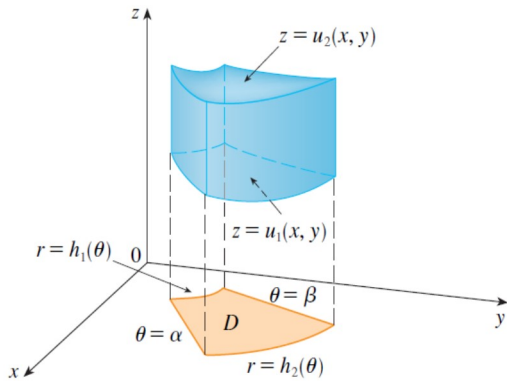


Figura: 50.

Suponha que $f(x, y, z)$ seja contínua em E . Sabemos que

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

Calculando esta integral duplas em coordenadas polares, obtemos

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$$

Exemplo 2. Um sólido E está contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ e acima do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ (Figura 51). A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro. Determine a massa de E .

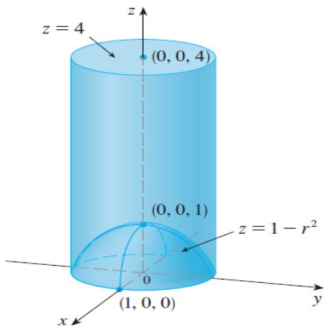


Figura: 51.

Solução. Em coordenadas cilíndricas, o cilindro é $r = 1$ e o parabolóide é $z = 1 - r^2$ e podemos escrever

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 1 - r^2 \leq z \leq 4\}$$

Como a densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro (eixo z), a função densidade é

$$\rho(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = kr,$$

sendo K a constante de proporcionalidade. Portanto, a massa de E é

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 (Kr)r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 Kr^2 [4 - (1 - r^2)] dr d\theta = K \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2 + r^4) dr \\ &= 2K\pi \left(r^3 + \frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{12K\pi}{5}. \end{aligned}$$

Exemplo 3. Calcule o volume do sólido E que fica acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$ (Figura 52).

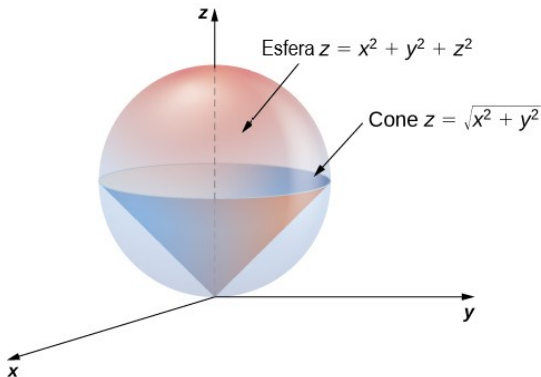


Figura: 52.

Solução. Observe que a esfera passa pela origem e tem centro em $(0, 0, 1/2)$. A esfera intercepta o cone na origem $(0, 0, 0)$ e na circunferência no plano $z = 1/2$ de centro $(0, 0, 1/2)$ e raio $1/2$. De fato, para (x, y, z) pertence ao cone e a esfera, temos

$$z = \underbrace{x^2 + y^2}_{z^2} + z^2 = 2z^2,$$

ou seja $z = 0$ ou $z = 1/2$. Isso resulta, $x = y = z = 0$ ou $x^2 + y^2 = (1/2)^2$ e $z = 1/2$. Escrevemos a equação da esfera em coordenadas cilíndricas como

$$r^2 + z^2 = z \Rightarrow z = \frac{1 + \sqrt{1 - 4r^2}}{2}.$$

A equação do cone em coordenadas cilíndricas como

$$z = r.$$

Portanto a descrição do sólido E em coordenadas cilíndricas é

$$E = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1/2, r \leq z \leq (1 + \sqrt{1 - 4r^2})/2 \right\}$$

O volume de E é

$$\begin{aligned} V(E) &= \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \int_r^{(1+\sqrt{1-4r^2})/2} r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \left(\frac{1+\sqrt{1-4r^2}}{2} - r \right) r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{1/2} \left(\frac{r}{2} + \frac{r\sqrt{1-4r^2}}{2} - r^2 \right) dr \\ &= 2\pi \left(\frac{r^2}{4} - \frac{(1-4r^2)^{3/2}}{24} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_{r=0}^{r=1/2} \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

No sistema de coordenadas esféricas, um ponto P no espaço (Figura 53) é representado pela tripla ordenada (ρ, θ, ϕ) onde

- ▶ ρ é a distância entre P e a origem O ;
- ▶ θ é o mesmo ângulo usado para descrever a localização em coordenadas cilíndricas;
- ▶ ϕ é o ângulo formado pelo eixo z positivo e segmento de reta OP e $0 \leq \phi \leq \pi$.

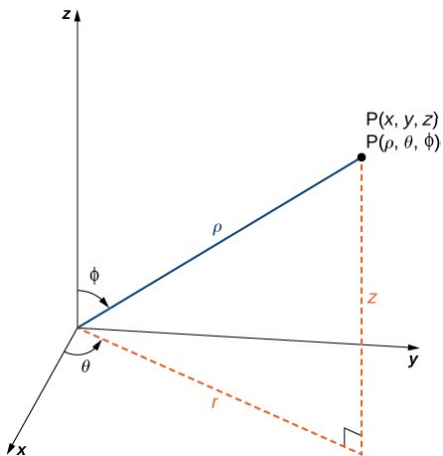
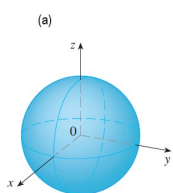
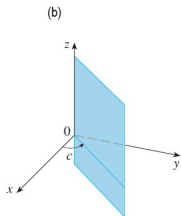


Figura: 53.

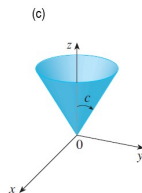
O sistema de coordenadas esféricas é especialmente útil em problemas nos quais exista simetria em torno de um ponto e a origem esteja colocada neste ponto. Por exemplo, a esfera com centro na origem e raio c tem a equação simples $\rho = c$ (veja a Figura 54a) – essa é a razão do nome “coordenadas esféricas”. O gráfico da equação $\theta = c$ é um semiplano vertical (veja a Figura 54b) e a equação $\phi = c$ representa um semicone com o eixo z como seu eixo (veja as Figuras 54c).



$\rho = c$, uma esfera

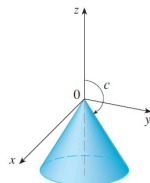


$\theta = c$, um semiplano



$0 < c < \pi/2$

$\phi = c$, um cone



$\pi/2 < c < \pi$

Figura: 54. Superfícies esféricas

A relação entre coordenadas esféricas e retangulares pode ser vista na Figura 55. Dos triângulos OPQ e OPP' , temos

$$z = \rho \cos \phi, \quad r = \rho \sin \phi.$$

Mas $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, de modo que para converter de coordenadas esféricas para retangulares, usamos as equações

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

Para converter de coordenadas retangulares em esféricas, usamos as equações

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \tan \theta = y/x, \quad \cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

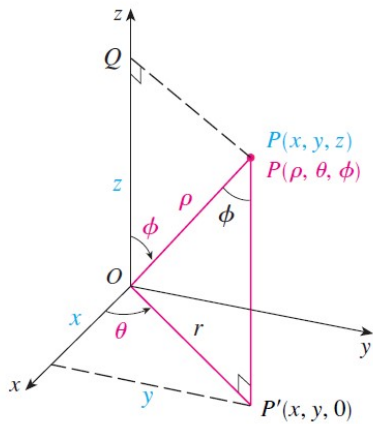


Figura: 55.

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas

Vamos agora estabelecer uma integral tripla no sistema de coordenadas esféricas. Seja a função $f(x, y, z)$ contínua em uma **cunha esférica** limitada

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

onde $a \geq 0$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$ e $d - c \leq \pi$.

Para calcular a integral tripla $\iiint_E f(x, y, z) dV$, dividimos o sólido E em pequenas cunhas esféricas E_{ijk} por meio esferas igualmente espaçadas $\rho = \rho_i$, semiplanos $\theta = \theta_j$ e semicone $\phi = \phi_k$.

A Figura 56 mostra que E_{ijk} é aproximadamente uma caixa retangular com dimensões $\Delta\rho$, $\rho_i\Delta\phi$ (arco de circunferência de raio ρ_i e ângulo $\Delta\phi$) e $\rho_i \sin \phi_k \Delta\theta$ (arco de circunferência de raio $\rho_i \sin \phi_k$ e ângulo $\Delta\theta$).

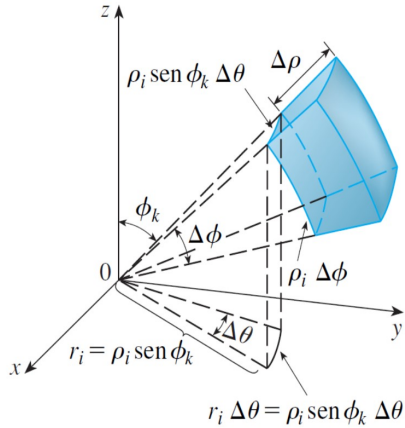


Figura: 56.

Logo, uma aproximação do volume de E_{ijk} é dada por

$$\Delta V_{ijk} \approx \rho_i^2 \sin \phi_k \Delta \rho \Delta \theta \Delta \phi$$

Usando o Teorema do Valor Médio (veja Exercício 6 a seguir), podemos mostrar que o valor exato do volume de E_{ijk} é dado por

$$\Delta V_{ijk} = \tilde{\rho}_i^2 \sin \tilde{\phi}_k \Delta \rho \Delta \theta \Delta \phi$$

para algum ponto $(\tilde{\rho}_i, \tilde{\theta}_j, \tilde{\phi}_k)$ no interior de E_{ijk} . Seja $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ as coordenadas retangulares desse ponto. Então,

$$\begin{aligned} \iiint_E f(x, y, z) dV &= \lim_{i,j,k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V_{ijk} \\ &= \lim_{i,j,k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(\tilde{\rho}_i \sin \tilde{\phi}_k \cos \tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \sin \tilde{\phi}_k \sin \tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \cos \tilde{\phi}_k) \tilde{\rho}_i^2 \sin \tilde{\phi}_k \Delta \rho \Delta \theta \Delta \phi \end{aligned}$$

Mas esse é o limite da soma tripla de Riemann para a função

$$g(\rho, \theta, \phi) = f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} & \iiint_E f(x, y, z) dV \\ &= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \end{aligned}$$

Exemplo 4. Calcule $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$, sendo B a bola unitária

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Solução. Como a fronteira de B é a esfera de centro na origem e raio 1, utilizaremos coordenadas esféricas:

$$B = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

Além disso, coordenadas esféricas são convenientes, pois

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Então,

$$\begin{aligned} \iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} d\rho \\ &= (-\cos \phi) \Big|_0^\pi \theta \Big|_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} e^{\rho^3} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{4\pi}{3} (e - 1) \end{aligned}$$

Exemplo 5. Calcule o volume do sólido E que fica acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$ (Figura 57).

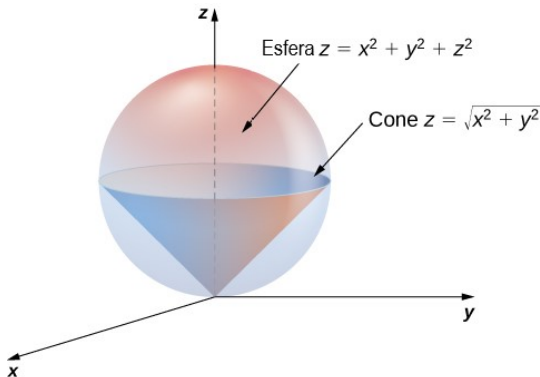


Figura: 57.

Solução. No Exemplo 3 calculamos esta integral usando coordenadas cilíndricas. Desta vez usaremos coordenadas esféricas que como veremos será mais vantajoso. Note que a esfera que passa pela origem e tem centro $(0, 0, 1/2)$ tem equação em coordenadas esféricas dada por

$$\rho^2 = \rho \cos \phi \quad \text{ou} \quad \rho = \cos \phi$$

O cone pode ser escrito em coordenadas esféricas como

$$\rho \cos \phi = z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta} = \rho \sin \phi$$

Ou seja $\cos \phi = \sin \phi$, implicando

$$\phi = \frac{\pi}{4}$$

Portanto a descrição de E em coordenadas esféricas é

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/4, 0 \leq \rho \leq \cos \phi\}$$

O volume de E é

$$\begin{aligned} V(E) &= \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin \phi \left(\frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^{\cos \phi} d\phi \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \sin \phi \cos^3 \phi \, d\phi \\ &= \frac{2\pi}{3} \left(-\frac{\cos^4 \phi}{4} \right) \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Lista de Exercícios

1. Calcule a integral de $f(x, y, z) = z$ sobre o sólido que está acima do plano xy e abaixo do cone $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ e que seja interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$. (Resp.: 60π .)
2. Calcule o volume do sólido que está simultaneamente no interior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e do cilindro $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. (Resp.: $\frac{16}{3} \left(\pi - \frac{4}{3} \right)$.)
3. Calcule $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dV$ onde D é o conjunto dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ e $z \geq 0$. (Resp.: $62\pi/5$.)

4. Calcule a integral tripla $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$ onde D é o sólido no primeiro octante limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e os cones $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ e $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$ (Resp.: $\frac{\pi}{12}(\sqrt{3} - 1)(e^{64} - 1)$.)

5. Seja $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$.
- (a) Escreva a integral $\iiint_B xyz dV$ em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas.
 - (b) Encontre o valor da integral usando uma das integrais iteradas obtida no item (a). (Resp.: 0.)

6. (a) Utilize coordenadas cilíndricas para mostrar que o volume do sólido limitado por cima pela esfera $r^2 + z^2 = a^2$ e por baixo pelo cone $z = r \cot \phi$, onde $0 < \phi < \pi/2$, é

$$\Delta V = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos \phi)$$

- (b) Deduza que o volume da cunha esférica dada por $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ é

$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}(\cos \phi_1 - \cos \phi_2)(\theta_2 - \theta_1)$$

- (c) Utilize o Teorema do Valor Médio para mostrar que o volume da parte (b) pode ser escrito como

$$\Delta V = \tilde{\rho}^2 \sin \tilde{\phi} \Delta \rho \Delta \theta \Delta \phi,$$

onde $\tilde{\rho}$ está entre ρ_1 e ρ_2 , $\tilde{\phi}$ está entre ϕ_1 e ϕ_2 , $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$ e $\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1$.

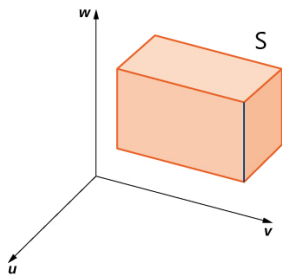
Mudança de variáveis na integral tripla

Como veremos a seguir, a fórmula de mudança de variáveis na integral dupla pode ser estendida às integrais triplas.

Seja $T : S \rightarrow R$ uma transformação que leva uma região S no espaço tridimensional uvw para uma região R no espaço tridimensional xyz por meio das equações

$$x = g(u, v, w), \quad y = h(u, v, w), \quad z = k(u, v, w)$$

onde g , h , k são funções com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em R (Figura 59).



$$\begin{aligned}x &= g(u, v, w) \\y &= h(u, v, w) \\z &= k(u, v, w)\end{aligned}$$

→

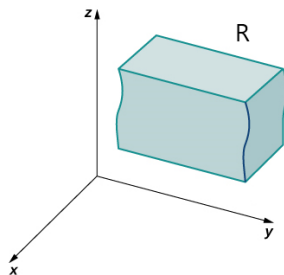


Figura: 59.

O jacobiano de T é o seguinte determinante

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Teorema da Mudança de Variáveis em Integrais Triplas. Seja $T : S \rightarrow R$ uma transformação de classe C^1 e injetora, cujo jacobiano seja não nulo em S . Se f é uma função integrável em $R = T(S)$, então

$$\begin{aligned} & \iiint_R f(x, y, z) dV \\ &= \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \end{aligned}$$

Casos especiais de mudanças de variáveis

1. Mudança de variáveis cilíndricas

Neste caso, a transformação é $T(r, \theta, z) = (x, y, z)$ do espaço $r\theta z$ para o espaço xyz (Figura 60) dada por

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

O jacobiano dessa transformação é

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Portanto, a fórmula da mudança de variáveis se escreve

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

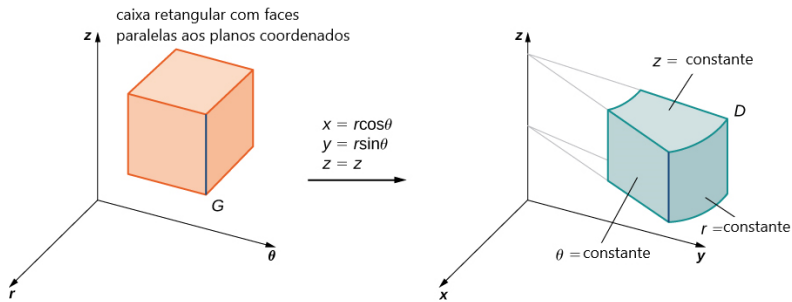


Figura: 60.

2. Mudança de variáveis esféricas

Neste caso a mudança de variáveis é dada por

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \phi, \quad z = \rho \cos \phi$$

(Figura 61). O jacobiano dessa transformação é

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} \\ &= -\rho^2 \sin \phi. \end{aligned}$$

Como $\sin \phi \geq 0$ para $0 \leq \phi \leq \pi$, temos

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| = \rho^2 \sin \phi$$

e a fórmula da mudança de variáveis se escreve

$$\begin{aligned} & \iiint_R f(x, y, z) dV \\ &= \iiint_S f(\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi. \end{aligned}$$

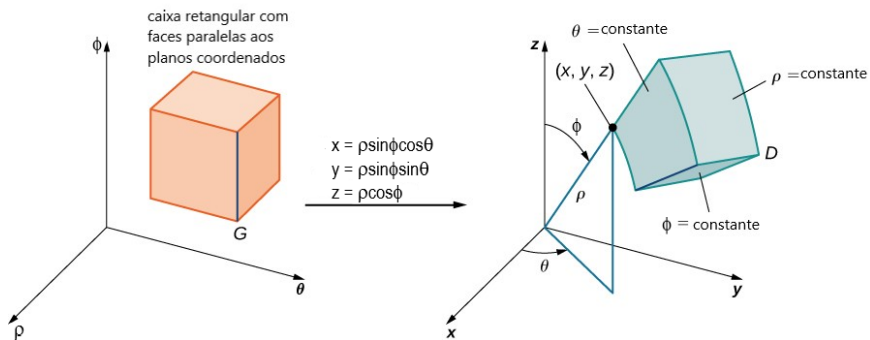


Figura: 61.

Exemplo 5. Calcule o volume da bola B em \mathbb{R}^3 de raio R .

Solução. Sem perda de generalidade, podemos supor B centrada na origem. Fazendo a mudança de coordenadas esféricas, obtemos

$$\begin{aligned} V(B) &= \iiint_B dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi d\phi \\ &= \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^R \theta \Big|_0^{2\pi} (-\cos \phi) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

Exemplo 6.

- (a) Calcule o volume do sólido R limitado pelo elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- (b) A Terra não é perfeitamente esférica; como resultado da rotação, os polos foram achatados. Assim, seu formato pode ser aproximado por um elipsoide com $a = b = 6378$ km e $c = 6356$ km. Use o item (a) para estimar o volume da Terra.
- (c) Se o sólido do item (a) tiver densidade constante k , encontre seu momento de inércia em relação ao eixo z .

Solução. (a) Considere a transformação

$$x = au, \quad y = bv, \quad z = cw \quad (24)$$

O jacobiano dessa transformação é

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

Para determinarmos a região S do espaço uvw correspondente a R pela transformação, observamos que a fronteira de R é o elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ou equivalentemente,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

e das equações (24), a imagem no espaço uvw

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1.$$

Então a região S do espaço uvw é a bola centro na origem e raio 1. Aplicando o teorema da mudança de variáveis para integrais triplas e usando o Exemplo 5, temos

$$\begin{aligned} V(R) &= \iiint_R dV = \iiint_S \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dudvdw \\ &= abc \iiint_S dudvdw = abcV(S) = abc \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

(b) Substituindo os valores de a , b e c na fórmula obtida em (a), o volume da Terra é aproximadamente $1083 \times 10^{12} \text{ km}^3$.

(c) Para o cálculo do momento de inércia com relação ao eixo z , fazemos primeiro a mudança de variáveis (24) para obter

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_R (x^2 + y^2) k dV = k \iiint_S ((au)^2 + (bv)^2) kabc \, du dv dw \\ &= kabc \left[a^2 \iiint_S u^2 \, du dv dw + b^2 \iiint_S v^2 \, du dv dw \right] \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de coordenadas esféricas em cada uma das integrais do segundo membro, temos

$$\begin{aligned}a^2 \iiint_S u^2 du dv dw &= a^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\rho \sin \phi \cos \theta)^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\&= a^2 \int_0^1 \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^\pi \sin^3 \phi d\phi \\&= a^2 \frac{4\pi}{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b^2 \iiint_S v^2 du dv dw &= b^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\rho \sin \phi \sin \theta)^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\&= b^2 \int_0^1 \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^\pi \sin^3 \phi d\phi \\&= b^2 \frac{4\pi}{15}\end{aligned}$$

Portanto,

$$I_z = kabc(a^2 + b^2) \frac{4\pi}{15}.$$