ELEIÇÃO PROPORCIONAL: UM EXEMPLO DE ENTRELAÇAMENTO DE DESAFIOS SOCIAIS E A MATEMÁTICA

ALI TAHZIBI (ICMC-USP)
PROJETO DE EXTENSÃO: MATEMÁTICA NA MEDIDA CERTA

No Brasil, como em muitos outros países, o sistema eleitoral para cargos legislativos, com exceção dos senadores, é proporcional. Nesse sistema, a ideia principal é que as vagas devem ser distribuídas proporcionalmente ao número de votos que os partidos receberam. Enquanto na eleição para o Senado apenas os candidatos com mais votos são eleitos, nas eleições para deputado federal, estadual e para as câmaras de vereadores, utiliza-se o método proporcional, muitas vezes chamado de método de D'Hondt ou Jefferson. Acreditamos que compreender este método é acessível (necessário) aos estudantes de ensino médio e um aprofundamento teórico pode ser interessante para um projeto mais avançado.

Imagine três partidos políticos concorrendo a três cadeiras na câmara de vereadores do seu município. Após a apuração dos votos, o Partido A obteve 50 votos, distribuídos entre os candidatos A_1, A_2 e A_3, que receberam, respectivamente, 30, 12 e 8 votos. O Partido B, com os candidatos B1 e B2, somou 30 votos, com 20 votos para B1 e 10 para B2. Já o Partido C totalizou 20 votos, distribuídos entre os candidatos C1 e C2, com 15 e 5 votos, respectivamente.

Partido A	Partido B	Partido C
$A_1 = 30$	$B_1 = 20$	$C_1 = 15$
$A_2 = 12$	$B_2 = 10$	$C_2 = 5$
$A_3 = 8$		

A pergunta que surge é: quais candidatos devem ocupar as cadeiras na câmara?

Voltando ao caso dos três partidos: pela lógica proporcional, o Partido A deveria receber 50% das vagas, ou seja, 1,5 cadeiras. Mas, como representar "meio" vereador? O método de d'Hondt propõe uma solução iterativa (ou "rodadas"). Primeiro, define-se o quociente eleitoral (QE), que é a soma de todos os votos válidos recebidos pelos partidos, ou seja, $50 + 30 + 20 = 100$ dividido pelo número total de vagas ou seja QE $= \frac{100}{3}$, o que arredondamos para 33. Esse número representa "aproximadamente" a quantidade de votos necessários para ocupar uma cadeira pelo partido.

Artigo 106 do código eleitoral brasileiro: *Determina-se o quociente eleitoral dividindo-se o número de votos válidos apurados pelo de lugares a preencher em cada circunscrição eleitoral, desprezada a fração se igual ou inferior a meio, equivalente a um, se superior.*

[1] Agora, atribuímos a cada partido o número de cadeiras baseado no quociente partidário, que é a parte inteira (por baixo) da divisão dos votos de cada partido pelo QE. O Partido A garante 1 vaga, já que $\lfloor \frac{50}{33} \rfloor = 1$, enquanto os demais

[1]Mencionamos que existe uma dissertação de mestrado-PROFMAT de autoria de Maurício Brito de Jesus sobre eleições no Brasil e contem vários exemplos reais.

partidos não obtêm vagas nessa etapa. Sobram, então, duas cadeiras para serem distribuídas. Para continuar, dividimos o número de votos de cada partido pelo número de vagas já obtidas mais 1 (vamos denotar por média atualizada). Para o Partido A, a média atualizada é $\frac{50}{1+1} = 25$, enquanto as médias atualizadas dos Partidos B e C permanecem 30 e 20, respectivamente. Portanto a próxima cadeira vai para o Partido B, que possui a maior média (30). Resta, então, uma última cadeira. Neste ponto, repetimos o processo, atualizando as médias. Agora, a média do Partido B é atualizada para $\frac{30}{1+1} = 15$, enquanto as médias do Partido A e C permanecem 25 e 20. Assim, a última cadeira vai para o Partido A.

Pelo método de d'Hondt, dentro de cada partido, os candidatos com mais votos são eleitos, o que resulta na eleição de candidatos A_1 e A_2 (estamos abusando A_i como número de votos e referindo ao candidato). No entanto, o candidato C_1, que teve mais votos que A_2, não ficará satisfeito!

Agora, imagine que os Partidos B e C formem uma coligação (BC), somando 50 votos. Aplicando o mesmo algoritmo, os candidatos A_1 e B_1 (da coligação BC) seriam eleitos. Para a última vaga, enfrentamos um empate nas médias, e neste caso, o candidato com mais votos, C_1, seria eleito (critério de desempate quando temos mesmas médias), revertendo o descontentamento anterior!

O código eleitoral brasileiro prevê critérios claros para desempates e várias clausulas de desempenho. No Brasil, seguimos o método de d'Hondt com certas cláusulas, como o mínimo de 10% do QE para que um candidato assuma a vaga na primeira distribuição de cadeiras. Além disso, nas rodadas de distribuição das cadeiras remanescentes, apenas partidos com pelo menos 80% do QE e candidatos com mais de 20% do QE podem ser considerados (Artigo 109 de Código eleitoral). [2] Finalmente se mesmo após seguir o processo acima sobrarem vagas, todos os partidos entram na concorrência (mesmo não satisfazendo as clausulas de desempenho do partido ou candidatos) e seguiremos o algoritmo de d'Hondt com as médias já atualizadas. Como um leitor curioso pode perceber, isso gera várias perguntas matemáticas interessantes.

Exercício 1. *Mostre que o método de d'Hondt é equivalente ao método de Jefferson (sim, o famoso Thomas Jefferson dos EUA): Considere uma matriz $m \times n$, onde m é o número de partidos e n é o número de vagas. A entrada $a_{ij} := \frac{P_i}{j}$, onde P_i é o número de votos recebidos pelo partido i. Agora, selecione os n maiores números entre as entradas da matriz. O número de valores escolhidos na linha i representa o número de candidatos eleitos do partido i.*

Outra forma de apresentar o método de Jefferson é como seguinte: Quando a soma dos quocientes partidários é igual ao total de vagas, não há mais nada a fazer. Se isso não for o caso, definimos o "quociente partidário corrigido" como a divisão dos votos obtidos por cada partido por um número $Q < QE$. Claro que, se Q for muito pequeno, obteremos "quocientes partidários corrigido" exageradamente grandes, e a soma deles pode ultrapassar o número total de vagas. Assim, procuramos algum Q intermediário tal que a soma dos quocientes partidários atualizados seja igual ao número de vagas. Observe que estamos procurando Q para não lidarmos com vagas não preenchidas.

[2] Pela resolução 23.677/2021, as médias se atualizam considerando vagas "teoricas" ganhas pelo partido, mesmo que efetivamente nenhum candidato venha a preencher a vaga (por não ter pelo menos 20% de quociente eleitoral.

Como exemplo, novamente considerem o caso dos três partidos acima: se atualizarmos o quociente eleitoral para $Q = 20$, vamos obter quocientes partidários corrigidos

$$\lfloor\frac{50}{20}\rfloor = 2, \lfloor\frac{30}{20}\rfloor = 1, \lfloor\frac{20}{20}\rfloor = 1.$$

Portanto, Q é pequeno demais (temos apenas 3 vagas!). Basta considerar $Q = 21$, e teremos a única solução desejada:

$$\lfloor\frac{50}{21}\rfloor = 2, \lfloor\frac{30}{21}\rfloor = 1, \lfloor\frac{20}{21}\rfloor = 0,$$

que coincide com o método de D'Hondt.

Exercício 2. *Classifiquem todos os casos em que nenhum dos métodos apresentados oferece uma solução, ou seja em algum momento acontece empates! Dica: Considere três partidos com 40, 20 e 10 votos.*

Não se preocupe, pois é muito pouco provável que esses casos ocorram na eleição de deputados ou vereadores!

Para finalizar este texto que deve ser considerado apenas como um convite a estudar melhor este tópico vamos mencionar que o método apresentado acima minimiza o máximo de "quociente de vantagem" de cada partido. Com quociente de vantagem referimos o quociente $\alpha_i := (d_i/n) : (v_i/S)$ onde d_i :=número total de vagas ganhas pelo partido i, v_i := número total de votos ganhos plo partido i , $S = \sum v_i$ e $n = \sum d_i$ (total de vagas).

O método de D'Hondt merece ser apresentado no ensino médio. Existem outros métodos que minimizam por exemplo a soma dos quadrados de "erros" que merecem ser estudados por estudantes de graduação e interessados. (La représentation proportionnelle et la méthode des moindres carrés (A. SAINTE-LAGUË)). No método "minima de soma dos quadrados" seguimos o algoritmo de exercício 1, substituindo $a_{ij} = \frac{p_i}{2j-1}$. Tentem dar um exemplo onde os resultados sejam diferentes.

A matemática oferece vários métodos justos para eleições proporcional e cabe a cada sociedade decidir considerando seus desafios sociais e configuração politica.

Esse exemplo ilustra como desafios sociais se entrelaçam com cálculos matemáticos. Há diversos algoritmos para decidir os resultados em sistemas proporcionais, e cada um otimiza um índice diferente. Portanto, cabe à sociedade escolher o método que melhor reflete suas prioridades e busca corrigir distorções de representatividade. A matemática, assim, revela seu papel como uma ciência humana também.