

# Fórmula do traço de Selberg

\* Conexão entre análise, geometria & dinâmica

\* generalização não-Abeliana da fórmula do somatório de Poisson (& pré-história do programa de Langlands)

## Introdução

① Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função com decaimento rápido (e.g. no sentido de Schwartz, i.e.  $\forall K, n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| = o(|x|^{-K})$ ).

A fórmula do somatório de Poisson diz que  $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$

onde  $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x y} dx$  é o transf. de Fourier de  $f$ .

Uma prova dessa identidade segue de  $F(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m)$  ser  $\mathbb{Z}$ -per. &  $\hat{F}(\kappa) = \int_0^1 \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m) e^{-2\pi i \kappa x} dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_m^{m+1} f(y) e^{-2\pi i \kappa y} dy = \hat{f}(\kappa) \quad \forall \kappa \in \mathbb{Z}$

$$\therefore F(x) = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\kappa) e^{2\pi i \kappa x} \quad \therefore \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) = F(0) = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\kappa).$$

② Essa fórmula é útil em Matemática.

2.1 O problema de Basileia (resolvido por Euler em 1734) segue dessa fórmula:

de fato, se  $f(x) = e^{-a|x|}$ ,  $a > 0$ , então  $\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-2\pi i n x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(a+2\pi i n)x} dx +$

$$\int_{-\infty}^0 e^{(a-2\pi i n)x} dx = \frac{1}{a+2\pi i n} + \frac{1}{a-2\pi i n} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 n^2}, \text{ de modo que } \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 n^2}$$

$$= \frac{1}{2a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \frac{1}{2a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = \frac{1}{2a} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ak} \right) \dots$$

$$\frac{1}{a^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{2a} \left( 1 + 2 \cdot \frac{1}{e^{\frac{a}{2}} - 1} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{a}{2} \coth\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{a^2} \left( 1 + \frac{(a/2)^2}{3} + O(a^4) \right)$$

$$\therefore 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{12} + O(a^2) \therefore$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6}$$

Continuando nessa direção, obtemos equações funcionais para a função zeta de Riemann (conforme Weil) e para a função zeta de Jacobi.

2.2 Contagem de pontos inteiros em bolas e empacotamentos de esferas

- Landau usou a fórmula de Poisson para obter

$$\boxed{\#(\mathbb{Z}^d \cap B(0, R)) = \frac{(\pi R^2)^{d/2}}{(d/2)!} + O(R^{d-2+\frac{2}{d+1}})}$$

quando  
 $R \rightarrow \infty$

De fato, o "reflexo" seria escrever  $N(R) = \#(\mathbb{Z}^d \cap B(0, R)) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} f_R(v)$  onde  $f_R(x) = \chi_{[0, R]}(|x|)$  e tentar usar que  $\hat{f}_R(k) = R^d J_{d/2}(2\pi R|k|) / (R|k|)^{d/2}$  (com  $x^2 J'_\alpha(x) + x J_\alpha(x) + (x^2 - \alpha^2) J_\alpha(x) = 0$  função de Bessel), mas temos que regularizar  $f_R$ , i.e. tomar  $f_R * p_\varepsilon$ ,  $p_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} p(x/\varepsilon)$ ,  $p \geq 0$   $C^\infty$  suportada em  $|x| \leq 1$  com  $\int_{\mathbb{R}^d} p = 1$ .

Desse modo,  $N_\varepsilon(R) := \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} (f_R * p_\varepsilon)(v) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}_R(k) \hat{p}(\varepsilon k)$ . Como  $|\hat{p}(y)| = O\left(\frac{1}{(1+|y|)^N}\right)$  e  $N > (d+1)/2$ , temos  $|N_\varepsilon(R) - \frac{(\pi R^2)^{d/2}}{(d/2)!}| \leq \frac{C_{d,N} R^d}{R^{(d+1)/2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|^{d+1/2}} \left(\frac{1}{1+\varepsilon|k|}\right)^N$

$$\leq C'_{d,N} R^{\frac{d-1}{2}} \int_{|y| \geq 1/2} \frac{1}{|y|^{d+1/2}} \left(\frac{1}{1+\varepsilon|y|}\right)^N \leq C'_{d,N} R^{\frac{d-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varepsilon^{(d+1)/2}}{|y|^{d+1/2}} \left(\frac{1}{1+|y|}\right)^N \varepsilon^{-d} dy$$

$= C''_{d,N} (R/\varepsilon)^{(d-1)/2}$ . Por outro lado,  $f_{R-\varepsilon} * p_\varepsilon \leq f_R \leq f_{R+\varepsilon} * p_\varepsilon$  (pois  $p_\varepsilon$

é suportada em  $B(0, \varepsilon)$ )  $\therefore c_d (R-\varepsilon)^d - C''_{d,N} \left(\frac{R-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\frac{d-1}{2}} = N_\varepsilon(R-\varepsilon) \leq \underline{N(R)} \leq N_\varepsilon(R+\varepsilon) = c_d (R+\varepsilon)^d + C''_{d,N} \left(\frac{R+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\frac{d-1}{2}}$  e a estimativa de Landau segue ao otimizar  $\varepsilon \sim R^{\frac{1-d}{1+d}}$

— Cohn e Elkies estudaram em 2003 a questão de encontrar o empacotamento de esferas (de mesmos raios) mais denso em  $\mathbb{R}^n$ .

Lembre que o empilhamento hexagonal é ótimo em  $\mathbb{R}^2$  (Tóth 1940), cúbico de face central é ótimo em  $\mathbb{R}^3$  (Hales 1998), e as redes  $E_8 = \{(x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^8 : \sum x_i \equiv 0 \pmod{2}\}$  e de Leech foram conjecturadas ótimas em  $\mathbb{R}^8$  e  $\mathbb{R}^{24}$ .

Nesse sentido, Cohn e Elkies usam  $\sum_{x \in \Lambda} f(x+v) = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{t \in \Lambda^*} e^{-2\pi i \langle v, t \rangle} \hat{f}(t)$  onde

$\Lambda^* = \{y : \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \forall x \in \Lambda\}$  e  $f$  é admissível ( $\forall \delta > 0, |f(x)|, |\hat{f}(x)| = O_\delta(|x|^{-n-\delta})$ )  
 para mostrar que a densidade de empacotamentos é  $\leq \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} \frac{\tau(0)}{2^n \hat{\tau}(0)} \forall T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

admissível,  $\tau(x) \leq 0 \forall |x| \geq 1, \hat{\tau}(t) \geq 0 \forall t$ . Usando isto, eles provaram que  $E_8$  e Leech só podem diferir das densidades ótimas por fatores  $\leq$

1.000001 e 1.0007071.

Em 2016, Viazovska mostrou a optimalidade de  $E_8$  e, em 2017, Cohn, Kumar, Miller, Radchenko e Viazovska provaram a optimalidade de Leech.

### (2.3) Geometria e análise em toros planos

Um toro plano  $\mathbb{R}^n/\Lambda$  tem geodésicas fechadas de comprimentos  $\{|\lambda| : \lambda \in \Lambda\}$  e autovalores do Laplaciano  $\{4\pi^2 |\lambda|^2 : \lambda \in \Lambda^*\}$ .

A fórmula de Poisson e a auto-dualidade da distr. Gaussiana implicam a

fórmula de inversão de Jacobi

$$\sum_{\lambda^* \in \Lambda^*} e^{-4\pi^2 |\lambda^*|^2 t} = (4\pi t)^{-n/2} \text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda) \sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-|\lambda|^2/4t}$$

(originalmente usada para entender somas de 8 quadrados, i.e.  $\# \mathbb{Z}^8 \cap B(0, \sqrt{K})$ )

Como o lado esquerdo  $1 + N_{\text{sys}(\Lambda^*)} e^{-4\pi^2 \text{sys}(\Lambda^*)^2 t} + \dots$  (quando  $t \rightarrow \infty$ ) determina o espectro do Laplaciano e o lado direito (quando  $t \rightarrow 0$ ) determina o espectro de comprimentoes, temos que  $\mathbb{R}^n/\Lambda_1$  e  $\mathbb{R}^n/\Lambda_2$  são isoespectrais ( $\Leftrightarrow \Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  possuem mesmo espectro de comprimentoes). (Isso foi usado em 1964 por Milnor para construir dois 16-toros isoespectrais que não são isométricos)

Fórmula de traço

① Contexto geral: Seja  $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$  um subgrupo fechado e unimodular: o exemplo principal será  $G = SL(2, \mathbb{R})$ .  
Dado  $\Gamma \subseteq G$  rede, temos uma representação regular unitária  $R: G \rightarrow \bar{U}(L^2(\Gamma \backslash G))$   
 $R(g)(\varphi)(x) = \varphi(xg)$  a qual se generaliza em  $R: C_c^\infty(G) \rightarrow \bar{U}(L^2(\Gamma \backslash G))$   
 $f \mapsto R\left(\int_G f(g)g dg\right)$

Note que  $R(f)(\varphi)(x) = \int_G f(g) \varphi(xg) dg = \int_G f(x^{-1}g) \varphi(g) dg = \int_{\Gamma \backslash G} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(x^{-1}\gamma g) \varphi(\gamma g) dg$

$\stackrel{\varphi \in L^2(\Gamma \backslash G)}{\uparrow} = \int_{\Gamma \backslash G} K(x, g) \varphi(g) dg$  onde  $K(x, g) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(x^{-1}\gamma g)$  é o núcleo de Schlegel

$\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$   $\bigcirc$  lado de  $R(f)$  e  $\text{tr } R(f) = \int_{\Gamma \backslash G} K(x, x) dx = \int_{\Gamma \backslash G} \sum_{\{\gamma\}} \sum_{\delta \in \Gamma_\gamma \backslash \Gamma} f(x^{-1}\delta^{-1}\gamma \delta x) dx$

onde  $\{\gamma\} =$  classe de conj. de  $\gamma$  em  $\Gamma$ ,  $\Gamma_\gamma = \mathbb{Z}_\Gamma(\gamma) = \{\gamma_1 \in \Gamma : \gamma_1 \gamma = \gamma \gamma_1\}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \underline{\text{tr } R(f)} &= \sum_{\{\gamma\}} \int_{\Gamma \backslash G} \int_{\Gamma_\gamma \backslash \Gamma} f(x^{-1}\delta^{-1}\gamma \delta x) d\delta dx = \sum_{\{\gamma\}} \int_{\Gamma_\gamma \backslash G} f(t^{-1}\gamma t) dt = \\ &= \sum_{\{\gamma\}} \int_{G_\gamma \backslash G} \int_{\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma} f(t^{-1}u^{-1}\gamma u t) du dt = \sum_{\{\gamma\}} \underline{\text{vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma)} \int_{G_\gamma \backslash G} f(x^{-1}\gamma x) dx \end{aligned}$$

$\bigcirc$  lado esquerdo é espectral e o lado direito é geométrico. (integral orbital)  
 $\bigcirc$  b serve

que  $R(f) \simeq \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} m_\pi \cdot \pi(f)$  onde  $\hat{G}$  é dual unitário de  $G$ , de modo que

$$\text{tr } R(f) = \sum_{\pi \in \hat{G}} m_\pi \cdot \text{tr } \pi(f)$$

Exemplo 1:  $G = \mathbb{R}$ ,  $\Gamma = \mathbb{Z} \Rightarrow \hat{G} = \{ \pi_\lambda(\cdot) = e^{-2\pi i \lambda \cdot} : \lambda \in \mathbb{R} \}$ ,  $\text{tr } \pi_\lambda(f) = \int f(y) e^{2\pi i \lambda y} dy = \hat{f}(\lambda)$ ,  $L^2(\mathbb{Z} \backslash \mathbb{R}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \pi_n \Rightarrow$  a fórmula de traço (de Arthur-Selberg) se torna  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)$  i.e. a fórmula de Poisson.

## ② Fórmula de traço de Selberg

O caso  $G = SL(2, \mathbb{R})$  é estreitamente ligado aos autovalores do Laplaciano e aos comprimentos de geodésicas fechadas. Concretamente, se  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$  são os autovalores de  $\Delta_{\Gamma \backslash \mathbb{H}}$ ,  $\Gamma \backslash \mathbb{H} = \Gamma \backslash SL(2, \mathbb{R}) / SO(2, \mathbb{R})$ ,  $\{ \varphi_j \}$  é uma base

ortonormal de  $L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$  correspondente e  $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{H}} K(\cdot, \omega) \varphi(\omega) d\mu(\omega) =$   
 $\int_{\mathbb{H}} K(\cdot, \omega) \varphi(\omega) d\omega$  é operador integral com núcleo  $K(z, \omega) = K(\rho(z, \omega))$  onde  
 $\kappa: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  é par com suporte compacto,  $\rho(\cdot, \cdot) =$  métrica hiperb.,  $\mu =$  área hiperb.  
 $\mathcal{D} =$  domínio fund. de  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ ,  $K(z, \omega) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \kappa(z, \gamma \omega)$  (série de Poincaré simi- lar ao núcleo de Selberg)

então um pouco de cálculo funcional mostra que  $\int_{\mathbb{H}} \kappa(z, \omega) \varphi_j(\omega) d\mu(\omega) = h(r_j) \varphi_j(z)$   
 onde  $h(r) = \int_{\mathbb{H}} \kappa(z, i) y^{\frac{1}{2} + ir} d\mu(z)$  e  $\lambda_j = \frac{1}{4} + r_j^2$  (pois  $y^{\frac{1}{2} + ir}$  é auto função de  $\Delta_{\mathbb{H}}$  com autovalor  $\frac{1}{4} + r^2$ )

Portanto,  $\int_{\Sigma \setminus H} K(z, w) \varphi_j(w) = h(r_j) \varphi_j(z)$ .  $\therefore K(z, w) = h(r_j) \varphi_j(z) \varphi_j(w)$  ie

$$\boxed{\sum_{j \in \Sigma} K(z, w) = \sum_{j \geq 0} h(r_j) \varphi_j(z) \varphi_j(w)} \quad \text{"fórmula de pré-traso"}$$

Tomando  $z=w$ , integrando e trabalhando a expressão gerada no lado esquerdo, obtemos a fórmula de traso de Selberg

$$\boxed{\sum_{j \geq 0} h(r_j) = \frac{\text{area}(\Sigma \setminus H)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r h(r) \tanh(\pi r) dr + \sum_{\substack{\Theta \text{ geod.} \\ \text{fechada de} \\ \Sigma \setminus H}} \frac{l_0(\Theta)}{e^{l(\Theta)/2} - e^{-l(\Theta)/2}} g(l(\Theta))}$$

(quando  $\Sigma \setminus H$  é compacta) onde  $l_0(\Theta) = \text{compr. primitivo de } \Theta$  e

$$\underline{\underline{h(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iru} \left( \sqrt{2} \int_{|u|}^{\infty} \frac{K(p) \sinh(p)}{\sqrt{\cosh p - \cosh u}} dp \right) du}} := \int_{-\infty}^{\infty} e^{iru} g(u) du = \underline{\underline{\hat{g}(r)}}$$

③ Algumas aplicações:  $\# \{ \Theta : l(\Theta) \leq L \} = O(e^L)$  (pois esses  $\Theta$ 's correspondem a dom. fund. num disco hiperb. de raio  $L + 2 \text{diam}(\Sigma \setminus H)$ ). Tomando  $h(r) = e^{-\delta r^2}$  e  $g(x) = (4\pi\delta)^{-1/2} e^{-x^2/4\delta}$ , a fórmula do traso diz que  $\sum e^{-\delta r_j^2} = \frac{\text{area}(\Sigma \setminus H)}{4\pi} \int r e^{-\delta r^2} \tanh(\pi r) dr + O(\delta^{-1/2} e^{-\frac{5\pi^2}{8\delta}})$

Integrando por partes,  $\left[ \sum e^{-\delta r_j^2} = \frac{\text{area}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi\delta} + O(1) \right]$ . Pelo teor. tubular de Kawamata, deduzimos a lei de Weyl:  $\left[ \# \{j : \lambda_j \leq T\} \sim \frac{\text{area}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi} T \right]$

Com cálculos mais longos, pode-se provar o teorema dos good. primitivos:

$$\left[ \pi(x) = \text{li}(x) + \sum_{1 \leq s_j < 3/4} \text{li}(x^{s_j}) + O(x^{3/4}/\log x) \right] \text{ onde}$$

$$\text{li}(x) = \int_2^x \frac{ds}{\log s} \left( \approx \frac{x}{\log x} \text{ quando } x \rightarrow \infty \right), \quad s_j = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_j} \text{ para } \lambda_j \leq \frac{1}{4} \text{ e}$$

$$\pi(x) = \# \{ \theta \text{ good prim. com } e^{\ell(\theta)} \leq x \}.$$

(isso conduziu Selberg ao estudo da sua função zeta, etc.)

Mais recentemente, Wu e Xue (2021) usam a fórmula do traço de Selberg (entre outros ingredientes) para mostrar que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $P_{WP}^g(\lambda, (x) \leq \frac{3}{16} - \varepsilon)$ .  
Com efeito, eles tomam  $\phi_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  par com  $\text{supp}(\phi_0) = [-1, 1]$ ,  $\int_0^\infty \phi_0(t) dt = 1$ ,  
 $\hat{\phi}_0(\xi) \geq 0 \forall \xi \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ , definem  $\phi(x) = \phi_0\left(\frac{x}{4 \log g}\right)$  e notam que  $\lambda_1(x) \leq \frac{3}{16} - \varepsilon$   
(e  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ ) implica  $\hat{\phi}(r_1) \geq 4 \log g \int_{1-\varepsilon_1}^1 \phi_0(u) e^{4 \log g \sqrt{\frac{1}{16} + \varepsilon} u} du \geq C_\varepsilon g^{1+\varepsilon} \log g$

Portanto, podemos obter uma condição com a fórmula do traço de Selberg

$$\hat{\phi}(i/2) + \underbrace{\hat{\phi}(r_1)}_{VI} + \sum_{k \geq 2} \hat{\phi}(r_k) = (g-1) \int_{-\infty}^{\infty} r \hat{\phi}(r) \tanh(\pi r) + \dots$$

$C_\epsilon g^{1+\epsilon} \log g$

se o lado direito for "pequeno" com grande probabilidade.