

Cálculo Vetorial

Conteúdo

1. Integrais de Linha
2. Campo Vetorial
3. Teorema de Green
4. Rotacional e Divergência
5. Superfícies Parametrizadas
6. Integral de Superfície
7. Teorema de Stokes
8. Teorema da Divergência ou de Gauss

Integrais de linha

Para calcular a massa total de um fio fino ao longo de uma curva no plano ou no espaço, ou para calcular o trabalho realizado por uma força variável agindo ao longo dessa curva, precisamos de uma noção mais geral de integral do que a definição dada no Cálculo 1. Precisamos integrar sobre uma curva C e não sobre um intervalo $[a, b]$. Essas integrais mais gerais são chamadas *integrais de linha*.

Integrais de linha de uma função escalar

Começamos com uma curva plana C dada pelas equações paramétricas

$$x = x(t) \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b,$$

ou equivalente pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $t \in [a, b]$.

Seja $f(x, y)$ for uma função escalar de duas variáveis cujo domínio inclui a curva C . Para motivar a definição de integral de linha de f ao longo de C , vamos supor que C representa um fio e $f(x, y)$ a densidade (massa por unidade de comprimento) em cada ponto $(x, y) \in C$. Queremos calcular a massa M do fio.

Admitimos que C seja uma curva suave. Para calcular a massa de C , dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de igual comprimento e se fizermos

$$x_i = x(t_i) \quad y_i = y(t_i)$$

então os pontos correspondentes $P_i = (x_i, y_i)$ divide C em n subarcs de comprimento $\Delta S_1, \dots, \Delta S_n$, como na Figura 1

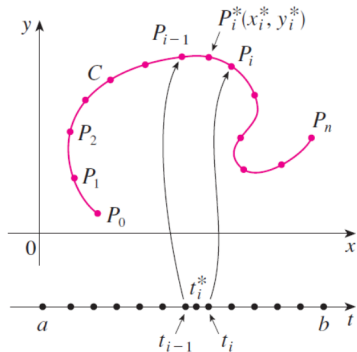


Figura: 1. (crédito: J. Stewart, Vol. II)

Sendo C uma curva suave, o comprimento ΔS_i do i -ésimo subarco é dado por

$$\Delta S_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Pelo teorema do valor médio para integrais, existe $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\Delta S_i = \|\mathbf{r}'(t_i^*)\|(t_i - t_{i-1}) = \|\mathbf{r}'(t_i^*)\|\Delta t_i, \text{ onde } \Delta t_i = t_i - t_{i-1}.$$

Portanto, a massa total M é aproximada por

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(t_i^*))\|\mathbf{r}'(t_i^*)\|\Delta t_i.$$

A soma S_n é a soma de Riemann da função $f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|$ no intervalo $[a, b]$. Logo, se considerarmos $f(x, y)$ contínua em C , então

$$M = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Definição. Considere uma curva plana suave C , parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, e $f(x, y)$ uma função real contínua em C . Definimos a **integral de linha de f ao longo de C** por

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt. \quad (1)$$

Observação. Se $f(x, y) = 1$ para todo $(x, y) \in C$, então

$$\int_C 1 ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \text{comprimento da curva } C.$$

Em resumo, para calcular a integral de linha de uma função escalar $f(x, y)$ sobre uma curva C :

1. Encontre uma parametrização suave de C

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad a \leq t \leq b.$$

2. Calcule a integral de linha como

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Exemplo 1. Calcule $\int_C (x - 3y^2) ds$, onde C é o segmento de reta unindo a origem $(0,0)$ ao ponto $(1,1)$.

Solução. Escolhemos a parametrização mais simples que podemos imaginar:

$$\mathbf{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Assim,

$$\mathbf{r}'(t) = 1\vec{i} + 1\vec{j} \quad \text{and} \quad \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{2} \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Portanto C é uma curva suave e

$$\int_C (x - 3y^2) ds = \int_0^1 (t - 3t^2) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \left(\frac{t^2}{2} - t^3 \right) \Big|_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exemplo 2. Calcule $\int_C (2 + x^2 y) ds$, onde C é o arco superior da circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Solução. Essa curva pode ser parametrizada por

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Assim,

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t, \quad \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 1 \neq 0 \quad \forall t.$$

Portanto C é uma curva suave e

$$\int_C (2 + x^2 y) ds = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) dt = \left(2t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^\pi = 2\pi + \frac{2}{3}.$$

Exemplo 3. Calcule $\int_C 2x ds$, onde C é formada pelo arco C_1 de parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$, seguido pelo segmento de reta C_2 de $(1, 1)$ a $(1, 2)$.

Solução.

$$C_1: \quad x = t, \quad y = t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2: \quad x = 1, \quad y = t, \quad 1 \leq t \leq 2$$

$$\int_{C_1} 2x ds = \int_0^1 2t \sqrt{1 + (2t)^2} dt = \frac{1}{6} (1 + 4t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}$$

$$\int_{C_2} 2x ds = \int_1^2 2\sqrt{1} dt = 2t \Big|_1^2 = 2$$

Portanto,

$$\int_C 2x ds = \int_{C_1} 2x ds + \int_{C_2} 2x ds = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2.$$

Interpretação física da integral de linha de uma curva plana.

A interpretação física da integral de linha depende $\int_C f(x, y) ds$ depende da interpretação física da função f . Suponha que $\rho(x, y)$ represente a densidade linear num ponto (x, y) de um fio fino com o formato de uma curva C . Vimos que a **massa** m é

$$m = \int_C \rho(x, y) ds$$

O **centro de massa** do fio com função densidade ρ está localizado no ponto (\bar{x}, \bar{y}) , onde

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x \rho(x, y) ds \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y \rho(x, y) ds$$

Exemplo 4. Um arame com o formato de uma semicirculo $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$. Ache o centro de massa desse arame se a função densidade em qualquer ponto é linear e proporcional a sua distância à reta $y = 1$.

Solução. Como no Exemplo 2, usamos a parametrização $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi$. A densidade linear é $\rho(x, y) = k(1 - y)$, onde k é uma constante. A massa do arame é

$$m = \int_C k(1 - y) ds = \int_0^\pi k(1 - \sin t) dt = k(1 + \cos t) \Big|_0^\pi = k(\pi - 2)$$

Por simetria $\bar{x} = 0$. Pela definição,

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m} \int_C y \rho(x, y) ds = \frac{1}{k(\pi - 2)} \int_C y k(1 - y) ds \\ &= \frac{1}{(\pi - 2)} \int_0^\pi (\sin t - \sin^2 t) dt = \frac{1}{(\pi - 2)} \left[-\cos t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^\pi \\ &= (4 - \pi)/(2(\pi - 2)). \end{aligned}$$

E o centro de massa é $(0, (4 - \pi)/(2(\pi - 2))) \approx (0, 0.38)$.

Interpretação geométrica. Quando $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in C$, sendo C uma curva no plano xy , a fórmula

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

tem como interpretação geométrica a área da superfície cilíndrica que tem como base a curva C e altura $f(x, y)$ em cada ponto $(x, y) \in C$.

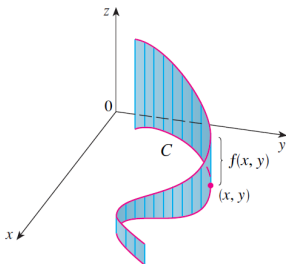


Figura: 3. (crédito: J. Stewart, Vol. II)

Integrais de linha no espaço

Seja C uma curva suave no espaço dada pelas equações paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b,$$

ou pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

Se $f(x, y, z)$ for uma função escalar definida e contínua em uma região contendo a curva C , então definimos a *integral de linha* de f sobre C como

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt. \end{aligned}$$

Exemplo 5. Calcule $\int_C (x^2 + y^2 + z) ds$, onde C é parte da hélice parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução. Note que

$$f(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t + t = 1 + t$$

e

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{2}.$$

Portanto,

$$\int_C (x^2 + y^2 + z) ds = \int_0^{2\pi} (1+t)\sqrt{2} dt = \sqrt{2} \left(t + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}(\pi + \pi^2).$$

Exemplo 6 (Independência da parametrização). Calcule $\int_C (x^2 + y^2 + z) ds$, onde C é parte da hélice parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (\cos(2t), \sin(2t), 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

Observe que esta função e curva são as mesmas do exemplo anterior; a única diferença é que a curva foi reparametrizada para que o parâmetro varie duas vezes mais rápido.

Solução. Note que $f(\mathbf{r}(t)) = \cos^2(2t) + \sin^2(2t) + 2t = 1 + 2t$ e

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = 2\sqrt{2}.$$

Portanto,

$$\int_C (x^2 + y^2 + z) ds = 2\sqrt{2} \int_0^\pi (1 + 2t) dt = 2\sqrt{2} (t + t^2) \Big|_0^\pi = 2\sqrt{2}(\pi + \pi^2).$$

Observe que isso está de acordo com a resposta do exemplo anterior. Alterar a parametrização não alterou o valor da integral de linha. **Integrais de linha escalares são independentes da parametrização, desde que a curva seja percorrida exatamente uma vez pela parametrização.**

Lista de Exercícios

1. Encontre a integral de linha de $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre o segmento de reta de $(1, 2, 3)$ a $(0, -1, 1)$. (Resp.: $3\sqrt{14}$.)
2. Integre a função $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$ sobre o caminho de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ dado por

$$C_1: \quad \gamma(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2: \quad \gamma(t) = \vec{i} + \vec{j} + t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(Resp.: $\frac{1}{6}(5\sqrt{5} + 9)$.)

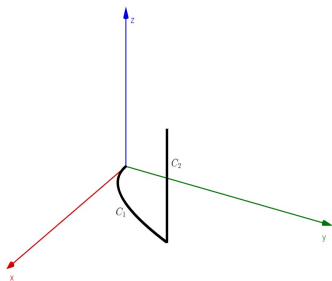


Figura: 4.

3. Uma argola de arame circular com densidade constante δ encontra-se ao longo da circunferência C de equação $x^2 + y^2 = a^2$ no plano xy . Encontre o momento de inércia da argola em relação ao eixo z , mais especificamente, calcule a integral de linha $I_z = \int_C (x^2 + y^2)\delta ds$. (Resp.: $I_z = 2\pi\delta a^3$.)
4. Um arame tem a forma da curva obtida como a interseção da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y \geq 0$, com o plano $x + z = 2$. Sabendo que a densidade em cada ponto é dada por $f(x, y, z) = xy$, calcule a massa total do arame. (Resp.: 4.)

Campo Vetorial

Definição.

Um campo vetorial em \mathbb{R}^2 é uma função que a cada ponto (x, y) de um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ associa vetor bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$.

Um campo vetorial em \mathbb{R}^3 é uma função que a cada ponto (x, y, z) de um conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ associa vetor tridimensional $\mathbf{F}(x, y, z)$.

Um campo vetorial em \mathbb{R}^2 pode ser representado de duas maneiras equivalentes. A primeira maneira é usar um vetor com componentes que são funções de duas variáveis:

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

A segunda maneira é usar os vetores unitários padrão:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}.$$

As funções escalares P e Q são as componentes do campo vetorial \mathbf{F} .

Similarmente, podemos representar campos vetoriais em \mathbb{R}^3 com funções componentes da forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

ou

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

A figura a seguir ilustra de modo análogo um campo vetorial em \mathbb{R}^3 .

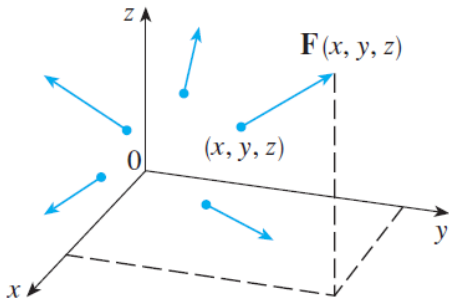


Figura: 6. (crédito: J. Stewart, Vol. II)

Exemplo 1. Um campo vetorial em \mathbb{R}^2 é definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$. Descreva \mathbf{F} desenhando alguns de seus vetores $\mathbf{F}(x, y)$.

Solução. Uma vez que $\mathbf{F}(1, 0) = \vec{j}$, desenhamos o vetor \vec{j} começando no ponto $(1, 0)$ na Figura 3. Uma vez que $\mathbf{F}(0, 1) = -\vec{i}$, desenhamos o vetor $-\vec{i}$ com ponto inicial $(0, 1)$. Continuando desta maneira desenhando um número significativo de vetores para representar o campo vetorial na Figura 3.

Note que o produto escalar

$$\mathbf{F}(x, y) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}) = (-y\vec{i} + x\vec{j}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}) = -xy + xy = 0$$

para qualquer ponto (x, y) . Isto mostra que $\mathbf{F}(x, y)$ é ortogonal ao vetor posição $x\vec{i} + y\vec{j}$. Portanto, cada vetor $\mathbf{F}(x, y)$ é tangente ao círculo com centro na origem em que está localizado. Além disso,

$$\|\mathbf{F}(x, y)\| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$$

e o comprimento do vetor $\mathbf{F}(x, y)$ é igual ao raio do círculo.

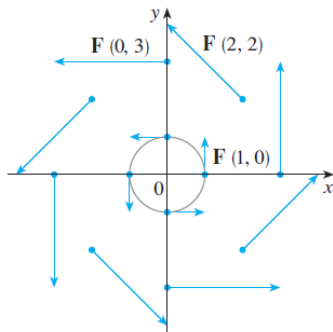


Figura: 7. $\mathbf{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ (crédito: J. Stewart, Vol. II)

Exemplo 4. A Lei da Gravitação de Newton afirma que a intensidade da força gravitacional entre dois objetos com massas m e M , $M > m$, é

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{mMG}{r^2}$$

onde r é a distância entre os objetos e G é a constante gravitacional.

Vamos supor que o objeto com massa M esteja localizado na origem em \mathbb{R}^3 e o objeto de massa m esteja localizado no ponto (x, y, z) .

Denotando $\vec{x} = (x, y, z)$ o vetor posição do objeto de massa m , então $r = \|\vec{x}\|$. A força gravitacional exercida nesse segundo objeto age em direção à origem e o vetor unitário em sua direção é $-\vec{x}/\|\vec{x}\|$. Portanto, a força gravitacional agindo no objeto em $\vec{x} = (x, y, z)$ é

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{mMG}{\|\vec{x}\|^3} \vec{x}. \quad (2)$$

Em termos de suas componentes, esta fórmula escreve-se como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

O campo gravitacional \mathbf{F} está ilustrado na Figura 6.

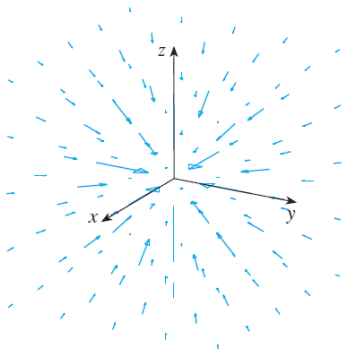


Figura: 10. Campo de força gravitacional (crédito: J. Stewart, Vol. II)

Exemplo 5. Suponha que uma carga elétrica Q esteja localizada na origem. Pela Lei de Coulomb, a força elétrica $\mathbf{F}(x, y, z)$ exercida por essa carga sobre uma carga q localizada no ponto (x, y, z) com vetor posição $\vec{x} = (x, y, z)$ é

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\varepsilon q Q}{\|\mathbf{r}\|^3} \vec{x} \quad (3)$$

onde ε é uma constante. Para cargas de mesmo sinal, temos $qQ > 0$ e a força é repulsiva; para cargas opostas temos $qQ < 0$ e a força é atrativa. Observe a semelhança entre as fórmulas (11) e (12). Ambas são exemplos de campos de força. Em vez de considerarem a força elétrica \mathbf{F} , os físicos frequentemente consideram a força por unidade de carga:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{q} \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\varepsilon Q}{\|\vec{x}\|^3} \vec{x}$$

Então \mathbf{E} é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 chamado campo elétrico de Q .

Exemplo 6. Campo Gradiente

Se $f(x, y)$ é uma função escalar que possui derivadas parciais de primeira ordem, então seu gradiente

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\vec{j}$$

define um campo vetorial em \mathbb{R}^2 e é denominado campo vetorial gradiente. Da mesma forma, se $f(x, y, z)$ for uma função escalar de três variáveis, seu gradiente é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 dado por

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\vec{k}$$

Definição. Um campo vetorial \mathbf{F} denomina-se **conservativo** se ele for o campo gradiente de alguma função escalar, ou seja, se existir uma função escalar f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Nessa situação, a função f é denominada uma função potencial de \mathbf{F} .

Exemplo 8. O campo gravitacional \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo. De fato, seja

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

então

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\vec{k} \\ &= \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{k} \\ &= \mathbf{F}(x, y, z).\end{aligned}$$

Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Motivação. Suponha que $\mathbf{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ seja um campo de força contínuo em \mathbb{R}^3 . Queremos calcular o trabalho exercido por essa força para mover uma partícula ao longo de uma curva suave C .

Para fazer isso, dividimos C em n subarcos $P_{i-1}P_i$ com comprimentos ΔS_i através da partição do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de igual comprimento. (Veja Figura 12.)

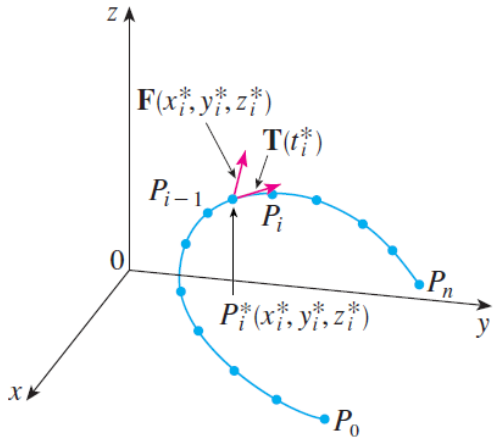


Figura: 12.

Escolha um ponto $P_i^* = (x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ no i -ésimo subarco correspondente ao valor do parâmetro t_i^* . Se ΔS_i é pequeno, o movimento da partícula de P_{i-1} para P_i na curva ocorre aproximadamente na direção de $\mathbf{T}(t_i^*) \equiv \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$, o vetor tangente unitário a curva em P_i^* . Então, o trabalho feito pela força \mathbf{F} para mover a partícula de P_{i-1} para P_i é aproximadamente

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta S_i \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta S_i$$

e o trabalho total executado para mover a partícula ao longo de C é aproximadamente

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta S_i$$

Assim, o trabalho W realizado pela campo de força \mathbf{F} para deslocar uma partícula ao longo de C é

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta S_i$$

ou seja,

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z) ds = \int_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}) ds$$

Esta equação diz que *o trabalho é a integral de linha da componente tangencial da força sobre C* , ou seja, a integral de linha sobre C da função escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$.

Se a curva C é dada pela parametrização $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, então

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

e pela definição da integral de linha sobre C de uma função escalar, podemos escrever a equação do trabalho como

$$W = \int_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}) ds = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \right] \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Esta última integral é frequentemente abreviada como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Definição. Seja \mathbf{F} um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva suave C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Definimos a **integral de linha de \mathbf{F} ao longo de C** por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}) ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \quad (4)$$

Notações.

- ▶ Se a curva C é fechada, isto é, $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, a integral de linha de \mathbf{F} ao longo de C é denotada por $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
- ▶ Uma outra notação possível da integral de linha de um campo vetorial ao longo de uma curva é dada em termos das coordenadas do campo vetorial. Se $\mathbf{F} = (P, Q)$ $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, é uma parametrização de C , a equação (4) se escreve

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b [P(\mathbf{r}(t))x'(t) + Q(\mathbf{r}(t))y'(t)] dt.$$

Por isso, é usual denotar-se a integral de linha de \mathbf{F} ao longo de C por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C Pdx + Qdy.$$

De modo análogo, se $\mathbf{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, é usual denotar-se a integral de linha de \mathbf{F} ao longo de C por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C Pdx + Qdy + Rdz.$$

Exemplo 9. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ e C é a curva parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução. Uma vez que

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= (\sin t, \cos t, t) \\ \mathbf{r}'(t) &= (\cos t, -\sin t, 1)\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (\sin t, \cos t, t) \cdot (\cos t, -\sin t, 1) dt \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin t \cos t - \sin t \cos t + t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2.\end{aligned}$$

Exemplo 10. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ e C é a curva parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

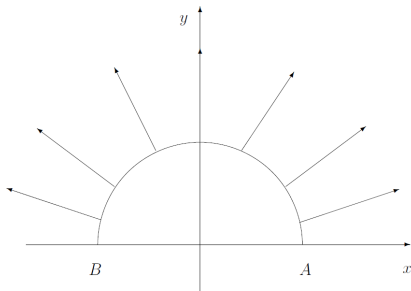


Figura: 13.

Solução. Uma vez que

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (\cos t, \sin t) \quad \text{e} \quad \mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^\pi (\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^\pi 0 dt = 0$$

Exemplo 11. Calcule a integral de linha do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - 2xy, x^3 + y)$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ ao longo das seguintes curvas:

- a) O segmento de reta C_1 de equações paramétricas $x = t$, $y = t$, $0 \leq t \leq 1$.
- b) A curva C_2 de equações paramétricas $x = t^2$, $y = t^3$, $0 \leq t \leq 1$.

Solução.

Para a), temos $\mathbf{r}(t) = (t, t)$. Então $\mathbf{r}'(t) = (1, 1)$ e $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (-t^2, t^3 + t)$. Logo,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (-t^2 + t^3 + t) dt = \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{12}.$$

Para b), temos $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$. Então $\mathbf{r}'(t) = (2t, 3t^2)$ e $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (t^4 - 2t^5, t^6 + t^3)$. Logo,

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (2t^5 - 4t^6 + 3t^8 + 3t^5) dt = \left(\frac{5t^6}{6} - \frac{4t^7}{7} + \frac{t^9}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{25}{42}.$$

Este exemplo mostra que a integral de linha de uma campo vetorial de um ponto a outro **depende**, em geral, da curva que liga os dois pontos.

Vamos agora calcular o item b) mais uma vez, usando uma representação paramétrica diferente para a curva C_2 .

A curva C_2 pode ser descrita pela função

$$s(t) = (t, t^{3/2}), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Como $s'(t) = \left(1, \frac{3t^{1/2}}{2}\right)$ e $\mathbf{F}(s(t)) = (t^2 - 2t^{5/2}, t^3 + t^{3/2})$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \left(t^2 - 2t^{5/2} + \frac{3t^{7/2}}{2} + \frac{3t^2}{2} \right) dt \\ &= \left(\frac{5t^3}{6} - \frac{4t^{7/2}}{7} + \frac{t^{9/2}}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{25}{42}. \end{aligned}$$

Acabamos de observar no exemplo acima que o valor da integral $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é o mesmo para as duas parametrizações da curva C_2 .

Esta é uma propriedade das integrais de linha que provaremos a seguir, mas antes precisamos da seguinte definição:

Definição. Sejam $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, e $\mathbf{s}(t)$, $c \leq t \leq d$, duas parametrizações de classe C^1 de uma curva C . Dizemos que $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{s}(t)$ são **parametrizações equivalentes** se existe uma função $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$, bijetora e de classe C^1 (logo h é crescente ou decrescente¹), tal que $\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(h(t))$, $c \leq t \leq d$.

Se h é crescente, dizemos que h preserva a orientação, isto é, um ponto que percorre C com parametrização $\mathbf{s}(t)$ se move no mesmo sentido que o ponto que percorre C segundo a parametrização $\mathbf{r}(t)$. Se h é decrescente, dizemos que h inverte a orientação.

¹Se $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ é bijetora e contínua, então h é uma função crescente ou decrescente.

Teorema. Sejam $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, e $\mathbf{s}(t)$, $c \leq t \leq d$, parametrizações de classe C^1 e equivalentes de uma curva C . Então:

a) Se h preserva a orientação, então
$$\int_{C_s} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

b) Se h inverte a orientação, então
$$\int_{C_s} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

onde C_s e C_r denotam a curva C parametrizada por $\mathbf{s}(t)$ e $\mathbf{r}(t)$, respectivamente.

Demonstração. Por hipótese, $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{s}(t)$ são equivalentes, portanto estão relacionadas pela equação $\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(h(t))$, $t \in [c, d]$. Então,

$$\int_{C_s} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) \cdot \mathbf{s}'(t) dt = \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{r}(h(t))) \cdot \mathbf{r}'(h(t))h'(t) dt.$$

Fazendo a substituição $u = h(t)$, $du = h'(t)dt$ na integral à direita, obtemos

$$\int_{C_s} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{h(c)}^{h(d)} \mathbf{F}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) du.$$

Agora, se h preserva a orientação, então

$$\int_{h(c)}^{h(d)} \mathbf{F}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) du = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) du = \int_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

e se h inverte a orientação, então

$$\int_{h(c)}^{h(d)} \mathbf{F}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) du = \int_b^a \mathbf{F}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) du = - \int_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

como queríamos demonstrar.

Observação. Como caso particular deste teorema, temos

$$\int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

onde C^- é a curva C com orientação oposta.

No caso de função escalar, temos

$$\int_{C_s} f \, ds = \int_{C_r} f \, ds,$$

onde $s(t)$ e $r(t)$ são parametrizações equivalentes de uma curva C .
A verificação desse fato é deixada para o leitor como exercício.

Podemos ainda destacar as seguintes propriedades de integrais de linha:

(i) **Linearidade.**

$$\int_C (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) \cdot d\mathbf{r} = a \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + b \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r},$$

onde a e b são constantes reais.

(ii) **Aditividade.** Se C admite uma decomposição num número de curvas suaves C_1, \dots, C_n , isto é $C = C_1 \cup \dots \cup C_n$, então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Exemplo 12. Calcule a integral de linha $\int_C x^2 dx + xy dy$, onde C é a fronteira do quadrado no plano xy de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$ orientada no sentido anti-horário.

Solução. A curva C é decomposta em quatro segmentos de reta parametrizados como:

$$C_1 : r_1(t) = (t, 0), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$C_2 : r_2(t) = (1, t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$C_3 : r_3(t) = (-t, 1), \quad -1 \leq t \leq 0,$$

$$C_4 : r_4(t) = (0, -t), \quad -1 \leq t \leq 0.$$

Assim,

$$\int_{C_1} x^2 dx + xydy = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3},$$

$$\int_{C_2} x^2 dx + xydy = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2},$$

$$\int_{C_3} x^2 dx + xydy = \int_{-1}^0 -t^2 dt = -\frac{1}{3},$$

$$\int_{C_4} x^2 dx + xydy = \int_{-1}^0 0 dt = 0.$$

Logo,

$$\int_C x^2 dx + xydy = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Lista de Exercícios

1. Considere o campo de vetores

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \text{ definido em } \mathbb{R}^2 \text{ exceto em } (0, 0).$$

- a) Desenhe o campo vetorial \mathbf{F} em uma quantidade representativa de pontos da circunferência de centro na origem e raio $a > 0$.
- b) Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, sendo C a circunferência de centro na origem e raio $a > 0$, percorrida no sentido anti-horário. (Resp.: 0.)
- c) Você poderia obter o resultado encontrado no item (b) sem calcular nenhuma integral de linha? Justifique sua resposta.
2. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, sendo $\mathbf{F}(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ e C a elipse $4x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido anti-horário. (Resp.: -4π .)
3. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, sendo $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, x(y + 1))$ e C é a fronteira do triângulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ e $(-1, 1, -1)$, percorrida nesta ordem. (Resp.: 0.)

4. Uma partícula se desloca ao longo de uma curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, num meio sujeito a um campo de forças $F(x, y, z) = (-y, x, z)$. Calcule o trabalho que F realiza ao deslocar a partícula de $\gamma(0)$ para $\gamma(2\pi)$. (Resp.: $2\pi(1 + \pi)$.)
5. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, sendo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y^2, z^2 - x^2, y^2 - z^2)$ e C é a curva de interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com o plano $y = 1$ com sentido de percurso de modo que sua projeção no xz seja percorrida no sentido anti-horário. (Resp.: 0.)

6. Suponha que $f(t)$ seja derivável e positiva para $t \in [a, b]$.
Sejam C a curva parametrizada por $\gamma(t) = (t, f(t))$,
 $t \in [a, b]$, e o campo de forças $\mathbf{F}(x, y) = (y, 0)$. Existe alguma
relação entre o trabalho $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e a área da região limitada
pelo eixo t , o gráfico de f e as retas $t = a$ e $t = b$? Justifique
sua resposta.
7. Calcule $\int_C -ydx + xdy$, onde C é a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
percorrida no sentido horário. (Resp.: -12π .)
8. Sejam $a > 0$ e $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ uma
parametrização da circunferência C de centro $(0, 0)$ e raio
 $a > 0$. Mostre que

$$\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

não depende do raio a .

Extensão do Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema. Seja C uma curva suave por trechos com parametrização $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Seja f uma função escalar de duas ou três variáveis com derivadas parciais de primeira ordem que existem e são contínuas em um conjunto aberto U contendo a curva C . Então,

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)). \quad (5)$$

Demonstração. Vamos primeiro demonstrar o teorema para curvas suaves e para funções escalares f de três variáveis. Usando a definição de integral de linha de um campo vetorial, temos

$$\begin{aligned}\int_C \nabla f \cdot dr &= \int_a^b \nabla f(r(t)) \cdot r'(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(r(t)) dt \\ &= f(r(b)) - f(r(a)),\end{aligned}$$

onde o penúltimo passo segue da Regra da Cadeia e o último passo segue do Teorema Fundamental do Cálculo. Para demonstrar o teorema para curvas suaves por trechos, basta subdividir C em um número finito de curvas suaves e somar as integrais resultantes.

Exemplo 1. Determine o trabalho realizado pelo campo gravitacional

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

ao mover uma partícula de massa m do ponto $(3, 4, 12)$ para o ponto $(2, 2, 0)$ ao longo de uma curva suave por partes C .

Solução. Já sabemos que \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo com $\mathbf{F} = \nabla f$, onde

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Portanto, pelo teorema acima, o trabalho realizado é

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12) \\ &= \frac{mMG}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = mMG \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13} \right). \end{aligned}$$

Note que para realizar este cálculo não é preciso parametrizar a curva de integração, nem mesmo é preciso conhecer a curva de integração, basta apenas conhecer os seus pontos inicial e final.

Exemplo 2. Considere o campo gradiente

$$\mathbf{F}(x, y) = (e^{-y} - 2x)\vec{i} + (-xe^{-y} - \sin y)\vec{j}.$$

Calcule $\int_C \mathbf{F} d\vec{r}$, onde C é qualquer curva C^1 por partes de $A = (\pi, 0)$ até $B = (0, \pi)$.

Solução. Pela extensão do teorema fundamental do cálculo para integrais de linha,

$$\int_C \mathbf{F} d\vec{r} = f(0, \pi) - f(\pi, 0),$$

onde f uma função potencial de \mathbf{F} em \mathbb{R}^2 , que será determinada usando primitivação. Temos,

$$f_x(x, y) = e^{-y} - 2x \tag{6}$$

$$f_y(x, y) = -xe^{-y} - \sin y. \tag{7}$$

Por (6),

$$f(x, y) = xe^{-y} - x^2 + A(y). \quad (8)$$

Combinando (7) com (8), encontramos

$$-xe^{-y} + A'(y) = f_y(x, y) = -xe^{-y} - \sin y.$$

Resulta que $A(y) = \cos y + k$, onde k é uma constante arbitrária.

Portanto, uma função potencial é $f(x, y) = xe^{-y} - x^2 + \cos y$.

Logo,

$$\int_C \mathbf{F} d\vec{r} = f(0, \pi) - f(\pi, 0) = -1 - (\pi - \pi^2 + 1) = \pi^2 - \pi - 2.$$

Exemplo 3. ([Relação entre trabalho e energia cinética.](#)) Suponha $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de forças contínuo. Sob ação da força resultante \mathbf{F} , uma partícula de massa m desloca-se de A até B , sendo sua trajetória C descrita pela curva $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow D$, de classe C^1 , com $\mathbf{r}(a) = A$ e $\mathbf{r}(b) = B$. Sejam v_A e v_b as velocidades escalares da partícula nos instantes a e b , respectivamente. Mostre que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2,$$

isto é, o trabalho realizado pela força resultante \mathbf{F} no deslocamento de A a B é igual a variação da energia cinética da partícula.

Solução. Como $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$, pela lei de Newton,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{v}'(t).$$

Assim,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b m\mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = m \int_a^b \mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt$$

De

$$(\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t))' = \mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) = 2\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$$

resulta

$$\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) = \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t) \right)'$$

Segue que

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= m \int_a^b \mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt = m \int_a^b \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t) \right)' dt \\ &= m \frac{1}{2} \mathbf{v}(b) \cdot \mathbf{v}(b) - m \frac{1}{2} \mathbf{v}(a) \cdot \mathbf{v}(a) \\ &= m \frac{1}{2} v_B^2 - m \frac{1}{2} v_A^2,\end{aligned}$$

onde $v_B^2 = \|\mathbf{v}(b)\|^2$ e $v_A^2 = \|\mathbf{v}(a)\|^2$. Portanto,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2.$$

Exemplo 4. (Conservação da energia mecânica.)

Suponha $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de forças contínuo e conservativo; assim, existe uma função escalar $E_p : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = -\nabla E_p$. (Observe que $-E_p$ é uma função potencial para \mathbf{F} .) Diremos que E_p é a energia potencial para \mathbf{F} . Suponhamos que uma partícula de massa m desloque em D e que $\mathbf{F} = -\nabla E_p$ seja a única força resultante sobre ela. Suponhamos ainda que $\mathbf{r}(t)$ seja a posição da partícula no instante t , em que \mathbf{r} é uma curva de classe C^1 definida em um intervalo I . Seja t_0 um instante fixo em I . Para todo t em I , o trabalho realizado pela força resultante \mathbf{F} entre os instantes t_0 e t é

$$\int_{\mathbf{r}(t_0)}^{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}(t_0)}^{\mathbf{r}(t)} \nabla(-E_p) \cdot d\mathbf{r} = -E_p(\mathbf{r}(t)) + E_p(\mathbf{r}(t_0)).$$

Por outro lado, pelo Exemplo 3,

$$\int_{\mathbf{r}(t_0)}^{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}(t_0)}^{\mathbf{r}(t)} \nabla(-E_p) \cdot d\mathbf{r} = E_c(t) - E_c(t_0),$$

onde $E_c(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2$ é a energia cinética no instante t . Portanto, para todo $t \in I$,

$$-E_p(\mathbf{r}(t)) + E_p(\mathbf{r}(t_0)) = E_c(t) - E_c(t_0),$$

ou seja,

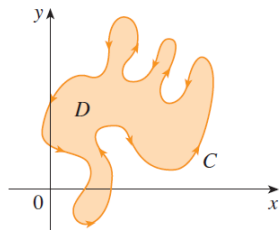
$$E_p(\mathbf{r}(t)) + E_c(t) = E_p(\mathbf{r}(t_0)) + E_c(t_0),$$

o que mostra que a energia total permanece constante durante o movimento.

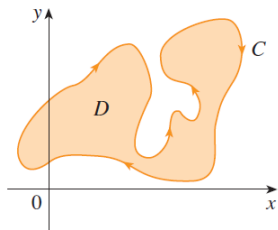
Teorema de Green

Antes de enunciarmos o Teorema de Green, precisamos de algumas definições.

Definição 1. Dizemos que a fronteira $C = \partial D$ de uma região limitada D do plano xy está **orientada positivamente**, se a região D fica à esquerda ao percorrermos a fronteira C (Figura 14).



(a) Orientação positiva



(b) Orientação negativa

Figura: 14.

Definição 2. Uma $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ se diz **fechada** se $r(a) = r(b)$.

Definição 3. Uma $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ se diz **simples** se $r(t_1) \neq r(t_2)$, quaisquer que sejam t_1 e t_2 em $[a, b]$, com $t_1 \neq t_2$.



simples,
não fechada



não simples,
não fechada



simples,
fechada



não simples,
fechada

Figura: 15. Tipos de curvas

Teorema de Green. Seja C uma curva plana simples, fechada, C^1 por partes, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C . Se $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ for um campo vetorial tal que P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas num conjunto aberto contendo D , então

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Observação. Outra notação para a curva na fronteira de D , positivamente orientada, é ∂D , daí a equação do Teorema de Green pode ser escrita como

$$\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Demonstração. Vamos provar o Teorema de Green para o caso em que D é uma região retangular, como mostrada na Figura 16.

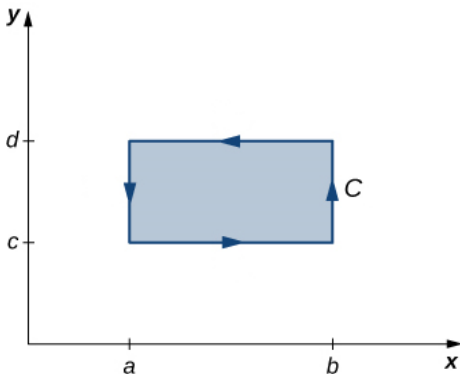


Figura: 16.

Parametrizando cada uma das arestas de D e usando a definição da integral de linha, temos

$$\begin{aligned} & \oint_C Pdx + Qdy \\ &= \int_a^b P(x, c)dx + \int_c^d Q(b, y)dy + \int_b^a P(x, d)dx + \int_d^c Q(a, y)dy \\ &= \int_c^d [Q(b, y) - Q(a, y)] dy - \int_a^b [P(x, d) - P(x, c)] dx \quad (9) \end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$Q(b, y) - Q(a, y) = \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx$$

e

$$P(x, d) - P(x, c) = \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y} dy.$$

Isto nos permite escrever (9) na forma

$$\begin{aligned}\oint_C Pdx + Qdy &= \int_c^d \left[\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] dy - \int_a^b \left[\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx \\ &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.\end{aligned}$$

Observação. A argumentação da demonstração acima continuaria válida se a região retangular for substituída por uma região limitada D no plano xy que pode ser descrita como uma região do tipo I e de tipo II. Tais regiões são chamadas de **regiões simples**. Verifique essa afirmação como exercício.

Exemplo 1. Calcule $\oint_C x^4 dx + xydy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de $(0,0)$ a $(1,0)$, de $(1,0)$ a $(0,1)$, e de $(0,1)$ a $(0,0)$, orientada no sentido anti-horário.

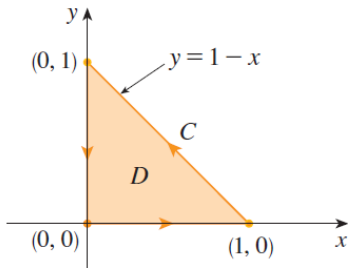


Figura: 17.

Solução. Poderíamos calcular esta integral de linha usando a definição, isso levaria ao cálculo separado de três integrais de linha sobre cada lado do triângulo. Em vez disso, vamos usar o Teorema de Green. Observe C é uma curva simples fechada suave por trechos e tem orientação positiva (Figura 17). Como as componentes do campo vetorial $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em \mathbb{R}^2 , podemos aplicar o Teorema de Green e obter

$$\begin{aligned}\oint_C x^4 dx + xy dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0) dy dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} y^2 dy \Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx \\ &= -\frac{1}{6} (1-x)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Exemplo 2. Calcular a integral de linha

$$I = \oint_C \left(3y - e^{\sin x} + \sqrt{4 + x^6} \right) dx + \left(7x + \sqrt{y^4 + 1} - e^{y^2} \right) dy,$$

onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 9$ orientada no sentido anti-horário.

Reolução. O cálculo direto dessa integral de linha parece uma tarefa difícil, mas o Teorema de Green fornece um outro modo. Como

$$P(x, y) = 3y - e^{\sin x} + \sqrt{1 + x^5}, \quad Q(x, y) = 7x + \sqrt{y^4 + 1} - e^{y^2}$$

e

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 3, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 7$$

segue do Teorema de Green que

$$I = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dA = \iint_D 4 dA = 4 \text{Área}(D) = 36\pi,$$

pois D é um disco de raio 3.

Exemplo 3. Calcule $\int_C e^x \sin y dx + (e^x \cos y + x) dy$, onde C é o arco da circunferência $x^2 + y^2 = 1$, no primeiro quadrante, orientada no sentido anti-horário.

Solução. O Teorema de Green não pode ser aplicado neste cálculo porque a curva C não é fechada. No entanto, como o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = (e^x \sin y, e^x \cos y + x)$ é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 , podemos aplicar o Teorema de Green à região D limitada por $C \cup C_1 \cup C_2$ orientada no sentido anti-horário, onde C_1 é o segmento de reta de $(0, 1)$ a $(0, 0)$ e C_2 é o segmento de reta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ (Figura 18).

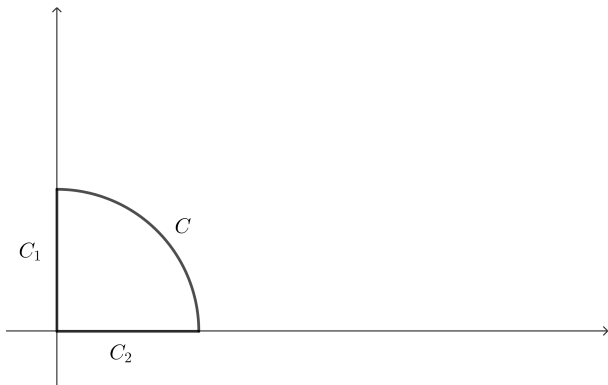


Figura: 18.

Como $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y + x) = e^x \cos y + 1$ e
 $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y) = e^x \cos y$, segue do Teorema de Green que

$$\frac{\pi}{4} = \text{área}(D) = \iint_D 1 dA = \int_{C \cup C_1 \cup C_2} e^x \sin y dx + (e^x \cos y + x) dy.$$

Pela aditividade,

$$\begin{aligned} & \int_{C \cup C_1 \cup C_2} e^x \sin y dx + (e^x \cos y + x) dy \\ &= \int_C e^x \sin y dx + (e^x \cos y + x) dy \\ &+ \int_{C_1} e^x \sin y dx + (e^x \cos y + x) dy \\ &+ \int_{C_2} e^x \sin y dx + (e^x \cos y + x) dy. \end{aligned}$$

As curvas C_1 e C_2 são parametrizadas por $\gamma_1(t) = (0, -t)$, $-1 \leq t \leq 0$, e $\gamma_2(t) = (t, 0)$, $0 \leq t \leq 1$, respectivamente. Logo,

$$\int_{C_1} e^x \sin y dx + (e^x \cos y + x) dy = \int_{-1}^0 -\cos t dt = -\sin 1$$

e

$$\int_{C_2} e^x \sin y dx + (e^x \cos y + x) dy = \int_0^1 0 dt = 0.$$

Assim,

$$\int_C e^x \sin y dx + (e^x \cos y + x) dy = \frac{\pi}{4} + \sin 1.$$

Observação. O Teorema de Green pode ser aplicado para regiões com buracos. Observe que a fronteira C da região D na Figura 19 é constituída por duas curvas fechadas simples C_1 e C_2 .

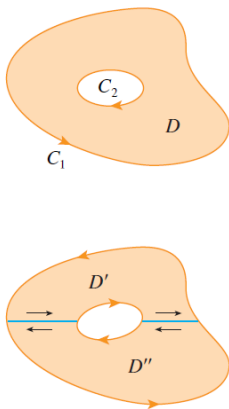


Figura: 19.

Assumimos que estas curvas são orientadas de modo que a região D está sempre do lado esquerdo enquanto a curva C é percorrida. Assim, o sentido anti-horário é positivo para a curva exterior C_1 , mas no sentido horário para a curva interior C_2 . Se dividirmos D em duas regiões D' e D'' , pela introdução dos segmentos de reta mostrados na Figura 19, e então aplicarmos o Teorema de Green a cada uma das regiões D' e D'' , obteremos

$$\begin{aligned} \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dA &= \iint_{D'} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dA + \iint_{D''} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dA \\ &= \oint_{\partial D'} Pdx + Qdy + \oint_{\partial D''} Pdx + Qdy \end{aligned}$$

Como as integrais de linha sobre a fronteira comum são em sentido opostos, elas se cancelam e então obtemos

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{C_1} Pdx + Qdy + \oint_{C_2} Pdx + Qdy = \int_C Pdx + Qdy$$

que é o Teorema de Green para a região D com buraco.

Exemplo 4. Se $\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$, mostre que

$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para toda curva fechada simples que circunda a origem $(0, 0)$ no sentido anti-horário.

Solução. Como C é um caminho fechado arbitrário, não conseguimos calcular diretamente a integral de linha dada. Além disso, não podemos aplicar o Teorema de Green porque a curva circunda a origem, e assim a região delimitada por ela contém a origem $(0, 0)$, ou seja, essa região não está inteiramente contida no domínio de \mathbf{F} .

Para calcular essa integral de linha, vamos considerar uma circunferência orientada anti-horário C' centrada na origem e raio a , onde a é escolhido para ser pequeno o suficiente para que C' esteja contida na região limitada por C (ver Figura 20).

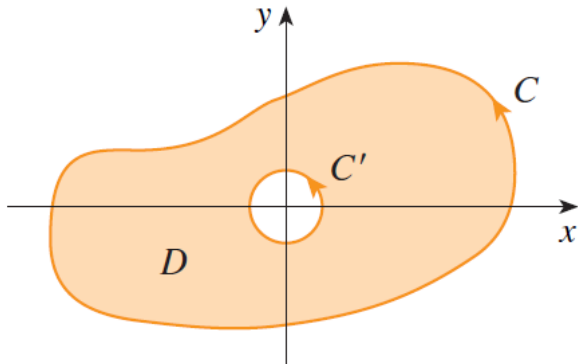


Figura: 20.

Seja D a região limitada por C e C' . Então a orientação positiva da fronteira de D é $C \cup (-C')$ e, aplicando a versão geral do Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned} \oint_C Pdx + Qdy + \oint_{-C'} Pdx + Qdy &= \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dA \\ &= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] dA \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo

$$\oint_C Pdx + Qdy = - \oint_{-C'} Pdx + Qdy = \oint_{C'} Pdx + Qdy$$

isto é,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Agora podemos calcular facilmente essa última integral usando a definição. Para isso, parametrizamos C' por $r(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Assim,

$$\begin{aligned}\oint_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(r(t)) \cdot r'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2\pi \frac{(-a \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(a \cos t)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\end{aligned}$$

Portanto,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$$

Aplicação do Teorema de Green: Cálculo de área

Como a área de uma região fechada e limitada D no plano xy é $\iint_D 1dA$, podemos escolher $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ tais que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Existem várias possibilidades, por exemplo:

1. $P(x, y) = 0$ e $Q(x, y) = x$;
2. $P(x, y) = -y$ e $Q(x, y) = 0$;
3. $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$ e $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$.

Assim, o Teorema de Green dá as seguintes fórmulas para a área de D :

1. Para o campo vetorial dado em (1), $\text{Área}(D) = \oint_C xdy$.
2. Para o campo vetorial dado em (2), $\text{Área}(D) = - \oint_C ydx$.
3. Para o campo vetorial dado em (3),

$$\text{Área}(D) = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx$$

Exemplo 5. Calcule a área da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Solução. A elipse tem parametrização $r(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Usando a terceira fórmula, temos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2} \oint_C (-y, x) \cdot dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-b \sin t, a \cos t) \cdot (-a \sin t, b \cos t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab. \end{aligned}$$

Lista de Exercícios

1. Calcular a integral $\oint_C \frac{x^2 - y^2}{2} dx + \left(\frac{x^2}{2} + y^4 \right) dy$, onde C é a fronteira da região definida por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\},$$

orientada no sentido anti-horário. (Resp.: 14/3.)

2. Considere a integral de linha $\oint_C (x + y) dx + (y - x) dy$, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ orientada positivamente. (Resp.: $-2\pi a^2$.)

3. Seja $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} + 3x \right)$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Calcule a integral de linha do campo vetorial \mathbf{F} ao longo da curva C orientada no sentido anti-horário, onde
1. C é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$. (Resp.: 14π .)
 2. C é a fronteira do retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \pi, |y| \leq 3\}$. (Resp.: 38π .)

Sugestão: note que $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, onde

$$\mathbf{F}_1(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \text{ e } \mathbf{F}_2(x, y) = (0, 3x) \text{ e que}$$
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \mathbf{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_C \mathbf{F}_2 \cdot d\vec{r}.$$

4. Encontre a área da região delimitada pela curva com a parametrização $\gamma(t) = (\sin t \cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$. (Resp.: $2/3$.)

5. Calcule $\oint_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, onde γ é curva

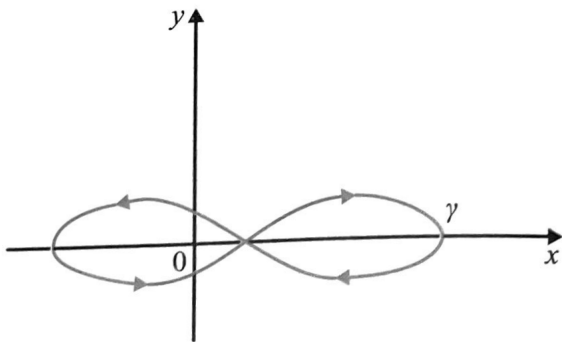


Figura: 21.

6. Suponha que P e Q são de classe C^1 no conjunto aberto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (1, 1)\}$. Suponha ainda que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ em U . Calcule $\oint_{\gamma} Pdx + Qdy$, sabendo que $\oint_{\gamma_1} Pdx + Qdy = 1$ e $\oint_{\gamma_2} Pdx + Qdy = 2$, onde γ_1 e γ_2 são orientadas no sentido horário e γ no sentido anti-horário.

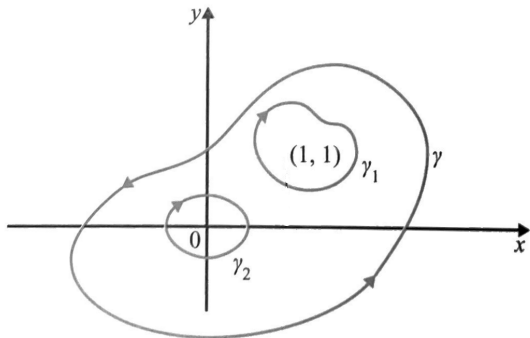


Figura: 22.

Campos vetoriais no plano conservativos

Vimos na extensão do teorema fundamental do cálculo para a integral de linha que, se $\mathbf{F} = \nabla f$, a integral de linha de \mathbf{F} ao longo de uma curva C depende apenas dos pontos inicial e final. Caracterizaremos agora os campos vetoriais no plano que são campos gradientes. Para isto, vamos precisar da seguinte definição.

Definição.

1. Um caminho em \mathbb{R}^2 é uma função contínua $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Os pontos $A = \gamma(0)$ e $B = \gamma(1)$, pertencentes a \mathbb{R}^2 , são os pontos inicial e final de γ , respectivamente. Diz-se neste caso que o caminho γ liga o ponto A ao ponto B em \mathbb{R}^2 .
2. Um subconjunto $U \subset \mathbb{R}^2$ é dito um **conjunto conexo por caminhos** se dois pontos quaisquer de U podem ser ligados por um caminho contido em U .
3. Um subconjunto $U \subset \mathbb{R}^2$ é dito um **simplesmente conexo** quando U é conexo por caminhos e, além disso, para toda curva fechada C em U , a região limitada por C está contida em U .

Exemplos.

1. \mathbb{R}^2 é simplesmente conexo.
2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ não é simplesmente conexo.
3. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ é simplesmente conexo.

Campos vetoriais no plano conservativos

Teorema. Seja $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ um campo vetorial com funções coordenadas P e Q tendo derivadas parciais de primeira ordem contínuas num subconjunto aberto e simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$, qualquer que seja a curva fechada C , suave por partes, contida em U .
2. A integral de linha de \mathbf{F} independe do caminho de integração em U , isto é, quaisquer que forem os pontos A e B de U , o valor da integral $\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r}$ permanece o mesmo para toda curva C^1 por partes, contida em U , que liga A a B .
3. \mathbf{F} é conservativo, ou seja, existem uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \mathbf{F}$ em U .
4. $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$, para todo $(x, y) \in U$.

Demonstração

Vamos provar que

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1),$$

o que estabelece o teorema.

(1) \Rightarrow (2). Sejam C_1 e C_2 duas curvas C^1 por partes contidas em U que têm os mesmos pontos iniciais e finais A e B . Defina C como a curva fechada constituída por C_1 seguida por C_2^- . Como C é fechada e C^1 por partes, então, por (1), segue que

$$0 = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Portanto, $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, provando (2).

Provaremos agora que (2) \Rightarrow (3). Fixemos $A = (a, b) \in U$ e, para qualquer ponto $(x, y) \in U$, seja C um caminho contínuo de (a, b) a (x, y) contido em U . (Tal caminho existe, pois U é conexo por caminhos.) Defina $f(x, y)$ por

$$f(x, y) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Como a integral de linha de \mathbf{F} independe do caminho de integração em U , esta definição de f faz sentido. Novamente como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho de integração em U , podemos usar a notação

$$f(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

para indicar a integral de linha de \mathbf{F} sobre uma curva qualquer C^1 por partes ligando (a, b) a (x, y) .

Queremos mostrar que f tem a propriedade $\nabla f = \mathbf{F}$ em U .

De fato, como U é aberto, existe uma bola aberta com centro em (x, y) contida em U . Seja (x_1, y) nessa bola com $x_1 < x$. Seja C um caminho de (a, b) para (x, y) que consiste em duas partes: C_1 e C_2 . O primeiro trecho C_1 é qualquer caminho de (a, b) para (x_1, y) contido em U ; já C_2 é o segmento de reta horizontal de (x_1, y) a (x, y) (Figura 23). Então

$$f(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

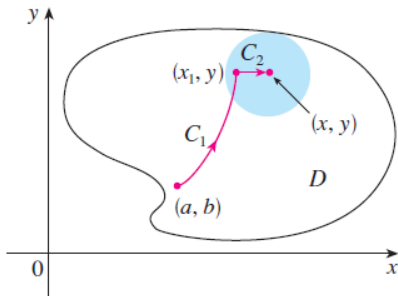


Figura: 23.

Note que a $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ não depende de x . Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Parametrizando C_2 por $\mathbf{r}(t) = (t, y)$, $x_1 \leq t \leq x$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot (1, 0) dt \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x P(t, y) dt \\ &= P(x, y). \end{aligned}$$

Um argumento semelhante usando um segmento de reta vertical em vez de um segmento de reta horizontal mostra que

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$. Portanto $\nabla f = \mathbf{F}$ e \mathbf{F} é conservativo, provando (3).

Mostremos que (3) \Rightarrow (4). Como $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ é conservativo, existe uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ em U , ou seja,

$$P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{e} \quad Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad \forall (x, y) \in U.$$

Como P e Q são de classe C^1 , então f é de classe C^2 e, considerando suas derivadas parciais de segunda ordem, segue do Teorema de Clairaut que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \quad (x, y) \in U,$$

provando (4).

Finalmente, provaremos que (4) \Rightarrow (1). Seja C uma curva fechada simples suave por trechos qualquer contida no domínio U de \mathbf{F} e seja D a região delimitada por C . Como U é simplesmente conexo, a região D também está contida em U . Pelo Teorema de Green,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D 0 dA = 0.$$

Uma curva fechada que não seja simples se autointercepta em um ou mais pontos e pode ser dividida em várias curvas fechadas simples. Mostramos que as integrais de linha de \mathbf{F} sobre essas curvas simples são todas 0 e, somando essas integrais, podemos ver que para qualquer curva fechada C a integral de linha é 0. A demonstração do teorema está concluída.

Construção de uma função potencial em \mathbb{R}^2 usando integrais definidas

Como vimos, a função

$$f(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} Pdx + Qdy,$$

onde (a, b) é um ponto fixado de U , define uma função potencial do campo vetorial $\mathbf{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ conservativo. Essa integral pode ser calculada do seguinte modo: integra-se de (a, b) a (x, b) ao longo do segmento horizontal C_1 e depois de (x, b) a (x, y) pelo segmento vertical C_2 . (Figura 24).

Parametrizando C_1 por $\gamma_1(t) = (t, b)$, $a \leq t \leq x$, e C_2 por $\gamma_2(t) = (x, t)$, $b \leq t \leq y$, obtemos

$$f(x, y) = \int_a^x P(t, b)dt + \int_b^y Q(x, t)dt.$$

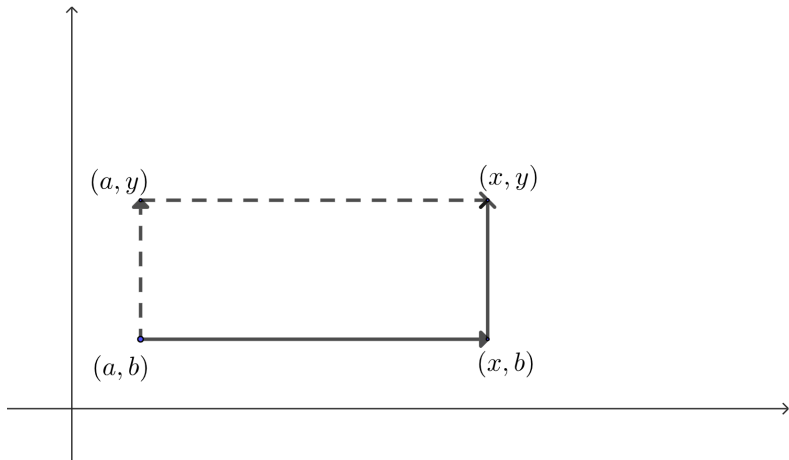


Figura: 24.

Podemos calcular a integral $\int_{(a,b)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$ ao longo do caminho tracejado na Figura 24. Neste caso, obtemos

$$f(x, y) = \int_b^y Q(a, t)dt + \int_a^x P(t, y)dt.$$

Exemplo 1. Considere a curva C parametrizada por $\gamma(t) = (e^{t-1}, \sin \frac{\pi}{t})$, $1 \leq t \leq 2$. Calcule $\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y) = (2x \cos y, -x^2 \sin y).$$

Solução. Como \mathbf{F} é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 e

$$\frac{\partial}{\partial x}(-x^2 \sin y) = -2x \sin y = \frac{\partial}{\partial y} - (x^2 \sin y),$$

o último teorema garante que $\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r}$ independe do caminho que liga $\gamma(1) = (1, 0)$ a $\gamma(2) = (e, 1)$.

Usando o caminho poligonal ligando os pontos $(1, 0)$, $(e, 0)$ e $(e, 1)$ por meio de segmentos de retas contidos nos eixos coordenados, temos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} &= \int_{(1,0)}^{(e,0)} \mathbf{F} d\mathbf{r} + \int_{(e,0)}^{(e,1)} \mathbf{F} d\mathbf{r} \\ &= \int_1^e 2t dt + \int_0^1 -e^2 \sin t dt \\ &= e^2 \cos 1 - 1. \end{aligned}$$

Alternativamente, novamente pelo último teorema, \mathbf{F} é um campo conservativo. Portanto, pela extensão do teorema fundamental do cálculo para integrais de linha,

$$\int_C \mathbf{F} dr = f(e, 1) - f(1, 0),$$

onde f é uma função potencial. Como

$$f(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{F} dr$$

onde (a, b) é um ponto fixado em \mathbb{R}^2 (neste exemplo podemos tomar $(0, 0)$) define uma função potencial, onde a integral acima pode ser calculada de (a, b) a (x, b) ao longo do segmento horizontal e depois de (x, b) a (x, y) pelo segmento vertical. Assim,

$$f(x, y) = \int_0^x 2t dt + \int_0^y -x^2 \sin t dt = x^2 \cos y.$$

Então

$$\int_C \mathbf{F} dr = f(e, 1) - f(1, 0) = e^2 \cos 1 - 1.$$

Lista de Exercícios

1. Considere o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$.
 - a) Calcule a integral de linha de \mathbf{F} ao longo do arco da parábola $y = (x - 1)^2$ do ponto $(1, 0)$ ao ponto $(2, 1)$. (Resp.: $\arctan \frac{1}{2}$.)
 - b) Calcule todos os valores possíveis de $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é uma curva simples fechada de classe C^1 . (Resp.: $0, -2\pi, 2\pi$.)
2. Considere a integral de linha

$$\int_C (x \ln(x^2 + 1) + (x^2 + 1)y) dx + \alpha \left(\frac{x^3}{3} + x + \sin y \right) dy.$$

- a) Determine a constante α para que essa integral seja independente do caminho. (Resp.: 1.)
- b) Calcule o valor dessa integral de $A = (0, 0)$ a $B = (1, 1)$ para o valor de α encontrado em (a). (Resp.: $\frac{11}{6} + \ln 2 - \cos 1$.)

3. Verifique que as integrais independem do caminho e calcule seus valores.

a) $\int_{(1,-2)}^{(3,4)} \frac{y}{x^2} dx - \frac{x}{x^2} dy$. (Resp.: $-10/3$.)

b) $\int_{(0,0)}^{(x_0,y_0)} \sin y dx + x \cos y dy$. (Resp.: $x_0 \sin y_0$.)

4. a) Caso exista, encontre uma função potencial para $V(x, y) = (2xy^3 - y^2 \cos x, 1 - 2y \sin x + 3x^2y^2)$.

b) Calcule $\int_C (2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2y^2) dy$, onde C é o arco de parábola $2x = \pi y^2$, de $(0, 0)$ a $(\pi/2, 1)$. (Resp.: $\pi^2/4$.)

5. Calcule $\oint_C \frac{yx^2 dx - x^3 dy}{(x^2 + y^2)^2}$, onde C é a curva de equação $\frac{x^2}{4} + (y - \frac{1}{3})^2 = 1$, percorrida no sentido anti-horário.
(Resp.: $-\pi$.)

6. Encontre todos os possíveis valores de $\oint_C \frac{(x + y)dx + (y - x)dy}{x^2 + y^2}$, onde C é uma curva simples fechada que não passa pela origem. (Resp.: $-2\pi, 2\pi, 0$.)

7. Sejam $F_1(x, y)$ e $F_2(x, y)$ funções de classe C^1 em $U = \mathbb{R}^2 - \{A, B\}$ (A e B como na figura abaixo), tais que $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ em U . Sendo C_1 , C_2 e C_3 as curvas indicadas na

figura abaixo, calcule $\oint_{C_3} F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy$, supondo

que $\oint_{C_1} F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = 12$ e

$\oint_{C_2} F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = 15$. (Resp.: -3 .)

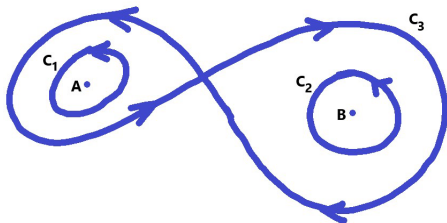


Figura: 25.

Superfícies parametrizadas e suas áreas

Até agora temos considerado tipos especiais de superfícies: superfícies quádricas, gráficos de funções de duas variáveis e superfícies de nível de funções de três variáveis. Nesta aula, usaremos funções vetoriais para descrever superfícies mais gerais, chamadas superfícies parametrizadas e calcularemos suas áreas. Este assunto é pré-requisito para o estudo de integrais de superfície de funções escalares e de campos de vetores.

De modo muito semelhante à descrição de curvas espaciais por uma função vetorial $r(t)$ de um único parâmetro t , podemos descrever uma superfície por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$ de dois parâmetros u e v . Mais especificamente:

Definição. Considere uma função $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida num subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$. A imagem $\mathbf{r}(D)$ de D por \mathbf{r} é chamada uma superfície parametrizada, e sua parametrização é

$$\mathbf{r}(u, v) = (x, y, z) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

ou equivalentemente pelas equações paramétricas

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D.$$

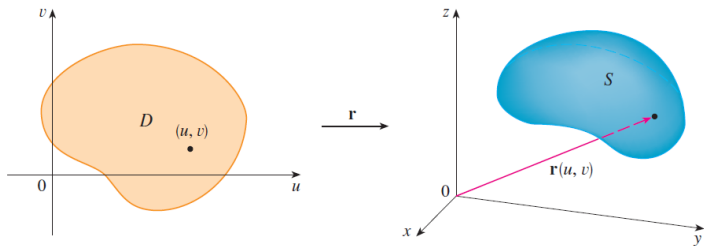


Figura: 26. Uma superfície parametrizada S (crédito: J. Stewart, Vol. II)

Exemplo 1. Descreva a superfície S parametrizada por

$$\mathbf{r}(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

Solução. As equações paramétricas para essa superfície são

$$x = \cos u, \quad y = \sin u, \quad z = v,$$

e $0 \leq u \leq 2\pi$ e $-\infty < v < \infty$. Então, para qualquer ponto (x, y, z) da superfície S , temos

$$x^2 + y^2 = \cos^2 u + \sin^2 u = 1.$$

Isso implica que todas as seções transversais paralelas ao plano xy (isto é com z constante) são circunferências de raio 1. Como $z = v$ e não existe restrição ao valor de v , a superfície S é um cilindro circular de raio 1 cujo eixo é o eixo z .

Exemplo 2. Descreva a superfície S parametrizada por

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2), \quad 0 \leq u < \infty, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Solução. As equações paramétricas para essa superfície são

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u^2,$$

e $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Observe que se u é mantido constante, digamos $u = u_0$, a curva resultante é uma circunferência de raio u no plano $z = u_0^2$. Portanto, à medida que u aumenta, o raio da circunferência resultante aumenta. Se v for mantido constante, a curva resultante será uma parábola vertical. Portanto, esperamos que a superfície seja um parabolóide. Para confirmar isso, observe que

$$x^2 + y^2 = (u \cos v)^2 + (u \sin v)^2 = u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v = u^2 = z.$$

Portanto, a superfície é o parabolóide $z = x^2 + y^2$.

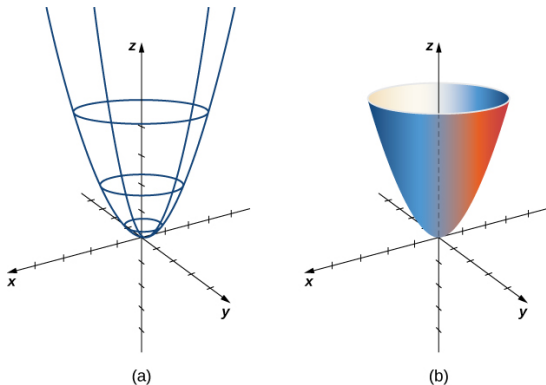


Figura: 27. (a) As circunferências surgem mantendo u constante; as parábolas verticais surgem mantendo v constante. (b) Um parabolóide resulta de todas as escolhas de u e v no domínio do parâmetro. (crédito: J. Stewart, Vol. II)

Exemplo 3. Um sistema de computação algébrica foi usado para traçar a superfície parametrizada (veja a Figura 28) por

$$\mathbf{r}(u, v) = ((2 + \sin v) \cos u, (2 + \sin v) \sin u, u + \cos v),$$

$0 \leq u \leq 4\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Quais são as curvas da grade com u constante? Quais têm v constante?

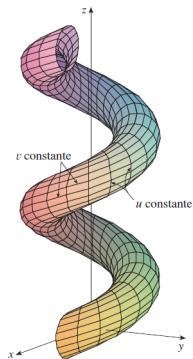


Figura: 28. (crédito: J. Stewart, Vol. II)

Solução. Se v é constante, então $\sin v$ e $\cos v$ são constantes, portanto, as equações paramétricas as curvas em espiral na Figura 28. Já as curvas de grade com u constante são círcunferências (Figura 29)

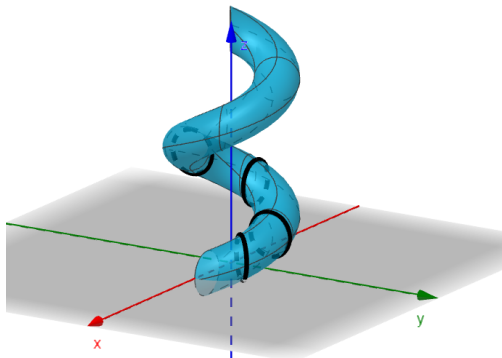


Figura: 29.

Exemplo 4. Determine a função vetorial que representa o plano que passa pelo ponto P_0 com vetor posição \mathbf{r}_0 e que contenha dois vetores não paralelos \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Solução. Se P é qualquer ponto desse plano, existem escalares u e v tais que

$$\overrightarrow{P_0P} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}.$$

Se \mathbf{r} é o vetor posição de P e \mathbf{r}_0 é o vetor posição de P_0 , então

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}.$$

Assim, a equação vetorial do plano pode ser escrita como

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

onde u e v são números reais quaisquer. Se escrevermos $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, podemos escrever as equações paramétricas do plano pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e com vetores direção \mathbf{a} e \mathbf{b} como segue:

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1, \quad y = y_0 + ua_2 + vb_2, \quad z = z_0 + ua_3 + vb_3$$

onde u e v são números reais quaisquer.

Exemplo 5 Determine uma representação parametrizada da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Solução. A esfera tem uma representação simples $\rho = R$ em coordenadas esféricas, então vamos escolher os ângulos θ e ϕ das coordenadas esféricas como parâmetros. Tomando $\rho = R$, nas relações entre as coordenadas retangulares e coordenadas esféricas, obtemos as equações paramétricas da esfera

$$x = R \sin \phi \cos \theta, \quad y = R \sin \phi \sin \theta, \quad z = R \cos \theta$$

com $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. A equação vetorial correspondente é

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \theta)$$

com $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, de modo que o domínio dos parâmetros é o retângulo $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. As curvas da grade com ϕ constante são as circunferências de latitude constante (incluindo o equador). As curvas da grade com θ constante são os meridianos (semicircunferências), que ligam os Pólos Norte e Sul (veja a Figura 30).

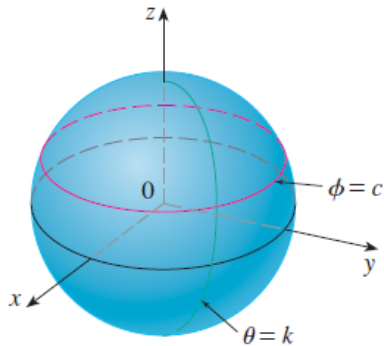


Figura: 30. as curvas de grade para uma esfera são curvas de latitude e longitude constantes (crédito: J. Stewart, Vol. II)

Exemplo 6. Dê uma parametrização da porção do cone $x^2 + y^2 = z^2$ limitada inferiormente pelo plano $z = -2$.

Solução. A seção transversal horizontal do cone na altura $z = u$ é a circunferência $x^2 + y^2 = u^2 = |u|^2$. Assim, um ponto no cone na altura u possui coordenadas $(|u| \cos v, |u| \sin v, u)$ para o ângulo v . Portanto, uma parametrização do cone é

$$\mathbf{r}(u, v) = (|u| \cos v, |u| \sin v, u).$$

Como não estamos interessados no cone inteiro, apenas na parte acima do plano $z = -2$, o domínio dos parâmetros é dado por $-2 \leq u < \infty, 0 \leq v \leq 2\pi$.

Exemplo 7. Um tipo importante de superfície parametrizada é o gráfico de uma função real de duas variáveis. O modo mais simples de parametrizar o gráfico de uma função de duas variáveis $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in D.$$

Por exemplo, o cone de uma folha $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, pode ser parametrizado por

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}),$$

em que os parâmetros x e y variam sobre o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, que nesse caso é \mathbb{R}^2 .

Da mesma forma, se S é uma superfície dada pela equação $x = g(y, z)$ ou pela equação $y = h(x, z)$, então uma parametrização de S é $\mathbf{r}(y, z) = (g(y, z), y, z)$ ou $\mathbf{r}(x, z) = (x, h(x, z), z)$, respectivamente. Por exemplo, o parabolóide $y = x^2 + z^2$ pode ser parametrizado por $\mathbf{r}(x, z) = (x, x^2 + z^2, z)$, $(x, z) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 8. Outro tipo importante de superfície parametrizada é a **superfície de revolução**. Considere a superfície S obtida girando-se uma curva C no plano xz em torno do eixo z . Para uma visualização acesse o link:

<https://www.geogebra.org/m/BtAdpcYM>.

Se C tem equações paramétricas

$$x = x(t), \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b,$$

com $x(t) \geq 0$ para todo $t \in [a, b]$, a superfície de revolução S assim gerada tem parametrização dada por

$$\mathbf{r}(t, \theta) = (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t)), \quad a \leq t \leq b, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Os parâmetros t e θ têm a seguinte interpretação: se

$P = (x, y, z) \in S$, então P pertence a uma circunferência de centro no eixo z e raio igual a $x(t)$ para algum $t \in [a, b]$, cuja distância ao plano xy é $z(t)$. O parâmetro θ representa o ângulo das coordenadas polares da projeção de P no plano xy .

Observação 2. Uma superfície S pode ser parametrizada por diferentes modos. Por exemplo, nos itens a seguir daremos três parametrizações do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Gráfico: $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r), \quad (r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi].$$

c) Superfície de revolução: O cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ pode ser visto girando-se a semireta $z = x$, $x \geq 0$, em torno do eixo z .

Assim, esse cone tem parametrização

$$\mathbf{r}(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, t), \quad (t, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi].$$

Planos Tangentes

Agora vamos determinar o plano tangente a uma superfície parametrizada S determinada por uma função vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D$$

em um ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Se mantivermos u constante usando $u = u_0$, então $\mathbf{r}(u_0, v)$ torna-se uma função vetorial do parâmetro único v e define uma curva de grade C_1 em S . (Veja a Figura 31.) O vetor tangente a C_1 em P_0 é obtido tomando-se a derivada parcial de \mathbf{r} em relação a v :

$$\mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right).$$

Da mesma forma, se mantivermos v constante tomando $v = v_0$, obteremos a curva da grade C_2 dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que está sobre S , e cujo vetor tangente em P_0 é

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right).$$

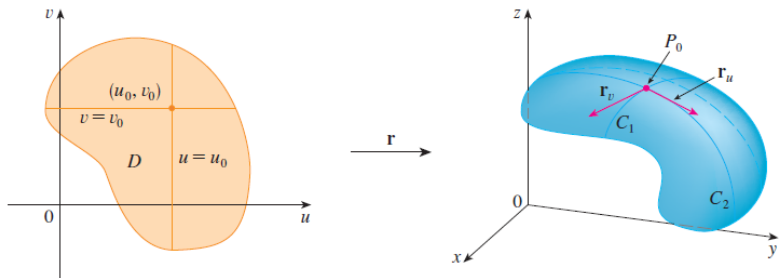


Figura: 31. (crédito: J. Stewart, Vol. II)

Se o produto vetorial $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \neq \vec{0}$, então a superfície S é dita suave em $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Se $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \neq \vec{0}$ para todo $(u_0, v_0) \in D$, então a superfície S é chamada suave.

Para uma superfície suave, o plano tangente é o que contém os vetores tangentes $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ e $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ e $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ é o **vetor normal** ao plano tangente. Neste caso, definimos o plano tangente a S em $\mathbf{r}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ como sendo o plano gerado pelos vetores $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ e $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$, cuja equação na forma paramétrica é dada por

$$(x, y, z) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)) + \lambda \mathbf{r}_u(u_0, v_0) + \mu \mathbf{r}_v(u_0, v_0),$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, e na forma normal é dada por

$$(\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Exemplo 9. Mostre que todo gráfico de uma função $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, de classe C^1 é uma superfície suave.

Solução. Seja $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in D$, temos $\mathbf{r}_x(x, y) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y))$, $\mathbf{r}_y(x, y) = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y))$ são contínuos e

$$\mathbf{r}_x(x, y) \times \mathbf{r}_y(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right)$$

que é diferente de $\vec{0}$ para todo $(x, y) \in D$. Portanto, o gráfico de f é uma superfície suave e o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é dado pela equação na forma normal por

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0,$$

ou seja,

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0.$$

Exemplo 10. O cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ não é uma superfície suave em $(0, 0, 0)$. De fato, usando a parametrização $\mathbf{r}(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, t)$,

$$\mathbf{r}_t(t, \theta) \times \mathbf{r}_\theta(t, \theta) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 1 \\ -t \cos \theta & t \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (-t \cos \theta, -t \sin \theta, t) = \vec{0}$$

para $t = 0$. No entanto, o cone é uma superfície suave em qualquer ponto $(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \neq (0, 0, 0)$.

No restante desta aula, também da disciplina, consideraremos apenas superfícies parametrizadas que são imagens de funções $r : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tais que:

- i) D é um subconjunto limitado e fechado do plano.
- ii) r é injetora, exceto eventualmente na fronteira de D .
- iii) A superfície é suave, exceto eventualmente num número finito de pontos.

Área da Superfície

Definiremos agora a área de uma superfície parametrizada. Para simplificar, vamos considerar inicialmente uma superfície cujo domínio dos parâmetros D é um retângulo, que dividiremos em sub-retângulos R_{ij} . Vamos escolher o ponto amostral (u_i^*, v_j^*) como o vértice inferior esquerdo do retângulo R_{ij} . (Veja a Figura 32.)

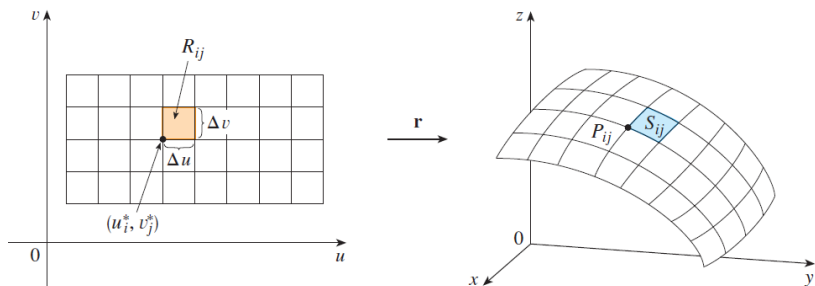


Figura: 32. (crédito: J. Stewart, Vol. II)

Esta divisão de D em sub-retângulos dá uma divisão correspondente da superfície S em partes S_{ij} . Escolha o ponto P_{ij} em cada parte S_{ij} . O ponto P_{ij} corresponde ao ponto (u_i^*, v_j^*) no domínio do parâmetro. Sejam

$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*) \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$$

os vetores tangentes em P_{ij} . A Figura 33 (a) mostra como os dois lados da parte que se encontram em P_{ij} podem ser aproximados por vetores. Esses vetores, por sua vez, podem ser aproximados pelos vetores $\Delta u \mathbf{r}_u^*$ e $\Delta v \mathbf{r}_v^*$ porque as derivadas parciais podem ser aproximadas pelos quocientes de diferenças. Assim, aproximamos S_{ij} pelo paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u \mathbf{r}_u^*$ e $\Delta v \mathbf{r}_v^*$. Esse paralelogramo está representado na Figura 33 (b) e está contido no plano tangente a S em P_{ij} .

A área desse paralelogramo é $\|\Delta u \mathbf{r}_u^* \times \Delta v \mathbf{r}_v^*\| = \|\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*\| \Delta u \Delta v$ e então uma aproximação da área de S é

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \|\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*\| \Delta u \Delta v$$

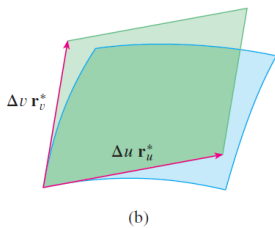
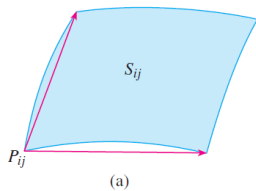


Figura: 33. (crédito: J. Stewart, Vol. II)

Essa aproximação fica melhor à medida que aumentamos o número de sub-retângulos e reconhecemos a soma dupla como a soma de Riemann para a integral dupla $\iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dA$. Isso justifica a seguinte definição:

Definição. Se S é uma superfície suave parametrizada por

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D$$

e S é coberta uma única vez, então a área de S é

$$A(S) = \iint_D \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| dudv$$

Exemplo 11. Mostre que a área da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ é $4\pi R^2$.

Solução. A esfera tem parametrização

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (R \cos \theta \sin \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \phi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Os vetores tangentes são

$$\mathbf{r}_\theta = (-R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta \sin \phi, 0)$$

$$\mathbf{r}_\phi = (R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, -R \sin \phi).$$

Portanto,

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = (R^2 \cos \theta \sin^2 \phi, R^2 \sin \theta \sin^2 \phi, R^2 \sin \phi \cos \phi).$$

Agora,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\| &= \sqrt{R^4 \sin^4 \phi \cos^2 \theta + R^4 \sin^4 \phi \sin^2 \theta + R^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} \\ &= \sqrt{R^4 \sin^4 \phi + R^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} = R^2 \sqrt{\sin^2 \phi} = R^2 \sin \phi.\end{aligned}$$

Observe que $\sin \phi \geq 0$ no domínio do parâmetro porque $\phi \in [0, \pi]$, e isso justifica a equação $\sqrt{\sin^2 \phi} = \sin \phi$. A área da superfície da esfera é

$$\iint_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]} \|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\| d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \phi d\phi d\theta = 4\pi R^2.$$

Obtemos, assim, a fórmula familiar para a área de superfície de uma esfera usando integrais de superfície.

Área de Superfície do Gráfico de uma Função

Para o caso especial de uma superfície S com equação $z = f(x, y)$, onde (x, y) está em D e f tem derivadas parciais contínuas, tomamos x e y como parâmetros. As equações paramétricas são

$$x = x \quad y = y \quad z = f(x, y)$$

Assim

$$\mathbf{r}_x = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \mathbf{r}_y = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

e

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

Então temos

$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

e a fórmula de área da superfície do gráfico é

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dA \quad (10)$$

Exemplo 12. Determine a área da parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

Solução. O plano intercepta o parabolóide na circunferência $x^2 + y^2 = 9, z = 9$. Portanto, a superfície dada fica acima do disco D com centro na origem e raio 3. Usando a Fórmula 10, temos

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dA$$

Mudando para coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^3 r \sqrt{1 + 4r^2} dr d\theta \\ &= 2\pi \frac{1}{8} \frac{2}{3} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^3 = \frac{\pi}{6} (37\sqrt{37} - 1) \end{aligned}$$

Lista de Exercícios

1. Descreva a superfície S parametrizada por

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u), \quad -\infty < u < \infty, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

2. Seja S uma superfície parametrizada por

$$\mathbf{r}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, 1 - v^2), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad v \geq 0.$$

Identifique esta superfície. Ela é suave? (Resp.: parabolóide circular; S é suave exceto no ponto $(0, 0, 1)$.)

3. Encontre uma parametrização para a superfície obtida girando-se a circunferência $(x - a)^2 + z^2 = R^2$, $0 < R < a$, em torno do eixo z (esta superfície é chamada toro). Esta superfície é suave?

4. Para os itens a seguir, encontre as parametrizações para as seguintes superfícies.
- a) Plano $3x - 2y + z = 2$. (resp.: $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, 2 - 3u + 2v)$ para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.)
 - b) A porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$, para $0 \leq z \leq 9$.
 - c) O tronco do cone $z^2 = x^2 + y^2$, para $2 \leq z \leq 8$.
 - d) A porção do cilindro $x^2 + y^2 = 9$ no primeiro octante, para $0 \leq z \leq 3$. (resp.: $\mathbf{r}(u, v) = (3 \cos u, 3 \sin u, v)$ para $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 3$.)
 - e) A porção do parabolóide $y = x^2 + z^2$ contida no interior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
5. Mostre que a área da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leq z \leq h$ é $2\pi Rh$. Observe que este cilindro não inclui os discos superior e inferior (topo e base).

6. Considere C o arco de parábola $z = 3 - y^2$ no plano yz compreendido entre as semiretas $z = 2y$ e $z = \frac{11}{2}y$, com $y \geq 0$. Seja S a superfície obtida girando-se C em torno do eixo z . Pede-se
- Uma parametrização para S .
 - A área de S . (resp.: $\frac{(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})\pi}{6}$.)
7. Calcule a área da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ limitada pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano $z = 0$. (resp.: 8.)
8. Calcule a área da superfície do sólido limitado pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$ e pelo hemisfério superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (resp.: $\frac{(4-\sqrt{2})\pi}{2}$.)
9. Calcule a área da superfície do parabolóide $z = 5 - \frac{x^2}{2} - y^2$ que está no interior do cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$. (resp.: $\frac{(5\sqrt{5}-1)\pi}{3}$.)
10. Calcule a área da porção da esfera de raio a centrada na origem limitada por dois paralelos e dois meridianos, sabendo-se que o ângulo entre os meridianos é α e a distância entre os planos que contém os paralelos é h . (resp.: $a\alpha h$.)

Integrais de Superfície

Agora que aprendemos a parametrizar superfícies e calcular áreas de superfície, podemos definir integrais de superfície. Primeiro, vamos definir a integral de superfície de uma função escalar.

Informalmente, a integral de superfície de uma função escalar é um análogo da integral de linha de uma função escalar em dimensão superior. O domínio de integração de uma integral de linha é uma curva parametrizada (um objeto unidimensional); o domínio de integração de uma integral de superfície é uma superfície parametrizada (um objeto bidimensional). Portanto, a definição de uma integral de superfície de uma função escalar assemelha-se muito à definição de uma integral de linha.

Integral de superfícies de função escalar

Definição. Sejam S uma superfície suave parametrizada por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}, \quad (u, v) \in D,$$

onde $D \subset \mathbb{R}^2$, e $f(x, y, z)$ uma função escalar definida e contínua num domínio em \mathbb{R}^3 contendo S . A integral de superfície de f sobre S é definida por

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dA, \quad (*)$$

onde

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}, \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}.$$

Se S é decomposta como uma união finita de superfícies suaves S_i , $i = 1, \dots, n$, então

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} f(x, y, z) dS. \quad (**)$$

Observação 1. Se $f(x, y, z) = 1$ para todo $(x, y, z) \in S$, então (*) se reduz a

$$\iint_S 1 \, dS = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dA = \text{área de } S.$$

Por esta razão, o símbolo dS pode ser interpretado como um “elemento de área de superfície”.

Observação 2. Quando S é definida explicitamente pela equação $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, um argumento análogo àquele feito no final da Aula 40 mostra que (*) se reduz a

$$\begin{aligned} & \iint_S f(x, y, z) \, dS \\ &= \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right)^2} \, dA. \end{aligned}$$

Exemplo 1. Calcule a integral de superfície $\iint_S (x + y^2) dS$, onde S é o cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 3$.

Solução. Para calcular a integral de superfície, primeiro precisamos parametrizar o cilindro. Uma parametrização é

$$\mathbf{r}(u, v) = (2 \cos u, 2 \sin u, v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 3.$$

Os vetores tangentes ao cilindro são $\mathbf{r}_u = (-2 \sin u, 2 \cos u, 0)$ e $\mathbf{r}_v = (0, 0, 1)$. Então,

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 \sin u & 2 \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cos u, 2 \sin u, 0),$$

assim,

$$\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = \sqrt{(2 \cos u)^2 + (2 \sin u)^2} = 2.$$

Usando a definição (*) para $f(x, y, z) = x + y^2$, temos

$$\begin{aligned}\iint_S f(x, y, z) dS &= \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dA \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (2 \cos u + (2 \sin u)^2) 2 du dv \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} 4(\cos u + 2 \sin^2 u) du dv \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} 4(\cos u + 1 - \cos(2u)) du dv \\ &= \int_0^3 4 \left[\sin u + u - \frac{\sin(2u)}{2} \right]_0^{2\pi} dv \\ &= \int_0^3 8\pi dv \\ &= 24\pi.\end{aligned}$$

Observação 3. As integrais de superfície de funções escalares têm várias aplicações no mundo real. Lembre-se de que integrais de linhas de funções escalares podem ser usadas para calcular a massa de um fio conhecendo sua função de densidade (massa por unidade de comprimento). De maneira semelhante, podemos usar integrais de superfície de função escalar para calcular a massa de uma placa fina conhecendo sua função de densidade (massa por unidade de área). Se uma placa fina tem a forma da superfície S e a densidade no ponto (x, y, z) é $\delta(x, y, z)$, então a massa m da placa é

$$m = \iint_S \delta(x, y, z) dS.$$

Exemplo 2. Uma folha plana de metal tem o formato da superfície $z = 1 + x + 2y$ que fica acima do retângulo $0 \leq x \leq 4$ e $0 \leq y \leq 2$. Se a densidade da folha é dada por $\delta(x, y, z) = x^2yz$, qual é a massa da folha?

Solução. Seja S a superfície que descreve a folha. Então a massa da folha é dada por

$$m = \iint_S \delta(x, y, z) dS = \iint_S x^2yz dS.$$

Como S é dada explicitamente equação $z = g(x, y)$, onde $g(x, y) = 1 + x + 2y$, para $(x, y) \in D := [0, 4] \times [0, 2]$. Pela Observação 2 aplicada para $f(x, y, z) = \delta(x, y, z) = x^2yz$, temos

$$\begin{aligned} m &= \iint_S \delta(x, y, z) dS \\ &= \iint_D \delta(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right)^2} dA. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2$$

e

$$\delta(x, y, g(x, y)) = x^2 y g(x, y) = x^2 y (1 + x + 2y),$$

temos

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{6} \int_0^4 \int_0^2 x^2 y (1 + x + 2y) dy dx \\ &= \sqrt{6} \int_0^4 \left(\frac{22}{3} x^2 + 2x^3 \right) dx \\ &= \frac{2560\sqrt{6}}{9}. \end{aligned}$$

Integral de superfícies de Campo Vetorial

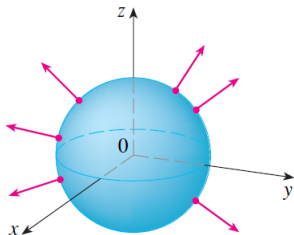
Lembre-se de que quando definimos a integral de linha de uma função escalar, não precisamos nos preocupar com a orientação da curva de integração. O mesmo vale para integrais de superfície de funções escalares: não precisamos nos preocupar com uma “orientação” da superfície de integração.

Por outro lado, quando definimos integrais de linha de campos vetoriais foi necessário a noção de orientação da curva de integração para definir uma integral de linha de um campo vetorial sem ambiguidade.

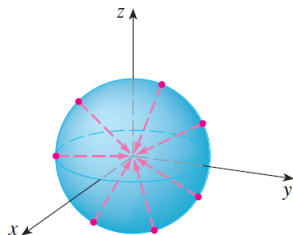
Da mesma forma, quando definimos uma integral de superfície de um campo vetorial, precisamos da noção de superfície orientada. Uma superfície orientada recebe uma orientação “para cima” ou “para baixo” ou, no caso de superfícies como uma esfera ou cilindro, uma orientação “para fora” ou “para dentro”.

Seja S uma superfície suave. Para qualquer ponto $(x, y, z) \in S$, podemos identificar dois vetores normais unitários \mathbf{n} e $-\mathbf{n}$. Se for possível escolher um vetor normal unitário \mathbf{n} em cada ponto $(x, y, z) \in S$ de modo que \mathbf{n} varie continuamente sobre S , então S é **orientável**. Essa escolha de vetor normal unitário em cada ponto fornece a orientação de uma superfície S . Informalmente, uma escolha de orientação dá a S um lado “externo” e um lado “interno” (ou um lado “para cima” e um lado “para baixo”), assim como uma escolha de orientação de uma curva dá a curva direções “para frente” e “para trás”.

Superfícies fechadas como esferas são orientáveis: se escolhermos o vetor normal externo em cada ponto da superfície da esfera, então os vetores normais unitários variam continuamente. Isso é chamado de orientação positiva da superfície fechada (Figura 34). Também poderíamos escolher o vetor normal para dentro em cada ponto para dar uma orientação “para dentro”, que é a orientação negativa da superfície.



Orientação positiva



Orientação negativa

Figura: 34.

O gráfico de qualquer função $z = g(x, y)$ de classe C^1 também é orientável. Para obter uma orientação, parametrizamos o gráfico de g da forma padrão: $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, g(x, y))$, onde (x, y) pertence ao domínio de g . Então,

$$\mathbf{r}_x(x, y) = \left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right) \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_y(x, y) = \left(0, 1, \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right)$$

e, portanto,

$$\mathbf{r}_x(x, y) \times \mathbf{r}_y(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1\right).$$

Como a componente z desse vetor é 1 (positivo), o vetor normal unitário

$$\mathbf{n}(x, y) = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right)^2}},$$

aponta “para cima”.

Seja S uma superfície suave orientável com parametrização $\mathbf{r}(u, v)$. Para cada ponto $\mathbf{r}(u, v)$ na superfície, os vetores $\mathbf{r}_u(u, v)$ e $\mathbf{r}_v(u, v)$ estão no plano tangente naquele ponto. O vetor $\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)$ é normal ao plano tangente em $\mathbf{r}(u, v)$ e, portanto, é normal a S nesse ponto. Portanto, a escolha do vetor normal unitário

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)}{\|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|}$$

dá uma orientação da superfície S .

Exemplo 3. Dê uma orientação para o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq h$.

Solução. Uma parametrização dessa superfície é

$$\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq h.$$

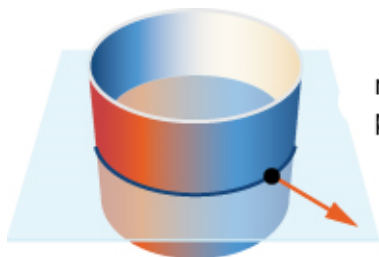
Os vetores tangentes são $\mathbf{r}_u(u, v) = (-a \sin u, a \cos u, 0)$ e $\mathbf{r}_v(u, v) = (0, 0, 1)$. Para obter uma orientação da superfície, calculamos o vetor normal unitário

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)}{\|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|}.$$

Neste caso, $\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) = (a \cos u, a \sin u, 0)$ e, portanto, $\|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| = a$. Uma orientação do cilindro é

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{(a \cos u, a \sin u, 0)}{a} = (\cos u, \sin u, 0).$$

Observe que todos os vetores $\mathbf{n}(u, v)$ são paralelos ao plano xy . Além disso, todos os vetores apontam para fora do cilindro, portanto, esta é uma orientação externa do cilindro (Figura 35).



normal apontando
para fora

Figura: 35. Se todos os vetores normais a um cilindro apontam para fora, então esta é uma orientação para fora do cilindro.

Como toda curva tem um sentido “para frente” e “para trás” (ou, no caso de uma curva fechada, sentido horário e anti-horário), é possível dar uma orientação a qualquer curva. Assim, é possível pensar qualquer curva como uma curva orientada. No entanto, este não é o caso para superfícies. Algumas superfícies não podem ser orientadas; tais superfícies são chamadas **não orientáveis**.

Essencialmente, uma superfície pode ser orientada se a superfície tiver um lado “interno” e um lado “externo”, ou um lado “para cima” e um lado “para baixo”. Algumas superfícies são torcidas de tal forma que não há uma noção bem definida de um lado “interno” ou “externo”.

O exemplo clássico de uma superfície não orientável é a faixa de Möbius. Para criar uma tira de Möbius, pegue uma tira retangular de papel, dê meia volta no pedaço de papel e cole as pontas juntas (Figura 36). Por causa da meia torção na tira, a superfície não tem lado “externo” ou lado “interno”. Para ver isso, coloque um vetor normal em um ponto da tira e faça com que o vetor percorra toda a tira, então (por causa da meia-torção) o vetor aponta na direção oposta quando volta à sua posição original. Portanto, a tira realmente só tem um lado.

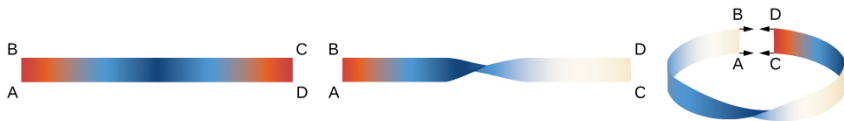


Figura: 36. A construção de uma faixa de Möbius.

Exemplo 4. Uma parametrização **faixa de Möbius de largura 1** é dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = ((1 + v \sin(u/2)) \cos u, (1 + v \sin(u/2)) \sin u, 1 + v \cos(u/2)),$$

para $-1/2 \leq v \leq 1/2$, $0 \leq u \leq 2\pi$.

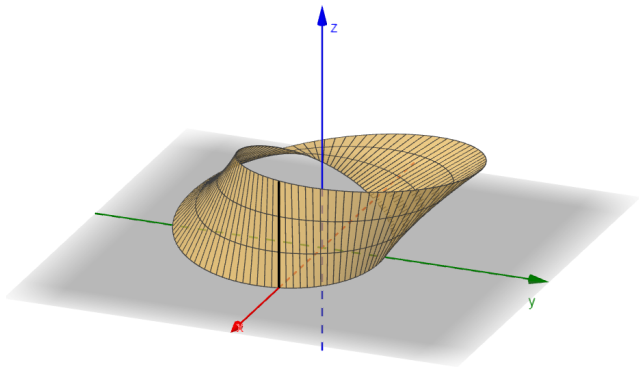


Figura: 37. Para u fixo, $(x, y, z) = \mathbf{r}(u, v)$ descreve o segmento de comprimento 1, centro no ponto $(\cos u, \sin u, 1/2)$, localizado no plano determinado pelo eixo z e pelo ponto $(\cos u, \sin u, 0)$ e que forma com o eixo z um ângulo $u/2$.

Como algumas superfícies não são orientáveis, não é possível definir uma integral de superfície de um campo vetorial em todas as superfícies suaves por partes. Isso contrasta com as integrais de linha de campos vetoriais, que podem ser definidas em qualquer curva suave por partes.

Definição. Seja \mathbf{F} um campo vetorial definido e contínuo numa região que contém uma superfície orientada S com o vetor normal unitário \mathbf{n} . A **integral de superfície de \mathbf{F} sobre S** é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (***)$$

ou seja, a integral da superfície do campo vetorial \mathbf{F} sobre S é a integral de superfície sobre S da função escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. A integral (***) é chamada **fluxo de \mathbf{F} através de S** .

Seja S uma superfície orientada parametrizada por $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$. A esta superfície estão associados dois campos contínuos de vetores normais unitários, a saber:

$$\mathbf{n}_1(\mathbf{r}(u, v)) = \frac{\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)}{\|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|} \quad \text{e} \quad \mathbf{n}_2(\mathbf{r}(u, v)) = -\mathbf{n}_1(\mathbf{r}(u, v)).$$

Se o vetor normal unitário a S for $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$, usando a definição $(\star\star\star)$ e em seguida (\star) , temos

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} dS \\ &= \iint_D \left(\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)}{\|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|} \right) \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| dA \\ &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)) dA. \end{aligned}$$

Portanto, para calcular uma integral de superfície de um campo vetorial sobre uma superfície S , podemos usar a equação

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)) dA, \quad (\star \star \star \star)$$

se $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$. Observe que esta integral muda de sinal se $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$.

Observação 4. Quando S é definida pela equação $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, temos

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Neste caso, se $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$, então por $(\star \star \star)$ temos

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= \iint_D \mathbf{F}(x, y, g(x, y)) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1\right) dA. \end{aligned}$$

Interpretação física da integral de superfície de um campo vetorial

Suponhamos que um campo vetorial contínuo $\mathbf{F} : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representa um campo de velocidade associado ao escoamento de um fluido em cada ponto da região W . O **fluxo** ou a **taxa de escoamento** (medida em volume por unidade de tempo) através de uma superfície S contida em W é dada pela integral de superfície de \mathbf{F} sobre S .

De fato, se S é uma superfície **plana** e \mathbf{F} é um campo constante, então o **volume** de fluido que passa através de S por unidade de tempo é $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\text{área}(S)$. Portanto, o fluxo Φ é dado por

$$\Phi = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\text{área}(S).$$

Se S é uma superfície **não plana**, a decomposmos mediante curvas coordenadas da forma $u = \text{constante}$, $v = \text{constante}$, e denotamos cada parte S_{kl} de S assim formada. Aproximando S_{kl} por paralelogramos tangentes determinados pelos vetores $\mathbf{r}_u(u_k, v_l)\Delta u$ e $\mathbf{r}_v(u_k, v_l)\Delta v$ e usando o campo \mathbf{F} como constante igual a $\mathbf{F}(\mathbf{r}(u_k, v_l))$ em S_{kl} , obtemos que o fluxo Φ_{kl} através de uma parte S_{kl} de S é aproximadamente

$$\begin{aligned}\Phi_{kl} &\approx (\mathbf{F}(\mathbf{r}(u_k, v_l)) \cdot \mathbf{n}_{kl}) \text{área}(S_{kl}) \\ &\approx \mathbf{F}(\mathbf{r}(u_k, v_l)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u(u_k, v_l) \times \mathbf{r}_v(u_k, v_l)}{\|\mathbf{r}_u(u_k, v_l) \times \mathbf{r}_v(u_k, v_l)\|} \|\mathbf{r}_u(u_k, v_l) \times \mathbf{r}_v(u_k, v_l)\| \Delta u \Delta v \\ &\approx \mathbf{F}(\mathbf{r}(u_k, v_l)) \cdot (\mathbf{r}_u(u_k, v_l) \times \mathbf{r}_v(u_k, v_l)) \Delta u \Delta v.\end{aligned}$$

Assim, o fluxo total Φ através de S é

$$\Phi = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \Phi_{kl} \approx \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{r}(u_k, v_l)) \cdot (\mathbf{r}_u(u_k, v_l) \times \mathbf{r}_v(u_k, v_l)) \Delta u \Delta v.$$

Quando $m, n \rightarrow \infty$, a sequência das somas acima converge para a integral

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)) dA.$$

Portanto, o fluxo total Φ através de S é dado por

$$\Phi = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)) dA = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Exemplo 5. Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, x^2z)$ e S é a superfície do cilindro $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ entre os planos $z = 0$ e $z = 4$, com vetor normal apontando para fora de S .

Solução. O cilindro S tem parametrização

$$\mathbf{r}(\theta, u) = (1 + \cos \theta, 1 + \sin \theta, u), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq u \leq 4.$$

Um campo de vetores normais que aponta para fora de S em cada ponto de S é dado por

$$\mathbf{r}_\theta(\theta, u) \times \mathbf{r}_u(\theta, u) = (\cos \theta, \sin \theta, 0).$$

Por (** **), temos

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta, 1 + \sin \theta, (1 + \cos \theta)^2 u) \cdot (\cos \theta, \sin \theta, 0) d\theta du \\ &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta + \sin \theta) d\theta du \\ &= \int_0^4 2\pi du = 8\pi. \end{aligned}$$

Exemplo 6. Calcule o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -x, -1)$ através da superfície S que é a porção do plano $x + y + z = 0$ situada no interior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Especifique a orientação escolhida.

Solução. S é definida por $z = g(x, y) = -x - y$ para $(x, y) \in D$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 2y^2 + 2xy \leq 1\}$. Como S é a porção do plano $x + y + z = 0$, os vetores normais a esse plano são normais a S . Escolhendo o campo de normais unitários a S que têm a terceira componente positiva (“aponta para cima”), ou seja $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, e notando que

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (x, -x, -1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \frac{-1}{\sqrt{3}},$$

vemos que o cálculo do fluxo se reduz ao cálculo da área de S :

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \frac{-1}{\sqrt{3}} dS = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{área}(S) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

onde na última igualdade usamos que S é um disco que contém o centro da esfera, possuindo assim o mesmo raio da esfera.

Exemplo 7. Calcule o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, 4yz^2, -yz)$ para através da superfície do cubo S cujas faces estão contidas na união dos planos coordenados e dos planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$, com vetor normal a S exterior.

Solução. A superfície do cubo S é a união das seis faces S_i , para $i = 1, \dots, 6$. Assim,

$$\text{Fluxo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \sum_{i=1}^6 \iint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Denote por S_1 a face contida no plano $z = 1$. Neste caso, $\mathbf{n} = \vec{k}$ e $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -y$. Assim,

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S_1} -y \, dS.$$

Para calcular esta última integral de superfície da função escalar $f(x, y, z) = -y$, parametrizemos S_1 por $r(x, y) = (x, y, 1)$, $(x, y) \in A$, onde $A = [0, 1] \times [0, 1]$. Temos,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} -y \, dS &= \iint_{S_1} f(x, y, z) \, dS \\ &= \iint_A f(r(x, y)) \|r_x(x, y) \times r_y(x, y)\| \, dx dy \\ &= \iint_A f(x, y, 1) \|r_x(x, y) \times r_y(x, y)\| \, dx dy \\ &= \iint_A -y \, dx dy \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Repetindo o mesmo argumento para as outras faces, obtemos

Face	\mathbf{n}	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$	Fluxo através da face
$S_1 : z = 1$	\vec{k}	$-yz = -y$	$\iint_A -y \, dx \, dy = -\frac{1}{2}$
$S_2 : z = 0$	$-\vec{k}$	$yz = 0$	$\iint_A 0 \, dx \, dy = 0$
$S_3 : x = 1$	\vec{i}	$xy = y$	$\iint_A y \, dy \, dz = \frac{1}{2}$
$S_4 : x = 0$	$-\vec{i}$	$-xy = 0$	$\iint_A 0 \, dy \, dz = 0$
$S_5 : y = 1$	\vec{j}	$4yz^2 = 4z^2$	$\iint_A 4z^2 \, dx \, dz = \frac{4}{3}$
$S_6 : y = 0$	$-\vec{j}$	$-4yz^2 = 0$	$\iint_A 0 \, dx \, dz = 0$

Portanto,

$$\text{Fluxo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{4}{3} + 0 = \frac{4}{3}.$$

Nas próximas aulas estudaremos o Teorema de Gauss que possibilitará reduzir este cálculo do fluxo de \mathbf{F} através da superfície do cubo a uma integral tripla da divergência de \mathbf{F} sobre o cubo.

Embora tenhamos exemplificado a integral de superfície de um campo de vetores com seu uso em mecânica dos fluidos, esse conceito também aparece em outras situações físicas. Por exemplo, se \mathbf{E} é um campo elétrico, então a integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS$$

chama-se a **fluxo elétrico** de \mathbf{E} através da superfície S . Uma importante lei de eletrostática é a **Lei de Gauss**, que diz que a carga total englobada por uma superfície S é

$$Q = \epsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

onde ϵ_0 é uma constante (denominada permissividade no vácuo) que depende das unidades usadas (no sistema SI, $\epsilon_0 \approx 8,8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2$). Portanto, se o campo vetorial \mathbf{F} do Exemplo 7 representa um campo elétrico, podemos concluir que a carga envolvida por S é $Q = \epsilon_0 4/3$.

Outra aplicação de integrais de superfície ocorre no estudo de fluxo de calor. Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) em um objeto seja $u(x, y, z)$. Então, o **fluxo de calor** é definido como o campo vetorial

$$\mathbf{F} = -K\nabla u$$

onde K é uma constante determinada experimentalmente, chamada **condutividade** do material do qual o objeto é feito. A taxa de transmissão de calor através da superfície S no corpo é então dada pela integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -K \iint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S}.$$

Exemplo 8. A temperatura u em uma bola metálica é proporcional ao quadrado da distância do centro da bola. Determine a taxa de transmissão de calor através de uma esfera S de raio a e centro no centro da bola.

Solução. Tomando o centro da bola como origem, temos

$$u(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2)$$

onde C é a constante de proporcionalidade. Então o fluxo de calor é

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -K\nabla u(x, y, z) = -KC(2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k})$$

onde K é a condutividade do metal. Em vez de usar a parametrização usual da esfera pelas coordenadas esféricas, observamos que o vetor normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que aponta para fora no ponto (x, y, z) é

$$\mathbf{n} = \frac{1}{a}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

e então

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{2KC}{a}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Mas sobre a esfera S de raio a , temos

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{2KC}{a}(x^2 + y^2 + z^2) = -\frac{2KC}{a}a^2 = -2aKC$$

Portanto a taxa de fluxo de calor através de S é

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= -2aKC \iint_S dS \\ &= -2aKC(4\pi a^2) \\ &= -8KC\pi a^3.\end{aligned}$$

Lista de Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais de superfície:

a) $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
(resp.: $\frac{8\pi a^4}{3}$.)

b) $\iint_S xyz dS$, onde S é o triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. (resp.: $\frac{\sqrt{3}}{120}$.)

2. Seja S uma superfície tal que $S = S_1 \cup S_2$, onde S_1 e S_2 são as superfícies de revolução obtidas pela rotação em torno do eixo z das curvas

$$C_1 : z = 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \text{e} \quad C_2 : z = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \text{respectivamente}$$

Se $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a função que fornece a densidade em cada ponto $(x, y, z) \in S$, calcule a massa de S . (resp.: $\frac{(1+\sqrt{2})2\pi}{3}$.)

3. Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$ e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com vetor normal apontando para fora de S . (resp.: 0.)
4. Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ e S é o triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, onde o vetor normal é tal que sua terceira componente é não negativa. (resp.: $1/2$.)
5. Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ e S é a superfície do sólido W , sendo $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$, com vetor normal exterior. (resp.: $(8 - 3\sqrt{3})4\pi$.)

6. Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = (-3xyz^2, x + 2yz - 2xz^4, yz^3 - z^2)$ e S é a união da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, com o disco $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$, indicando a orientação escolhida para S . (resp.: π , com normal exterior a S .)
7. Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2 - x, -xy, 3z)$ e S é a superfície do sólido limitado por $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$ e o plano $z = 0$, com vetor normal exterior. (resp.: 16.)
8. Calcule o fluxo do campo elétrico $\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{\varepsilon q(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ de uma carga q localizada origem $(0, 0, 0)$ através da esfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ com vetor normal \mathbf{n} exterior, onde ε é uma constante. (resp.: $4\pi\varepsilon q$. Note o fato interessante de que o fluxo de \mathbf{E} através da esfera S independe do seu raio.)

O Teorema de Stokes

O teorema de Stokes é uma generalização do teorema de Green em dimensão 3. Enquanto o Teorema de Green relaciona uma integral dupla sobre uma região plana D com uma integral de linha ao longo da curva fronteira de D , o Teorema de Stokes relaciona uma integral de superfície sobre uma superfície S com uma integral ao longo da curva da fronteira de S , a qual é uma curva no espaço.

O Rotacional

Se $\mathbf{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é um campo vetorial definido num aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ e as derivadas parciais de primeira ordem de P , Q e R existem em U , então o **rotacional** de \mathbf{F} é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 definido por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

O modo mais fácil de lembrar a definição do rotacional é por meio do determinante simbólico

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

Exemplo 1. Dado $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\vec{i} + xyz\vec{j} - y^2\vec{k}$ em \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} \\ &= (-2y - xy)\vec{i} + (x - 0)\vec{j} + (yz - 0)\vec{k} \\ &= -y(2 + x)\vec{i} + x\vec{j} + yz\vec{k}\end{aligned}$$

Exemplo 2. Dado $\mathbf{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ em \mathbb{R}^3 ,
 $\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}$.

O Exemplo 2 é um caso particular do seguinte teorema:

Teorema 1. Se \mathbf{F} é campo conservativo e de classe C^1 num aberto do \mathbb{R}^3 , então $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Demonstração. Por hipótese, existe uma função real f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Portanto, pelo Teorema de Clairaut,

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right] \vec{i} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right] \vec{j} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right] \vec{k} \\ &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Exemplo 3. Mostre que o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xz\vec{i} + xyz\vec{j} - y^2\vec{k}$$

não é conservativo em \mathbb{R}^3 .

Solução. No Exemplo 1 obtemos que

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = -y(2 + x)\vec{i} + x\vec{j} + yz\vec{k}$$

Isso mostra que $\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) \neq \mathbf{0}$. Portanto, pelo Teorema 1, \mathbf{F} não é conservativo.

Em geral, a recíproca do Teorema 1 não é verdadeira. A recíproca é válida se o domínio é simplesmente conexo² e sua prova requer o uso do Teorema de Stokes a ser estudado nesta.

Teorema 2. Seja \mathbf{F} um campo vetorial de classe C^1 numa região $U \subset \mathbb{R}^3$ aberta e simplesmente conexa. Então, \mathbf{F} é conservativo se, e somente se, $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

²Um conjunto $U \subset \mathbb{R}^3$ é simplesmente conexo se for conexo por caminho e se toda curva fechada em U pode ser contraída a um ponto de U sem nunca deixar U .

Exemplo 4. Dado o campo vetorial

$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz + x^2)\vec{i} + (xz + 3y^2)\vec{j} + xy\vec{k}$ definido em todo \mathbb{R}^3 ,

- (a) mostre que \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo,
- (b) determine uma função f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

Solução. (a) Calculemos o rotacional de \mathbf{F} :

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + x^2 & xz + 3y^2 & xy \end{vmatrix} \\ &= (x - x)\vec{i} + (y - y)\vec{j} + (z - z)\vec{k} \\ &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Como $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ em \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^3 é simplesmente conexo, pelo Teorema 2, \mathbf{F} é conservativo.

(b) Para encontrar f , resolvemos o sistema de equações

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = yz + x^2 \quad (11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz + 3y^2 \quad (12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy \quad (13)$$

Integrando (11) em relação a x , obtemos

$$f(x, y, z) = xyz + \frac{x^3}{3} + A(y, z). \quad (14)$$

Derivando (14) em relação a y , temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz + \frac{\partial A}{\partial y}(y, z).$$

e comparando com (12), obtemos

$$\frac{\partial A}{\partial y}(y, z) = 3y^2,$$

ou seja, $A(y, z) = y^3 + B(z)$.

Reescrevendo (14), temos

$$f(x, y, z) = xyz + \frac{x^3}{3} + y^3 + B(z). \quad (15)$$

Derivando (15) em relação a z e comparando com (13) obtemos

$$B'(z) = 0$$

e, portanto, $B(z) = k$, uma constante. A função desejada é

$$f(x, y, z) = xyz + \frac{x^3}{3} + y^3 + k,$$

sendo k uma constante arbitrária.

A Figura 39 mostra uma superfície orientada com vetor normal unitário \mathbf{n} . A orientação de S induz a **orientação positiva da curva fronteira C** . Isso significa que, se você andar na direção positiva ao longo da curva C com sua cabeça na direção e sentido de \mathbf{n} , então a superfície estará sempre à sua esquerda. De modo alternativo, a Figura 40 mostra a orientação da curva fronteira C compatível, em relação à regra da mão direita, com o campo vetorial normal \mathbf{n} . Se o polegar da mão direita aponta ao longo de \mathbf{n} , os dedos se dobram na direção de C .

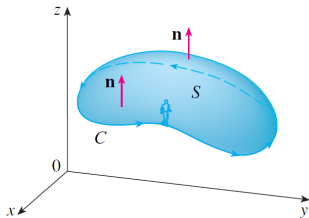


Figura: 39. A orientação de S induz a orientação positiva da curva fronteira C .

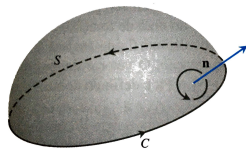


Figura: 40. a orientação da curva C é compatível, em relação à regra da mão direita, com o

Teorema de Stokes. Seja S uma superfície S orientada, suave por partes, cuja fronteira é formada por uma curva C fechada, simples, suave por partes, com orientação positiva. Seja \mathbf{F} um campo vetorial de classe C^1 em uma região aberta de \mathbb{R}^3 contendo S , então

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

A curva na fronteira orientada positivamente da superfície orientada S é com frequência denotada por ∂S , de modo que o Teorema de Stokes pode ser escrito como

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

No caso especial em que a superfície S é plana e pertence ao plano xy , com orientação para cima, o vetor normal unitário é \mathbf{k} , a integral de superfície se transforma em uma integral dupla, e o Teorema de Stokes fica

$$\oint_{\partial S} Pdx + Qdy = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dS = \iint_S \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dA$$

que é precisamente o Teorema de Green. Assim, o Teorema de Stokes é uma extensão do Teorema de Green.

Demonstração do Teorema de Stokes no caso especial em que S é o gráfico de uma função

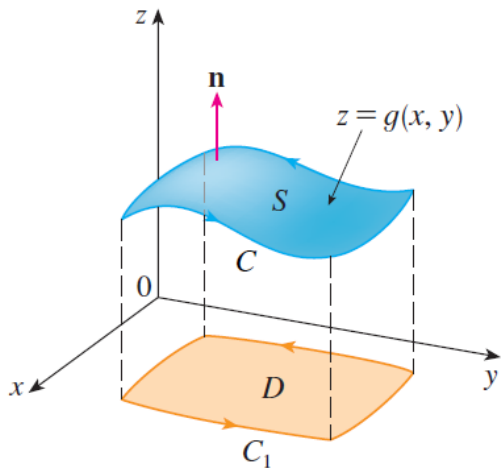


Figura: 41.

Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ um campo vetorial com funções componentes tendo derivadas parciais contínuas. Considere a parametrização padrão de S :

$$x = x, \quad y = y, \quad z = g(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Os vetores tangentes são $r_x = (1, 0, \frac{\partial g}{\partial x})$ e $r_y = (0, 1, \frac{\partial g}{\partial y})$ e, portanto, $r_x \times r_y = (-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1) = (-z_x, -z_y, 1)$. Pela definição de integral de superfície de campos vetoriais,

$$\iint_S (\text{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D [-(R_y - Q_z)z_x - (P_z - R_x)z_y + (Q_x - P_y)] dA$$

Se $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, é uma parametrização de C_1 , então uma parametrização de C é

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = g(x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b$$

Isso nos permite, com ajuda da Regra da Cadeia e do Teorema de Green, calcular a integral de linha como segue:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \left[P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{dz}{dt} \right] dt \\ &= \int_a^b \left[P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \right] dt \\ &= \int_a^b \left[\left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right] dt \\ &= \int_{C_1} \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] dA \end{aligned}$$

Usando novamente a regra da cadeia, obtemos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + R \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) - \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + R \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) \right] dA$$

Pelo teorema de Clairaut, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, e portanto quatro dos termos dessa integral dupla se cancelam, e ficamos com

$$\iint_D [-(R_y - Q_z)z_x - (P_z - R_x)z_y + (Q_x - P_y)] dA$$

que é igual a $\iint_S (\text{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$.

Interpretação para o campo vetorial $\text{rot}\mathbf{F}$

Sejam P_0 um ponto e D_r um disco fechada de raio r e centro P_0 situada no plano perpendicular a \mathbf{n}_0 . Aplicando o Teorema de Stokes a \mathbf{F} sobre D_r e sua fronteira C_r , obtemos

$$\oint_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{D_r} (\text{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (16)$$

O valor da integral de linha do lado esquerdo de (16) é denominado **circulação** de \mathbf{F} ao longo de C_r e mede a intensidade do campo tangencial a C_r . Assim, para r pequeno, **a circulação ao longo de C_r mede a intensidade com que o campo \mathbf{F} perto de P_0 gira em torno do eixo determinado por \mathbf{n}_0 .**

Por outro lado, para r suficientemente pequeno,

$$\iint_{D_r} (\text{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \approx (\text{rot}\mathbf{F}(P_0)) \cdot \mathbf{n}_0 \pi r^2.$$

Segue que a circulação ao longo de C_r tenderá a ser maior se \mathbf{n}_0 tiver o mesmo sentido de $\text{rot}\mathbf{F}(P_0)$. Portanto, podemos interpretar **$\text{rot}\mathbf{F}(P_0)$ como sendo o determinador do eixo em torno do qual a circulação de \mathbf{F} é a maior possível perto de P_0 .**

Exemplo 1. Calcule $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y)\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ e C é a curva na qual o plano $z = 2$ encontra o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, em sentido anti-horário, conforme mostra a Figura 42.

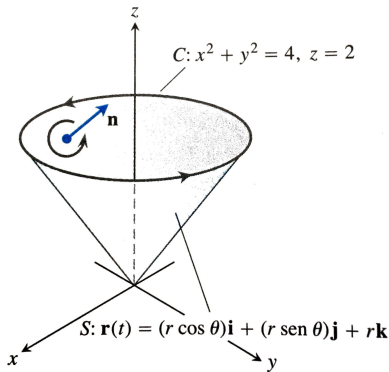


Figura: 42.

Solução. O Teorema de Stokes permite determinar a integral

$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ por meio da integração sobre a superfície do tronco de cone. A orientação de C no sentido anti-horário, quando vista de cima, corresponde a tomar a normal \mathbf{n} interna ao cone, a normal com coordenada \vec{k} positiva. Parametrizamos o cone como

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\vec{i} + (r \sin \theta)\vec{j} + r\vec{k}, \quad (r, \theta) \in D = [0, 2] \times [0, 2\pi].$$

Então,

$$\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = -(r \cos \theta)\vec{i} - (r \sin \theta)\vec{j} + \vec{k},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta}{\|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta\|} = \frac{-(r \cos \theta)\vec{i} - (r \sin \theta)\vec{j} + \vec{k}}{r\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos \theta\vec{i} - \sin \theta\vec{j} + \vec{k})$$

O campo vetorial $\text{rot}\mathbf{F}$ é dado por

$$\text{rot}\mathbf{F}(x, y, z) = -4\vec{i} - 2x\vec{j} + \vec{k}.$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\text{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_D \text{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r}(r, \theta)) \cdot (\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta) dA \\ &= \iint_D (-4, -2r \cos \theta, 1) \cdot (-r \cos \theta, -r \sin \theta, 1) dA \\ &= \iint_D (4r \cos \theta + 2r^2 \cos \theta \sin \theta + 1) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r \cos \theta + 2r^2 \cos \theta \sin \theta + 1) dr d\theta \\ &= 4\pi.\end{aligned}$$

Exemplo 2. Calcule a integral de linha $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz + x^3, 2xz + 3y^2, xy + 4)$$

e C é a curva obtida como interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 1$, orientada no sentido anti-horário.

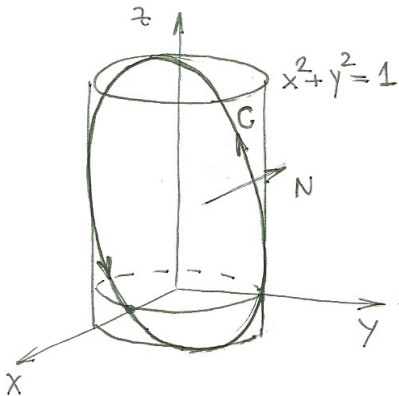


Figura: 43.

Solução. Podemos calcular a integral de linha diretamente. Para fazer isso, precisamos parametrizar a curva C . Isso não é muito complicado, mas envolve um cálculo tedioso.

Por outro lado, vamos calcular a integral da linha usando o Teorema de Stokes. A curva C é a fronteira da superfície S definida por $z = 1 - x - y$ para $(x, y) \in D$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ (Figura 43).

O campo vetorial $\text{rot}\mathbf{F}$ é dado por

$$\text{rot}\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + x^3 & 2xz + 3y^2 & xy + 4 \end{vmatrix} = (-x, 0, z).$$

Como S é definida explicitamente pela equação

$z = g(x, y) = 1 - x - y$, $(x, y) \in D$, os campos vetoriais normais unitários a S são

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1 = \frac{(-1, -1, -1)}{\sqrt{3}}$$

Como C está orientada no sentido anti-horário, para que o bordo de S fique orientado positivamente devemos tomar o campo de vetores normais a S dado por $\mathbf{n} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}}$. Pelo teorema de Stokes, temos

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Agora,

$$\begin{aligned}\iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_D \operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, g(x, y)) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right) dx dy \\ &= \iint_D (-x, 0, 1 - x - y) \cdot (1, 1, 1) dx dy \\ &= \iint_D (1 - 2x - y) dx dy.\end{aligned}$$

Usando mudança polar para resolver esta integral dupla, temos

$$\begin{aligned}\iint_D (1 - 2x - y) dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - 2r \cos \theta - r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cos \theta - \frac{1}{3} \sin \theta\right) d\theta \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \pi.$$

Exemplo 3. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2, xz, 2xy)$ e C é a curva obtida como interseção da superfície $z = 1 - y^2$, $z \geq 0$, como plano $2x + 3z = 6$, orientada no sentido anti-horário.

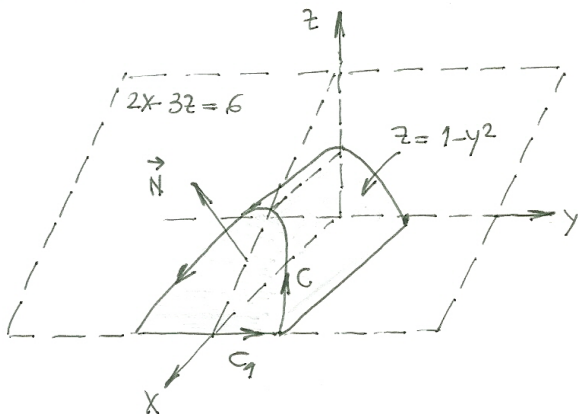


Figura: 44.

Solução. A integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ não pode ser calculada pelo teorema de Stokes porque C não é fechada. No entanto, se considerarmos a curva fechada $\gamma = C \cup C_1$, onde C_1 é o segmento de reta parametrizado por $x(t) = 3$, $y(t) = t$ e $z(t) = 0$, $-1 \leq t \leq 1$, então γ é a fronteira da superfície S definida por $z = f(x, y) = (6 - 2x)/3 = 2 - \frac{2}{3}x$, $(x, y) \in D$, onde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3 + 3y^2}{2} \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 1\}$$

orientada pelo campo de vetores normais unitários $\mathbf{n} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, 0, \frac{3}{\sqrt{13}} \right)$.

Como $\text{rot}\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 2z - 2y, z)$, segue pelo Teorema de Stokes que

$$\int_{\gamma=C \cup C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Agora, pela definição de integral de superfície de campos vetoriais, temos

$$\begin{aligned} & \iint_S (\text{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_D \text{rot} \mathbf{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) dA \\ &= \iint_D \text{rot} (x, 2f(x, y) - 2y, f(x, y)) \cdot \left(\frac{2}{3}, 0, 1 \right) dA \\ &= \iint_D \text{rot} \left(x, \frac{2}{3}(6 - 2x) - 2y, \frac{6 - 2x}{3} \right) \cdot \left(\frac{2}{3}, 0, 1 \right) dA \\ &= \iint_D \left(\frac{2}{3}x + \frac{6 - 2x}{3} \right) dx dy = \iint_D 2 dA \\ &= 2 \int_{-1}^1 \int_{\frac{3+3y^2}{2}}^3 dx dy = 3 \int_{-1}^1 (1 - y^2) dy = 4. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 4 - \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{-1}^1 \mathbf{F}(3, t, 0) \cdot (0, 1, 0) dt \\ &= \int_{-1}^1 (0, 0, 6t) \cdot (0, 1, 0) dt \\ &= \int_{-1}^1 0 dt = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 4.$$

Solução. Denote por C_1 a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy . Uma vez que C é uma curva desconhecida, vamos tentar aplicar o teorema de Stokes para passar o cálculo da integral linha de \mathbf{F} ao longo de C para o cálculo da integral de linha de \mathbf{F} ao longo de C_1 . Por hipótese, C está orientada no sentido anti-horário. Assim, para a fronteira de S , $\partial S = C \cup C_1$ esteja orientada positivamente, devemos tomar o campo vetorial normal unitário que aponta para dentro de S . Note que C_1 está orientada no sentido horário. Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_{C \cup C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Assim,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Por um cálculo direto,

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, 1).$$

Uma parametrização de S é $\sigma(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$, $(\theta, z) \in D$, onde $D = \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq z \leq g(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, para alguma função positiva $g(\theta)$ definida em $[0, 2\pi]$. Pela definição de integral de superfície, temos

$$\begin{aligned} \iint_S (\operatorname{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_D \operatorname{rot}(\sigma(\theta, z)) \cdot \sigma_z \times \sigma_\theta dA \\ &= \iint_D (-\sin \theta, \cos \theta, 1) \cdot (-\cos \theta, -\sin \theta, 0) dA \\ &= \iint_D 0 dA \\ &= 0. \end{aligned}$$

A curva C_1 está orientada no sentido horário e sua parametização pode ser dada por $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\sin t, \cos t, 0) \cdot (\cos t, -\sin t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (0, \sin t, 1) \cdot (\cos t, -\sin t, 0) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -\pi.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \pi.$$

Caracterização dos campos vetoriais conservativos

Teorema 1. Seja \mathbf{F} um campo vetorial de classe C^1 numa região $U \subset \mathbb{R}^3$ aberta simplesmente conexa.^a As seguintes afirmações são equivalentes:

1. \mathbf{F} é conservativo, isto é, existe uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \mathbf{F}$ em U .
2. A integral de linha de \mathbf{F} independe do caminho, isto é, para quaisquer pontos $A, B \in U$, a integral de linha de \mathbf{F} do ponto A ao ponto B independe da curva C^1 por partes, contida em U , que liga A a B .
3. A integral de linha de \mathbf{F} ao longo de qualquer curva fechada C , C^1 por partes contida em U , é zero.
4. $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ em U .

^aUm conjunto U é simplesmente conexo se for conexo por caminho e toda curva fechada em U pode ser contraída a um ponto de U sem nunca deixar U .

Exemplo 5. Calcule a integral do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz + x^2, xz + 3y^2, xy)$ ao longo da curva C obtida como interseção da superfície $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, z \geq 0$, com o plano $y = 1$.

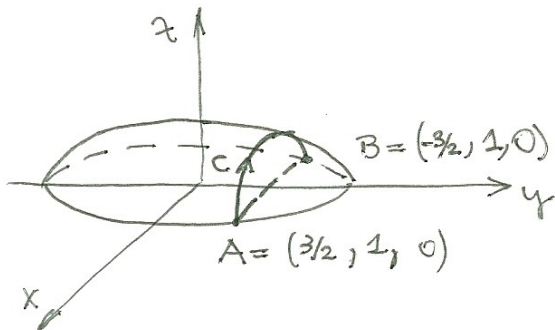


Figura:

Solução. Para fazer este cálculo precisamos especificar a orientação da curva C . Consideremos a curva C orientada de $A = (3/2, 1, 0)$ a $B = (-3/2, 1, 0)$. O campo vetorial \mathbf{F} é de classe C^1 e $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ em \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^3 é simplesmente conexo. Portanto, pelo Teorema 1, \mathbf{F} é conservativo, ou seja, existe uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \mathbf{F}$ em \mathbb{R}^3 .

Para encontrar a função potencial f , resolvemos o sistema de equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz + x^2 \quad (17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz + 3y^2 \quad (18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy \quad (19)$$

Por (1),

$$f(x, y, z) = xyz + \frac{x^3}{3} + G(y, z). \quad (20)$$

Usando (4) e (2), temos

$$xz + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = xz + 3y^2.$$

Assim, $G(y, z) = y^3 + H(z)$ e $f(x, y, z) = xyz + \frac{x^3}{3} + y^3 + H(z)$.
Usando esta última igualdade e (3), temos

$$xy + H'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = xy.$$

Logo, $H(z) = k$ (constante). Assim, $f(x, y, z) = xyz + \frac{x^3}{3} + y^3$ é uma função potencial de \mathbf{F} . Pelo teorema fundamental,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A) = f(-3/2, 1, 0) - f(3/2, 1, 0) = -\frac{9}{4}.$$

Exemplo 6 (Rotacional nulo, mas campo não conservativo).

Mostre que o rotacional de $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z \right)$ é

nulo, mas $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$ se C for a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, onde $a > 0$. Discuta por que o Teorema 1 não se aplica.

Solução. Considerando C orientada no sentido anti-horário, uma parametrização de C é $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Assim,

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-a \sin t}{a^2}, \frac{a \cos t}{a^2}, 0 \right) \cdot (-a \sin t, a \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Portanto, $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$. O Teorema 1 não se aplica aqui, porque o domínio de \mathbf{F} é \mathbb{R}^3 -eixo z , o qual não é simplesmente conexo.

Lista de Exercícios

1. Nos itens a seguir, use o teorema de Stokes para mostrar que a integral de linha é igual ao valor indicado, indicando, em cada caso, a orientação da curva C .

1a) $\oint_C ydx + zdy + xdz = -2\pi\sqrt{2}$, onde C é a curva obtida como a interseção do plano $x + y = 2$ com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$.

1b) $\oint_C 2xydx + [(1 - y)z + x^2 + x]dy + \left(\frac{x^2}{2} + e^z\right) dz = \pi$, onde C é a curva obtida como a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$, com o cone $z^2 = x^2 + (y - 1)^2$.

1c) $\oint_C (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz = 0$, onde C é a curva obtida como a interseção do plano $y = z$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 2y$.

3. Seja C a circunferência de raio a , no plano $2x + 2y + z = 4$, centrada no ponto $(1, 2, -2)$. Se $\mathbf{F}(x, y, z) = (y - x, z - x, x - y)$, determine o valor de a para que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{8\pi}{3}$. (resp.: $a = 1$.)

4. Calcule $\int_C (2xyz + \sin x)dx + (x^2z + e^y)dy + \left(x^2y + \frac{1}{z}\right)dz$, onde C é a curva parametrizada por $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^2 t, ((t + 1)^2))$, $0 \leq t \leq \pi$. (resp.: $2 \ln(\pi + 1)$.)

5. Calcule $\int_C (2xyz + 2x)dx + x^2zdy + x^2ydz$, onde C é a interseção da superfície $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ com o plano $x + y = 2$. Indique a orientação escolhida. (resp.: 4, de $(0, 2, 0)$ para $(2, 0, 0)$.)

6. Seja

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(e^x \sin y + \frac{x}{x^2 + y^2}, e^x \cos y + \frac{y}{x^2 + y^2}, z^2 \right).$$

Mostre que o valor da integral de linha de \mathbf{F} ao longo de qualquer curva fechada C que não intercepte o eixo z é zero.

Teorema de Gauss (Teorema da Divergência)

Definição 1. Seja E uma região limitada de \mathbb{R}^3 , tendo como fronteira uma superfície S . Diremos que S está orientada positivamente se o vetor normal \mathbf{n} em cada ponto de S aponta para fora de E .

Definição 2. Dado um campo vetorial $\mathbf{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ tal que as derivadas parciais $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ e $\partial R/\partial z$ existem num subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$, a **divergência** de \mathbf{F} , denotado por $\text{div}\mathbf{F}$, é definida por

$$\text{div}\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z), \quad (21)$$

para todo $(x, y, z) \in U$.

Exemplo 1. Dado o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz + x^2)\vec{i} + (xz + 3y^2)\vec{j} + xy\vec{k}$$

definido em todo \mathbb{R}^3 , determine $\text{div}\mathbf{F}$.

Solução. Pela definição de divergência, temos

$$\text{div}\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(yz + x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xz + 3y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) = 2x + 6y$$

Teorema de Gauss (Teorema da Divergência). Seja E uma região fechada e limitada de \mathbb{R}^3 cuja fronteira é uma superfície S orientada positivamente. Se \mathbf{F} é um campo vetorial com derivadas parciais contínuas em uma região aberta contendo E , então

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV.$$

Prova do teorema da divergência num caso especial

Vamos provar o teorema da divergência no caso em que E é uma região de tipo I, II e III simultaneamente.

Se $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, podemos escrever

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iiint_E \frac{\partial F_1}{\partial x} dV + \iiint_E \frac{\partial F_2}{\partial y} dV + \iiint_E \frac{\partial F_3}{\partial z} dV.$$

Por outro lado, como

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = (F_1, 0, 0) + (0, F_2, 0) + (0, 0, F_3),$$

temos

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = \iint_S (F_1, 0, 0) \cdot \mathbf{n} dS + \iint_S (0, F_2, 0) \cdot \mathbf{n} dS + \iint_S (0, 0, F_3) \cdot \mathbf{n} dS$$

A demonstração estará concluída se provarmos as identidades

$$\iiint_E \frac{\partial F_1}{\partial x} dV = \iint_S (F_1, 0, 0) \cdot \mathbf{n} dS \quad (22)$$

$$\iiint_E \frac{\partial F_2}{\partial y} dV = \iint_S (0, F_2, 0) \cdot \mathbf{n} dS \quad (23)$$

$$\iiint_E \frac{\partial F_3}{\partial z} dV = \iint_S (0, 0, F_3) \cdot \mathbf{n} dS \quad (24)$$

Para provar (24), descrevemos E como tipo I:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y), \quad (x, y) \in D\}$$

onde D é a projeção de E no plano xy . Esta região é limitada inferiormente pela superfície S_1 de equação $z = f_1(x, y)$, limitada superiormente pela superfície S_2 de equação $z = f_2(x, y)$, com $(x, y) \in D$ em ambas equações, e (eventualmente) por uma superfície S_3 que é uma porção de cilindro gerada por uma gerada por uma reta paralela ao eixo z ao longo da fronteira de D , como mostra Figura 48.

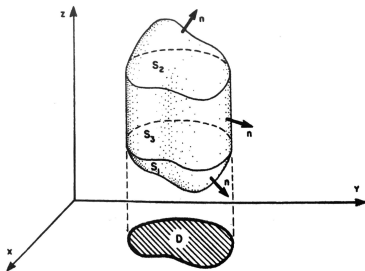


Figura: 48.

Temos

$$\begin{aligned}\iiint_E \frac{\partial F_3}{\partial z} dV &= \iint_D \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right] dA \\ &= \iint_D [F_3(x, y, f_2(x, y)) - F_3(x, y, f_1(x, y))] dA\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\iint_S (0, 0, F_3) \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_{S_1} (0, 0, F_3) \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_2} (0, 0, F_3) \cdot \mathbf{n} dS \\ &\quad + \iint_{S_3} (0, 0, F_3) \cdot \mathbf{n} dS\end{aligned}$$

Em S_3 , o campo de vetores normais unitários é paralelo ao plano xy . Logo, $(0, 0, F_3) \cdot \mathbf{n} = 0$ e, portanto,

$$\iint_{S_3} (0, 0, F_3) \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Em S_2 , o campo de vetores normais unitários que aponta para fora de E é dado por

$$\mathbf{n} = \frac{\left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} (0, 0, F_3) \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_D (0, 0, F_3(x, y, f_2(x, y))) \cdot \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1\right) dA \\ &= \iint_D F_3(x, y, f_2(x, y)) dA \end{aligned}$$

Em S_1 , o campo de vetores normais unitários que aponta para fora de E é dado por

$$\mathbf{n} = \frac{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \right)^2 + 1}}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (0, 0, F_3) \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_D (0, 0, F_3(x, y, f_1(x, y))) \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1 \right) dA \\ &= \iint_D -F_3(x, y, f_1(x, y)) dA \end{aligned}$$

Assim,

$$\iint_S (0, 0, F_3) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D [F_3(x, y, f_2(x, y)) - F_3(x, y, f_1(x, y))] dA,$$

o que prova (24). As demonstrações de (22) e (23) são análogas.

Interpretação para a divergência de um campo vetorial \mathbf{F} num ponto P_0

Suponha que \mathbf{F} representa o campo de velocidade de um fluido com densidade constante. Seja B_r uma bola de raio $r > 0$, centrada em um ponto P_0 , contida no aberto onde \mathbf{F} é de classe C^1 . Seja S_r a fronteira de B_r , isto é, a esfera de raio r e centro P_0 . Pelo teorema da divergência, temos

$$\iiint_{B_r} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_{S_r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS,$$

onde \mathbf{n} denota o campo de vetores normais unitários exteriores a B_r . Pelo teorema do valor médio para integrais, existe um ponto $P' \in B_r$ tal que

$$\iiint_{B_r} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \operatorname{div} \mathbf{F}(P') V(B_r), \quad (25)$$

onde $V(B_r)$ é o volume de B_r . O que nos permite escrever (25) na forma

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P') = \frac{1}{V(B_r)} \iint_{S_r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Fazendo $r \rightarrow 0$, obtemos

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(P_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V(B_r)} \iint_{S_r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (26)$$

A integral em (26) pode ser interpretada como o fluxo saindo da esfera por unidade de tempo, na direção do vetor normal unitário exterior. Dividindo pelo volume da bola, obtemos a massa por unidade de volume que flui para fora da esfera. Assim, obtemos uma interpretação:

A divergência de \mathbf{F} em P_0 é a taxa de variação da massa por unidade de volume por unidade de tempo em P_0 .

Essa é a razão para o nome *divergência*. Se $\operatorname{div}\mathbf{F}(P_0) > 0$, então o fluido “se afasta” de P_0 e P_0 é chamado de fonte. Se $\operatorname{div}\mathbf{F}(P_0) < 0$, então o fluido “se aproxima” de P_0 e P_0 é chamado de sorvedouro.

Exemplo 1. Calcule o fluxo exterior de

$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, 4yz^2, -yz)$ através da superfície do cubo S cujas faces estão contidas na união dos planos coordenados e dos planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$, com vetor normal a S exterior.

Solução. Este cálculo foi feito no Exemplo 7 da aula sobre integral de superfície de campos vetoriais utilizando a definição de fluxo exterior. Vamos agora refazer esse cálculo de um modo mais simples usando o teorema de Gauss. Primeiro calcularemos a divergência de \mathbf{F} :

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(4yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-yz) = y + 4z^2 - y = 4z^2.$$

Denotando o cubo por E , pelo teorema da divergência, temos

$$\begin{aligned}\text{Fluxo exterior} &= \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, dS = \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F} \, dV = \iiint_E 4z^2 \, dV \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 4z^2 \, dz \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{4}{3} \, dx \, dy = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Exemplo 2. Calcule o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$ através da superfície S do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 1$ e $z = -1$, com a normal a S apontando para o exterior do sólido.

Solução. S é uma superfície fechada, fronteira do conjunto

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}.$$

Como $\operatorname{div}\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 + x^2$, segue do teorema da divergência que

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, dS = \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F} \, dV = \iiint_E (y^2 + x^2) \, dV.$$

Fazendo mudança de coordenadas cilíndricas para resolver a integral tripla, obtemos

$$\iiint_E (y^2 + x^2) \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 r^3 \, dz \, dr \, d\theta = \pi.$$

Portanto,

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, dS = \pi.$$

Exemplo 3. Calcule o fluxo do campo vetorial

$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$ através da superfície S do parabolóide $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, com vetor normal se afastando do eixo z .

Solução. O primeiro modo de resolução para calcular a integral $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS$ é pela definição da integral de superfície.

Um segundo modo é usar o teorema da divergência, mas é preciso tomar cuidado. Se lermos com atenção o enunciado, notaremos que S não é uma superfície fechada e, portanto, o teorema da divergência não pode ser aplicado diretamente. Para contornar este problema, podemos aplicar o teorema da divergência ao sólido E limitado pela superfície S do parabolóide $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, unida com a superfície S_1 do plano $z = 1$ com $x^2 + y^2 \leq 1$, com vetor normal que aponta para fora de V .

Pelo teorema da divergência,

$$\iint_{S \cup S_1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iiint_E (1 + 1 - 2) dV = 0.$$

Usando que

$$\iint_{S \cup S_1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS + \iint_{S_1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS,$$

temos,

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = - \iint_{S_1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Agora

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS &= \iint_{S_1} (x, y, -2) \cdot (0, 0, 1) dS \\ &= \iint_{S_1} -2 dS = -2 \text{área}(S_1) = -2\pi. \end{aligned}$$

Então,

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = 2\pi.$$

Exemplo 4. O Exercício 18 da Lista 5 mostra que o fluxo do campo elétrico

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{\varepsilon q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$$

de uma carga q localizada na origem $(0, 0, 0)$ que sai de uma esfera S_R de raio R de centro na origem é $4\pi\varepsilon q$, isto é, independe do raio da esfera. Mostre que o fluxo do campo elétrico \mathbf{E} que sai de qualquer superfície fechada S que envolve a origem também é $4\pi\varepsilon q$.

Solução. Como o campo vetorial \mathbf{E} tem uma singularidade na origem, o teorema da divergência não pode ser aplicado. No entanto, como $\operatorname{div}\mathbf{E}(x, y, z) = 0$ (verifique), podemos usar o teorema da divergência na região compreendida entre S e S_R , onde R é suficientemente pequeno de modo que S_R está contida na região limitada por S (Figura 49).

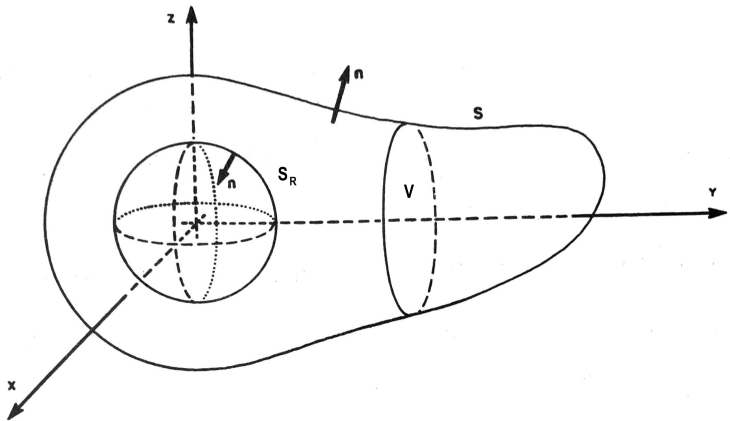


Figura: 49.

A fronteira de V é $S \cup S_R$, onde S está orientada com vetor normal apontando para fora de V e S_R com vetor normal apontando para a origem. Como $(0, 0, 0) \notin V$, então \mathbf{E} possui derivadas parciais contínuas em V . Aplicando o teorema da divergência ao campo \mathbf{E} sobre V , obtemos,

$$0 = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{E} \, dV = \iint_{S \cup S_R} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \, dS = \iint_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \, dS + \iint_{S_R} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \, dS.$$

Portanto,

$$\iint_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \, dS = - \iint_{S_R} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \, dS = -(-4\pi\epsilon q) = 4\pi\epsilon q.$$

Lista de Exercícios

1. Use o teorema da divergência para refazer os exercícios 13, 15 e 17 da lista de exercícios 5 para comparar os resultados.

2. Calcule o fluxo exterior do campo vetorial

$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^y + \cos yz, -2zy + \sin xz, z^2 + \frac{3}{\sqrt{2}})$ através da superfície S , com normal exterior, união das superfícies S_1 e S_2 , onde S_1 é definida por $z = 4 - 2x^2 - y^2$, $0 \leq z \leq 2$, e S_2 tem equação $z = 1 + x^2 + \frac{y^2}{2}$, $1 \leq z \leq 2$. (resp.: 6π .)

3. Calcule o fluxo do campo vetorial

$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -2y + e^x \cos z, z + x^2)$ através da superfície S definida por

$$\begin{cases} z = 9 - (x^2 + y^2), & 0 \leq z \leq 5 \\ z = 5, & 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ z = 8 - 3(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \leq 1, \end{cases}$$

com campo de vetores normais exterior a S . (resp.: $81\pi/4$.)

4. Sejam $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e W a pirâmide de vértices $O = (0, 0, 0)$, $A = (0, 1, 0)$, $B = (0, 0, 1)$ e $C = (c, 1, 0)$, com $c > 0$. Calcule o valor de c sabendo que

$$\iint_{S_W} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS + \iint_{S_{ABC}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = 1,$$

onde S_W é a superfície da pirâmide W e S_{ABC} é a face da pirâmide de vértices A, B, C , e \mathbf{n} é o campo de vetores normais que aponta para fora da pirâmide. (resp.: $c = 1$.)

5. Calcule o fluxo exterior do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

através da superfície do sólido E limitado pelas esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, onde $a < b$, orientadas com sentidos opostos (\mathbf{n} aponta para fora do sólido E). (resp.: $4\pi(b - a)$.)

