Em forma?

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

2^o **Semestre de 2022**

Espaço tangente (intrinsecamente e extrinsecamente)

- Via sistemas de coordenadas ϕ
- Via tangente de curvas

Vamos ver equivalência:

- Todo vetor $w = D\phi_a(v), v \in \mathbb{R}^m$ é velocidade da curva $\lambda(t) = \phi(a + tv)$.
- reciprocamente $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M, \lambda(0) = p$. então $\mu := \phi^{-1} \circ \lambda$

Espaço tangente (intrinsecamente e extrinsecamente)

- Via sistemas de coordenadas ϕ
- Via tangente de curvas

Vamos ver equivalência:

- Todo vetor $w = D\phi_a(v), v \in \mathbb{R}^m$ é velocidade da curva $\lambda(t) = \phi(a + tv)$.
- reciprocamente $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M, \lambda(0) = p$. então $\mu := \phi^{-1} \circ \lambda$
- agora $\phi \circ \mu = \lambda$, R-C $\lambda^{'}(0) = D\phi_a(\mu^{'}(0))$.

- Dada $\phi : V_0 \to V, \phi(a) = p$ parametrização uma base de T_pM :
$$D\phi_a(e_1), \cdots, D\phi_a(e_m) = \frac{\partial \phi}{\partial x_m}(a)$$
- Exemplo de espaço tangente de gráfico de $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.
- Mudança de coordenadas, $\psi : W_0 \to V, \phi : V_0 \to V$ coordenadas então existe $\xi : V_0 \to W_0$ difeomorfismo tal que $\phi = \psi \circ \xi$.

- Dada $\phi : V_0 \to V, \phi(a) = p$ parametrização uma base de T_pM :
$$D\phi_a(e_1), \cdots, D\phi_a(e_m) = \frac{\partial \phi}{\partial x_m}(a)$$
- Exemplo de espaço tangente de gráfico de $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.
- Mudança de coordenadas, $\psi : W_0 \to V, \phi : V_0 \to V$ coordenadas então existe $\xi : V_0 \to W_0$ difeomorfismo tal que $\phi = \psi \circ \xi$.

Porquê falamos de mudança de coordenadas?

- $V \cap W \neq \emptyset$ parametrizada por $(V_0, \phi), (W_0, \psi)$
- $\xi = \psi^{-1} \circ \phi : \phi^{-1}(V \cap W) \to \psi^{-1}(V \cap W), \xi(x) = y.$

  $p \in M, p = \phi(a) = \psi(b).$
- Tomas duas bases para $T_p(M)$

$$\{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(a)\}, \{\frac{\partial \psi}{\partial y_i}(b)\}$$

- Já que $\phi = \psi \circ \xi$ então pela R-C $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(b) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(a)$
- Nasceu matriz de mudança de bases por diferentes coordenações.

Estamos capaz de definir uma aplicação diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$.

- f é diferenciável em p se existir $\phi : V_0 \to V$ coordenada C^k tal que $f \circ \phi$ é diferenciável no ponto $a = \phi^{-1}(p)$. Isto não depende de parametrização: Verifique. Tenha cuidado de não exigir diferenciabilidade de ordem superior a da parametrização!!
- Qual é derivada da f? Seja $\phi : V_0 \to V$ coordenada, $v \in T_pM, v = D\phi_a(v_0)$ então definimos $Df_p(v) = D(f \circ \phi)_a(v_0)$.

Derivada está bem definida!

- ψ, ϕ, existe ξ tal que $\psi = \phi \circ \xi$ Usem regra de cadeia e que $D\phi_a$ é injetiva.

$$D\phi_a(v_0) = v = D\psi_b(w_0) = D\phi_a D\xi_b(w_0)$$

então $v_0 = D\xi_b(w_0)$

....

Suerfícies Orientáveis

- Parametrizações coerentes $detJ(\psi^{-1} \circ \phi(x)) > 0$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(y), det(\alpha_{ij}) > 0.$$

- parametrização inversa
- imagem de única parametrização ou duas ($V \cup W$ conexo), esferas
- se tivermos duas parametrização (não atlas) com $V \cap W$ conexa e mudança de coordenada muda sinal de jacobiana , não é orientável.

Theorem

Se M é superfície dimensõa m e admite $n-m$ campos contínuas de vetores normais $v_1, \cdots, v_{n-m} : M \to \mathbb{R}^n$ L.I então M é orientável.

- $\Phi(x) := [\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial \phi}{\partial x_m}(x), v_1(\phi(x)), \cdots]$ com det positivo
- $\Phi(x) = \Phi(y).\tilde{A},\ A = [\alpha_{ij}]$