Em forma?

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

2^o **Semestre de 2022**

Superfícies "High-Tech"

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$. Vamos definir subvariedades de dimensão k.

Definition

Definição (M): Para todo $x \in M$ existe $x \in U$ e $V \subset \mathbb{R}^n$, difeomorfismo $h : U \to V$ tal que

- $h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$

Superfícies "High-Tech"

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$. Vamos definir subvariedades de dimensão k.

Definition

Definição (M): Para todo $x \in M$ existe $x \in U$ e $V \subset \mathbb{R}^n$, difeomorfismo $h : U \to V$ tal que

- $h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$
- $= \{y \in V : y^{k+1} = \cdots = y^n = 0.\}$

Superfícies “High-Tech”

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$. Vamos definir subvariedades de dimensão k.

Definition

Definição (M): Para todo $x \in M$ existe $x \in U$ e $V \subset \mathbb{R}^n$, difeomorfismo $h : U \to V$ tal que

- $h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$
- $= \{y \in V : y^{k+1} = \cdots = y^n = 0.\}$

Exemplos. Se $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ diferenciável com posto p então $g^{-1}(0)$ é uma sub-variedade $(n-p)-$dimensional em $\mathbb{R}^n$.

Definition

$M \subset \mathbb{R}^n$, para todo $x \in M$ existe $x \in U$ e $W \subset \mathbb{R}^k$ e funcão injetiva e diferenciável $f : W \to \mathbb{R}^n$ tal que

- $f(W) = M \cap U$

Definition

$M \subset \mathbb{R}^n$, para todo $x \in M$ existe $x \in U$ e $W \subset \mathbb{R}^k$ e funcão injetiva e diferenciável $f : W \to \mathbb{R}^n$ tal que

- $f(W) = M \cap U$
- Df_y tem posto k para todo $y \in W$

Definition

$M \subset \mathbb{R}^n$, para todo $x \in M$ existe $x \in U$ e $W \subset \mathbb{R}^k$ e funcão injetiva e diferenciável $f : W \to \mathbb{R}^n$ tal que

- $f(W) = M \cap U$
- Df_y tem posto k para todo $y \in W$
- $f^{-1} : f(W) \to W$ é contínua.

M implica C (por coordenadas) :

M implica C (por coordenadas) :

- $h : U \to V$, $W := \{a \in \mathbb{R}^k : (a, 0) \in V\}$

M implica C (por coordenadas) :

- $h : U \to V$, $W := \{a \in \mathbb{R}^k : (a, 0) \in V\}$
- $a \in W, f(a) := h^{-1}(a, 0)$, $f(W) = M \cap U$ e f^{-1} é contínua.

M implica C (por coordenadas) :

- $h : U \to V,\ W := \{a \in \mathbb{R}^k : (a, 0) \in V\}$
- $a \in W, f(a) := h^{-1}(a, 0)$, $f(W) = M \cap U$ e f^{-1} é contínua.
- $H : U \to \mathbb{R}^k, H(z) := (h^1(z), \cdots, h^k(z))$ então

$$H(f(y)) = y, y \in W,\ DH_{f(y)} Df_y = Id$$

M implica C (por coordenadas) :

- $h : U \to V,\ W := \{a \in \mathbb{R}^k : (a, 0) \in V\}$
- $a \in W, f(a) := h^{-1}(a, 0)$, $f(W) = M \cap U$ e f^{-1} é contínua.
- $H : U \to \mathbb{R}^k, H(z) := (h^1(z), \cdots, h^k(z))$ então

$$H(f(y)) = y, y \in W,\ DH_{f(y)} Df_y = Id$$

Df_y tem posto k.

Recíproca: C $\rightarrow$ M.

Recíproca: C $\to$ M.

- $x = f(y)$, após mudança de base assumir $[D_j f^i]_{1 \leq i,j \leq k}$ não é singular.

Recíproca: C $\rightarrow$ M.

- $x = f(y)$, após mudança de base assumir $[D_j f^i]_{1 \leq i,j \leq k}$ não é singular.
- Defina $g : W \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$g(a, b) = f(a) + (0, b), detDg_{(a,b)} \neq 0$$

Recíproca: C $\to$ M.

- $x = f(y)$, após mudança de base assumir $[D_j f^i]_{1 \leq i,j \leq k}$ não é singular.
- Defina $g : W \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$

$$g(a,b) = f(a) + (0,b), detDg_{(a,b)} \neq 0$$

- pelo TFinversa, $f : V_1' \to V_2$ tem inversa h.
- $\{f(a) : (a,0) \in V_1'\} = U \cap f(W)$ para algum aberto U por f^{-1} ser contínua.

- $V_2 = V_2' \cap U$, $V_1 = g^{-1}(V_2)$ então

$$V_2 \cap M = \{f(a) : (a,0) \in V_1\} = \{g(a,0) : (a,0) \in V_1\}$$

- $h(V_2 \cap M) = g^{-1}(V_2 \cap M) = g^{-1}(\{g(a,0) : (a,0) \in V_1\}) = V_1 \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$

Semi-plano superior e variedades com bordo

Semi-plano superior e variedades com bordo

$$H^k = \{x \in \mathbb{R}^k : x^k \geq 0\}.$$

Semi-plano superior e variedades com bordo

$$H^k = \{x \in \mathbb{R}^k : x^k \geq 0\}.$$

Definition

Uma $k-$variedade com bordo. Se para todo x ou satisfaz condição anterior ou

Semi-plano superior e variedades com bordo

$$H^k = \{x \in \mathbb{R}^k : x^k \geq 0\}.$$

Definition

Uma $k-$variedade com bordo. Se para todo x ou satisfaz condição anterior ou

- Existe $x \in U, V \subset \mathbb{R}^n$ e difeo $h : U \to V$ tal que

$$h(U \cap M) = V \cap (H^k \times \{0\})$$

Semi-plano superior e variedades com bordo

$$H^k = \{x \in \mathbb{R}^k : x^k \geq 0\}.$$

Definition

Uma $k-$variedade com bordo. Se para todo x ou satisfaz condição anterior ou

- Existe $x \in U, V \subset \mathbb{R}^n$ e difeo $h : U \to V$ tal que

$$h(U \cap M) = V \cap (H^k \times \{0\})$$

ambas as condições não ocorrem. Figuras

- Espaço tangente de variedade

- Espaço tangente de variedade
- Orientação consistente e orientabilidade de variedade