Em forma?

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

2^o **Semestre de 2022**

Homotopic curves

Definição

$c_0, c_1 : [a, b] \to U \subset \mathbb{R}^n$ com mesmos pontos extremos são homotópicas se existir

$$H : [a, b] \times [0, 1] \to U$$

tal que

- $H(s, 0) = c_0(s), H(s, 1) = c_1(s)$
- $H(a, t) = c_0(a) = c_1(a), H(b, t) = c_0(b) = c_1(b).$

Homotopic curves

Definição

$c_0, c_1 : [a, b] \to U \subset \mathbb{R}^n$ com mesmos pontos extremos são homotópicas se existir

$$H : [a, b] \times [0, 1] \to U$$

tal que

- $H(s, 0) = c_0(s), H(s, 1) = c_1(s)$
- $H(a, t) = c_0(a) = c_1(a), H(b, t) = c_0(b) = c_1(b).$

Theorem

Seja ω *uma* $1-$*forma fechada em* U *e* c_0, c_1 *homotópicas em* U.

Então

$$\int_{c_0} \omega = \int_{c_1} \omega$$

Theorem

Seja ω *uma* $1-$*forma fechada em* U *e* c_0, c_1 *homotópicas em* U*. Então*

$$\int_{c_0} \omega = \int_{c_1} \omega$$

Provar por quadradinhos e cancelamentos usando lema do Poincaré. homotopia pode ser livre no caso das curvas fechadas.

Theorem

Seja ω *uma* $1-$*forma fechada em* U *e* c_0, c_1 *homotópicas em* U*. Então*

$$\int_{c_0} \omega = \int_{c_1} \omega$$

Provar por quadradinhos e cancelamentos usando lema do Poincaré. homotopia pode ser livre no caso das curvas fechadas.

Proposição

Se ω *é fechada numa região simplesmente conexo, então* ω *é fechada.*

Provamos que $\int_c \omega = 0$ para toda curva fechada e portanto pelo resultado das aulas anteriores ω é exata.

$F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenciável. p é zero da F se $F(p) = 0$.

$F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenciável. p é zero da F se $F(p) = 0$.

$F = (f, g), \theta = \frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2}$ definida em pontos de U que fazem sentido. $D \subset U$ um disco. índice de F em D :

$$n(F, D) := \frac{1}{2\pi} \int_{C = \partial D} \theta$$

$F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenciável. p é zero da F se $F(p) = 0$.

$F = (f, g), \theta = \frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2}$ definida em pontos de U que fazem sentido. $D \subset U$ um disco. índice de F em D :

$$n(F, D) := \frac{1}{2\pi} \int_{C = \partial D} \theta$$

Proposição

índice $\in \mathbb{Z}$.

$F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenciável. p é zero da F se $F(p) = 0$.

$F = (f, g), \theta = \frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2}$ definida em pontos de U que fazem sentido. $D \subset U$ um disco. índice de F em D :

$$n(F, D) := \frac{1}{2\pi} \int_{C = \partial D} \theta$$

Proposição

índice $\in \mathbb{Z}$.

Basta fazer $u = f(x, y), v = g(x, y)$ e $\omega_0 := \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2}$ ou seja $\theta = F^* \omega_0$

$F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenciável. p é zero da F se $F(p) = 0$.

$F = (f, g), \theta = \frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2}$ definida em pontos de U que fazem sentido. $D \subset U$ um disco. índice de F em D :

$$n(F, D) := \frac{1}{2\pi} \int_{C = \partial D} \theta$$

Proposição

índice $\in \mathbb{Z}$.

Basta fazer $u = f(x, y), v = g(x, y)$ e $\omega_0 := \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2}$ ou seja $\theta = F^* \omega_0$

$$n(F, D) = \frac{1}{2\pi} \int_C \theta$$

$F: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenciável. p é zero da F se $F(p) = 0$.

$F = (f, g), \theta = \frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2}$ definida em pontos de U que fazem sentido. $D \subset U$ um disco. índice de F em D :

$$n(F, D) := \frac{1}{2\pi} \int_{C = \partial D} \theta$$

Proposição

índice $\in \mathbb{Z}$.

Basta fazer $u = f(x, y), v = g(x, y)$ e $\omega_0 := \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2}$ ou seja $\theta = F^* \omega_0$

$$n(F, D) = \frac{1}{2\pi} \int_C \theta = \frac{1}{2\pi} \int_C F^* \omega_0$$

$F: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenciável. p é zero da F se $F(p) = 0$.

$F = (f, g), \theta = \frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2}$ definida em pontos de U que fazem sentido. $D \subset U$ um disco. índice de F em D :

$$n(F, D) := \frac{1}{2\pi} \int_{C = \partial D} \theta$$

Proposição

índice $\in \mathbb{Z}$.

Basta fazer $u = f(x, y), v = g(x, y)$ e $\omega_0 := \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2}$ ou seja $\theta = F^* \omega_0$

$$n(F, D) = \frac{1}{2\pi} \int_C \theta = \frac{1}{2\pi} \int_C F^* \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{F \circ C} \omega_0$$

Consequência para achar raízes

Proposição

Se $n(F, D) \neq 0$ *então existe* $q \in D$ *tal que* $F(q) = 0$.

Proposição

Se $n(F, D) \neq 0$ *então existe* $q \in D$ *tal que* $F(q) = 0$.

Se não tiver zero então $H(s,t) := F((1-t)C(s) + tp)$ é homotopia entre $F \circ C$ e ponto $F(p)$ sem passar por 0 então

$$n(F, D) = \frac{1}{2\pi}\int_C \theta = \frac{1}{2\pi}\int_C F^*\omega_0 = 0.$$

Teorema

Kronecker Seja $F : U \to \mathbb{R}^2$ *com apenas zeros simples (*Df_p *não singular) e não em fronteira de* D *então*

$$n(F, D) = P - N$$

onde P *é cardinalidade de zeros "positivos" e* N *negativos.*

Demonstração

Lema

Caso particular: Se apenas existir único zero, $n(F, D) = \pm 1$ *de acordo ao sinal de determinante da derivada.*

Lema

Caso particular: Se apenas existir único zero, $n(F, D) = \pm 1$ de acordo ao sinal de determinante da derivada.

Suponha $p = (0, 0)$.

Lema

Caso particular: Se apenas existir único zero, $n(F, D) = \pm 1$ *de acordo ao sinal de determinante da derivada.*

Suponha $p = (0, 0)$. Taylor: $F(q) = Tq + R(q)|q|, R(q) \to 0$.

Lema

Caso particular: Se apenas existir único zero, $n(F, D) = \pm 1$ *de acordo ao sinal de determinante da derivada.*

Suponha $p = (0, 0)$. Taylor: $F(q) = Tq + R(q)|q|, R(q) \to 0.$
Considere $H(q, t) := Tq + (1 - t)R(q)|q|$ mostramos que $H(q, t) \neq 0$ para $0 < |q| < \epsilon, t \in [0, 1]$
Isto implicaria que $H(C(s), t)$ é homotopia entre $F \circ C$ e $T \circ C$ e portanto $n(F, D) = n(T, D)$

Lema

Caso particular: Se apenas existir único zero, $n(F, D) = \pm 1$ de acordo ao sinal de determinante da derivada.

Suponha $p = (0, 0)$. Taylor: $F(q) = Tq + R(q)|q|, R(q) \to 0$.
Considere $H(q, t) := Tq + (1 - t)R(q)|q|$ mostramos que $H(q, t) \neq 0$ para $0 < |q| < \epsilon, t \in [0, 1]$
Isto implicaria que $H(C(s), t)$ é homotopia entre $F \circ C$ e $T \circ C$ e portanto $n(F, D) = n(T, D) = \pm 1$

Agora mostramos afirmação para ϵ pequeno:

Agora mostramos afirmação para ϵ pequeno:

$|H(q,t)| = |Tq + (1-t)R(q)|q|| \geq C|q| - \frac{C}{2}|q| > 0.$

Agora mostramos afirmação para ϵ pequeno:

$|H(q,t)| = |Tq + (1-t)R(q)|q|| \geq C|q| - \frac{C}{2}|q| > 0.$

Caso geral: por setores. uma figura vale mais.