Em forma?

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

2^o **Semestre de 2022**

Definição

$\omega = \sum a_i dx_i$ 1-forma diferencial em $U \subset \mathbb{R}^n$ e $c : [a, b] \to U$ diferenciável então $c^*\omega = \sum a_i(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \frac{dx_i}{dt} dt$ e

$$\int_{c(t)} \omega := \int_a^b c^*\omega = \int_a^b \sum a_i(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \frac{dx_i}{dt} dt$$

Definição

$\omega = \sum a_i dx_i$ 1-forma diferencial em $U \subset \mathbb{R}^n$ e $c : [a, b] \to U$ diferenciável então $c^*\omega = \sum a_i(x_1(t), \cdots, x_n(t))\frac{dx_i}{dt}dt$ e

$$\int_{c(t)} \omega := \int_a^b c^*\omega = \int_a^b \sum a_i(x_1(t), \cdots, x_n(t))\frac{dx_i}{dt}dt$$

Caso de curva diferenciávle por pedaço.

Definição

$\omega = \sum a_i dx_i$ 1-forma diferencial em $U \subset \mathbb{R}^n$ e $c : [a, b] \to U$ diferenciável então $c^*\omega = \sum a_i(x_1(t), \cdots, x_n(t))\frac{dx_i}{dt}dt$ e

$$\int_{c(t)} \omega := \int_a^b c^*\omega = \int_a^b \sum a_i(x_1(t), \cdots, x_n(t))\frac{dx_i}{dt}dt$$

Caso de curva diferenciávle por pedaço.

Se alterar parametrização (reservando orientação) não alteramos a integral:

$\phi : [c, d] \to [a, b]$ homeomorfismo diferenciável que preserva orientação

$$\int \omega = \int \omega$$

ω é chamada de forma fechada se $d\omega = 0$ e ω é chamada de exata se existe f tal que $\omega = df$.

ω é chamada de forma fechada se $d\omega = 0$ e ω é chamada de exata se existe f tal que $\omega = df$.

Exemplos.

ω é chamada de forma fechada se $d\omega = 0$ e ω é chamada de exata se existe f tal que $\omega = df$.

Exemplos.

Fato: Se ω é exata $\omega = df$ então

$\int_{c(t)} \omega = \int_a^b c^* df = \int_a^b d(f \circ c) = f(c(b)) - f(c(a))$.

ω é chamada de forma fechada se $d\omega = 0$ e ω é chamada de exata se existe f tal que $\omega = df$.

Exemplos.

Fato: Se ω é exata $\omega = df$ então

$\int_{c(t)} \omega = \int_a^b c^* df = \int_a^b d(f \circ c) = f(c(b)) - f(c(a))$.

Exemplo.

ω é chamada de forma fechada se $d\omega = 0$ e ω é chamada de exata se existe f tal que $\omega = df$.

Exemplos.

Fato: Se ω é exata $\omega = df$ então
$\int_{c(t)} \omega = \int_a^b c^* df = \int_a^b d(f \circ c) = f(c(b)) - f(c(a))$.
Exemplo.

Proposição

São equivalentes:

1. *ω é exata em $V \subset U$ conexo aberto*
2. *$\int \omega$ somente depende dos pontos extemais de c*
3. *$\int_c \omega = 0$ para c fechada.*

ω é chamada de forma fechada se $d\omega = 0$ e ω é chamada de exata se existe f tal que $\omega = df$.

Exemplos.

Fato: Se ω é exata $\omega = df$ então

$\int_{c(t)} \omega = \int_a^b c^* df = \int_a^b d(f \circ c) = f(c(b)) - f(c(a))$.

Exemplo.

Proposição

São equivalentes:

1. ω *é exata em* $V \subset U$ *conexo aberto*
2. $\int \omega$ *somente depende dos pontos extemais de* c
3. $\int_c \omega = 0$ *para* c *fechada.*

Basta provar 2 implica 1.

Fixa $p \in V$ e defina $f(x) = \int_c \omega$ (curva que junta p a x.)

Precisamos mostrar que $df = \omega$ i.e $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i$

Use definição de derivada parcial.

Fixa $p \in V$ e defina $f(x) = \int_c \omega$ (curva que junta p a x.)

Precisamos mostrar que $df = \omega$ i.e $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i$

Use definição de derivada parcial.

Exemplo: $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ Então $d\omega = 0$. Porém não é exata em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Fixa $p \in V$ e defina $f(x) = \int_c \omega$ (curva que junta p a x.)

Precisamos mostrar que $df = \omega$ i.e $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i$

Use definição de derivada parcial.

Exemplo: $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ Então $d\omega = 0$. Porém não é exata em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Winding number (índice de curvas fechadas)

$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ fechada, $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Winding number (índice de curvas fechadas)

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ fechada, $\gamma(0) = \gamma(1)$.

$$\phi(t) := \int_0^t \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} ds + \phi_0$$

Winding number (índice de curvas fechadas)

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ fechada, $\gamma(0) = \gamma(1)$.

$$\phi(t) := \int_0^t \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} ds + \phi_0$$

$$a(t) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, b(t) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Mostramos que se $cos(\phi_0) = a(0), sen(\phi_0) = b(0)$ então $cos(\phi(t)) = a(t), sen(\phi(t)) = b(t)$ Mostramos que $a(t)cos(\phi(t)) + b(t)sen(\phi(t)) = 1$ e então $(a(t) - cos(\phi(t)))^2 + (b(t) - sen(\phi(t)))^2 = 0.$

Lema de Poincaré

Seja $\omega = \sum a_i dx_i$ em $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então $d\omega = 0$ se somente se para todo $p \in U$ existe uma viz $V \subset U$ contendo p e $f : V \to \mathbb{R}$ tal que $\omega = df$ em V.

Lema de Poincaré

Seja $\omega = \sum a_i dx_i$ em $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então $d\omega = 0$ se somente se para todo $p \in U$ existe uma viz $V \subset U$ contendo p e $f : V \to \mathbb{R}$ tal que $\omega = df$ em V. localmente é exata

Lema de Poincaré

Seja $\omega = \sum a_i dx_i$ em $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então $d\omega = 0$ se somente se para todo $p \in U$ existe uma viz $V \subset U$ contendo p e $f : V \to \mathbb{R}$ tal que $\omega = df$ em V. localmente é exata

O lema de Poincaré vale para $k-$formas também, i.e $\omega \in \Omega^k(U)$ é chamada exata se existir μ tal que $\omega = d\mu$.

Lema de Poincaré

Seja $\omega = \sum a_i dx_i$ em $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então $d\omega = 0$ se somente se para todo $p \in U$ existe uma viz $V \subset U$ contendo p e $f : V \to \mathbb{R}$ tal que $\omega = df$ em V. localmente é exata

O lema de Poincaré vale para $k-$formas também, i.e $\omega \in \Omega^k(U)$ é chamada exata se existir μ tal que $\omega = d\mu$.

ω é chamada fechada, se $d\omega = 0$.

Lema de Poincaré

Seja $\omega = \sum a_i dx_i$ em $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então $d\omega = 0$ se somente se para todo $p \in U$ existe uma viz $V \subset U$ contendo p e $f : V \to \mathbb{R}$ tal que $\omega = df$ em V. localmente é exata

O lema de Poincaré vale para $k-$formas também, i.e $\omega \in \Omega^k(U)$ é chamada exata se existir μ tal que $\omega = d\mu$.

ω é chamada fechada, se $d\omega = 0$.

Lema de Poincaré: ω é fechada se localmente é exata!

Se ω é localmente exata claramente fechada.

Se ω é localmente exata claramente fechada.

Suponhamos $d\omega = 0$. Escolha $p \in U$ e junta q a p na bola.

Se ω é localmente exata claramente fechada.

Suponhamos $d\omega = 0$. Escolha $p \in U$ e junta q a p na bola.

já que ω é fechada então $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial y}$

$p = (x_0, y_0, z_0), \beta(t) = (x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), z_0 + t(z - z_0))$

Defina

$$f(q) := \int_{\beta(t)} \omega = \int_0^1 a(\beta(t)(x - x_0) + b(\beta(t)(y - y_0) + c(\beta(t)(z - z_0)dt$$

Se ω é localmente exata claramente fechada.

Suponhamos $d\omega = 0$. Escolha $p \in U$ e junta q a p na bola.

já que ω é fechada então $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial y}$

$p = (x_0, y_0, z_0), \beta(t) = (x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), z_0 + t(z - z_0))$

Defina

$$f(q) := \int_{\beta(t)} \omega = \int_0^1 a(\beta(t)(x - x_0) + b(\beta(t)(y - y_0) + c(\beta(t)(z - z_0) dt$$

Observe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x} t(x - x_0) + a(\beta(t)) dt$$

$+$

Se ω é localmente exata claramente fechada.

Suponhamos $d\omega = 0$. Escolha $p \in U$ e junta q a p na bola.

já que ω é fechada então $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial y}$

$p = (x_0, y_0, z_0), \beta(t) = (x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), z_0 + t(z - z_0))$

Defina

$$f(q) := \int_{\beta(t)} \omega = \int_0^1 a(\beta(t)(x-x_0)+b(\beta(t)(y-y_0)+c(\beta(t)(z-z_0)dt$$

Observe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x} t(x - x_0) + a(\beta(t))dt$$

$+$

$$\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial y} t(y - y_0) + \frac{\partial a}{\partial z} t(z - z_0)dt$$

Se ω é localmente exata claramente fechada.

Suponhamos $d\omega = 0$. Escolha $p \in U$ e junta q a p na bola.

já que ω é fechada então $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial y}$

$p = (x_0, y_0, z_0), \beta(t) = (x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), z_0 + t(z - z_0))$

Defina

$$f(q) := \int_{\beta(t)} \omega = \int_0^1 a(\beta(t)(x - x_0) + b(\beta(t)(y - y_0) + c(\beta(t)(z - z_0)dt$$

Observe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x} t(x - x_0) + a(\beta(t))dt$$

$+$

$$\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial y} t(y - y_0) + \frac{\partial a}{\partial z} t(z - z_0)dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \int_0^1 \frac{d}{dt}(a(\beta(t)))t + a = \int_0^1 \frac{d}{dt}(a(\beta(t))t) = a(\beta(1))$$