Em forma?

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

2^o **Semestre de 2022**

Definição

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^m, f : U \to W, C^\infty$. *Se* v *é um campo em* U *então* w *e* v *são* f *relacionados se* $w(f(p)) := Df_p(v(p))$.

Definição

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^m, f : U \to W, C^\infty$. *Se* v *é um campo em* U *então* w *e* v *são* f *relacionados se* $w(f(p)) := Df_p(v(p))$.

$v = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}, w = \sum w_j \frac{\partial}{\partial y_j}$

Definição

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^m, f : U \to W, C^\infty$. *Se* v *é um campo em* U *então* w *e* v *são* f *relacionados se* $w(f(p)) := Df_p(v(p))$.

$v = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}, w = \sum w_j \frac{\partial}{\partial y_j}$

$$w_i(q) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) v_j(p).$$

Definição

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^m, f : U \to W, C^\infty$. *Se* v *é um campo em* U *então* w *e* v *são* f *relacionados se* $w(f(p)) := Df_p(v(p))$.

$v = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}, w = \sum w_j \frac{\partial}{\partial y_j}$

$$w_i(q) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) v_j(p).$$

Se $m = n$ e f diffeomorphismo $w_i = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) v_j) \circ f^{-1}$

$w = f_* v$ ou w é chamado pushforward de v.

Algumas propriedades

- Se $f : U_1 \to U_2$ e v_1, v_2 relacionado, então curvas integrais de v_1 transformam em curvas integrais de v_2 via f.
- Dado $\phi \in C^\infty(U_2)$ definimos $f^*\phi = \phi \circ f$ então $f^* L_{v_2}\phi = L_{v_1} f^*\phi$.
- Sejam f_1, f_2 difeomorfismos de U então $(f_2)_*(f_1)_* v = (f_2 \circ f_1)_* v$

Pull-back

$U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m, f : U \to V$ se μ é $1-$forma em W

$$(f^*\mu)_p := \mu_{f(p)} \circ Df_p$$

Pull-back

$U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m, f : U \to V$ se μ é $1-$forma em W

$$(f^*\mu)_p := \mu_{f(p)} \circ Df_p$$

Exemplo: Se $\phi : V \to \mathbb{R}$ e $\mu = d\phi$ então $f^*\mu =$

Pull-back

$U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m, f : U \to V$ se μ é $1-$forma em W

$$(f^*\mu)_p := \mu_{f(p)} \circ Df_p$$

Exemplo: Se $\phi : V \to \mathbb{R}$ e $\mu = d\phi$ então $f^*\mu =$

$$d(\phi \circ f)$$

$k-$formas diferenciais

$$\omega(p) = \sum a_{i_1 < \cdots < i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_p$$

$k-$formas diferenciais

$\omega(p) = \sum a_{i_1<\cdots<i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_p$

$\omega(p) = \sum_I a_I dx_I$ onde $I = (i_1, \cdots, i_k)$

$k-$formas diferenciais

$\omega(p) = \sum a_{i_1 < \cdots < i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_p$

$\omega(p) = \sum_I a_I dx_I$ onde $I = (i_1, \cdots, i_k)$

Exemplos: $0-$formas, $3-$formas

$k-$formas diferenciais

$\omega(p) = \sum a_{i_1 < \dots < i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_p$

$\omega(p) = \sum_I a_I dx_I$ onde $I = (i_1, \cdots, i_k)$

Exemplos: $0-$formas, $3-$formas

Produto exterior ω é $k-$forma e μ é $s-$forma então $\omega \wedge \mu$ é $s + k-$forma

$\omega = \sum_I a_I dx_I, \mu = \sum_J a_J dx_J$ então $\omega \wedge \mu =$

$k-$formas diferenciais

$\omega(p) = \sum a_{i_1 < \cdots < i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_p$

$\omega(p) = \sum_I a_I dx_I$ onde $I = (i_1, \cdots, i_k)$

Exemplos: $0-$formas, $3-$formas

Produto exterior ω é $k-$forma e μ é $s-$forma então $\omega \wedge \mu$ é

$s + k-$forma

$\omega = \sum_I a_I dx_I, \mu = \sum_J a_J dx_J$ então $\omega \wedge \mu =$

$$\sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

$\omega(p) = \sum a_{i_1<\cdots<i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_p$

$\omega(p) = \sum_I a_I dx_I$ onde $I = (i_1, \cdots, i_k)$

Exemplos: $0-$formas, $3-$formas

Produto exterior ω é $k-$forma e μ é $s-$forma então $\omega \wedge \mu$ é

$s+k-$forma

$\omega = \sum_I a_I dx_I, \mu = \sum_J a_J dx_J$ então $\omega \wedge \mu =$

$$\sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

Exemplo: $\omega = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3, \phi = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3$

temos $\omega \wedge \phi =$

$\omega(p) = \sum a_{i_1 < \cdots < i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_p$

$\omega(p) = \sum_I a_I dx_I$ onde $I = (i_1, \cdots, i_k)$

Exemplos: $0-$formas, $3-$formas

Produto exterior ω é $k-$forma e μ é $s-$forma então $\omega \wedge \mu$ é

$s + k-$forma

$\omega = \sum_I a_I dx_I, \mu = \sum_J a_J dx_J$ então $\omega \wedge \mu =$

$$\sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

Exemplo: $\omega = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3, \phi = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3$

temos $\omega \wedge \phi =$

$$(x_1 x_3 - x_2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Exercício: Se $\phi_1, \cdots, \phi_k$ são $1-$formas então

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k(v_1, \cdots, , v_k) = det[\phi_i(v_j)].$$

Proposição

Seja ω $k-$forma e ϕ, $s-$forma e θ $r-$forma:

- $(\omega \wedge \phi) \wedge \theta = \omega \wedge (\phi \wedge \theta)$
- $(\omega \wedge \phi) = (-1)^{ks}(\phi \wedge \omega)$

Pull back de $k-$formas

$$f^*\omega(p)(v_1, \cdots, v_k) = \omega(f(p))(Df_p(v_1), \cdots, Df_p(v_k)).$$

Pull back de $k-$formas

$f^*\omega(p)(v_1, \cdots, v_k) = \omega(f(p))(Df_p(v_1), \cdots, Df_p(v_k))$.

Exemplo: $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ e $U = \{(r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$

$f : U \to \mathbb{R}^2, f(r,\theta) = (rcos(\theta), rsen(\theta))$ então $f^*\omega = d\theta$

Pull back de $k-$formas

$f^*\omega(p)(v_1, \cdots, v_k) = \omega(f(p))(Df_p(v_1), \cdots, Df_p(v_k))$.

Exemplo: $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ e $U = \{(r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$

$f : U \to \mathbb{R}^2, f(r, \theta) = (rcos(\theta), rsen(\theta))$ então $f^*\omega = d\theta$

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_m - f_m(x_1, cdots, x_n)$ então se $\omega = \sum a_I dy_I$ temos $f^*\omega =??$

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_m - f_m(x_1, cdots, x_n)$

então se $\omega = \sum a_I dy_I$ temos $f^*\omega =??$ observe que

$f^*(dy_i)(v) = dy_i(df(v)) = d(y_i \circ f)(v) = df_i(v)$ então

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_m - f_m(x_1, cdots, x_n)$ então se $\omega = \sum a_I dy_I$ temos $f^*\omega =??$ observe que $f^*(dy_i)(v) = dy_i(df(v)) = d(y_i \circ f)(v) = df_i(v)$ então

$$f^*\omega = \sum (a_I \circ f) df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}.$$

Proposição

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciável, ϕ, ω $k-$formas, $g:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $0-$forma:

- $f^*(\omega + \phi) = f^*(\omega) + f^*\phi$

Proposição

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *diferenciável,* ϕ, ω $k-$*formas,* $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $0-$*forma:*

- $f^*(\omega + \phi) = f^*(\omega) + f^*\phi$
- $f^*(g\omega) = f^*(g)f^*\omega = (g \circ f)f^*\omega$

Proposição

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *diferenciável,* ϕ, ω $k-$*formas,* $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $0-$*forma:*

- $f^*(\omega + \phi) = f^*(\omega) + f^*\phi$
- $f^*(g\omega) = f^*(g)f^*\omega = (g \circ f)f^*\omega$
- $\phi_1, \cdots, \phi_k$ $1-$*forma então* $f^*(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k) = f^*(\phi_1) \wedge \cdots \wedge f^*(\phi_k)$. *Generalize para outras formas.*

Proposição

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *diferenciável,* ϕ, ω $k-$*formas,* $g:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $0-$*forma:*

- $f^*(\omega+\phi) = f^*(\omega) + f^*\phi$
- $f^*(g\omega) = f^*(g)f^*\omega = (g\circ f)f^*\omega$
- $\phi_1, \cdots, \phi_k$ $1-$*forma então* $f^*(\phi_1\wedge\cdots\wedge\phi_k) = f^*(\phi_1)\wedge\cdots\wedge f^*(\phi_k)$. *Generalize para outras formas.*
- $(f\circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega)$.

Derivada Exterior

Definição

$\omega = \sum a_I dx_I$ *então* $d\omega := \sum da_I dx_I$

Derivada Exterior

Definição

$\omega = \sum a_I dx_I$ *então* $d\omega := \sum da_I dx_I$

Exemplo: $\omega = xyzdx + yzdy$ calcule $d\omega$.

Proposição

- $d(\omega_1 + \omega_2) =$

Proposição

- $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$
- $d(\omega \wedge \phi) = d\omega \wedge \phi$

Proposição

- $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$
- $d(\omega \wedge \phi) = d\omega \wedge \phi + (-1)^k \omega \wedge d\phi$
- $d(d\omega) = d^2\omega = 0.$

Proposição

- $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$
- $d(\omega \wedge \phi) = d\omega \wedge \phi + (-1)^k \omega \wedge d\phi$
- $d(d\omega) = d^2\omega = 0.$

  $d(df) = d(\sum \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j) = \sum \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j$