Em forma?

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

2^o **Semestre de 2022**

Integração de n-formas

- Lembrar integral de

  $f : U_0 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{U}_{\not{F}} : \sum f(x_i, y_j) Area(V_{ij}^1, V_{ij}^2)$
- Integral de $f(x, y)dx \wedge dy$ on $\mathbb{R}^2$
- Como integral $2-$forma em $\mathbb{R}^3$? Somente integramos sobre conjuntos que podem ser parametrizados por subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, ou seja superfícies de dimensão 2.
- Achar f tal que $\int_{U_0} fdx \wedge dy = \int \omega$
- $\mathcal{V}_{ij}^1 = \phi(x_{i+1}, y_j) - \phi(x_i, y_j), \mathcal{V}_{ij}^2 = \phi(x_i, y_{j+1}) - \phi(x_i, y_j)$

- $\sum\sum f(x_i, y_j)dx \wedge dy(V_{ij}^1, V_{ij}^2)$ e $\sum\sum \omega_{\phi(x_i,y_j)}(\mathcal{V}_{ij}^1, \mathcal{V}_{ij}^2)$.
- Então $f(x_i, y_j) = \frac{\omega_{\phi(x_i,y_j)}(\mathcal{V}_{ij}^1,\mathcal{V}_{ij}^2)}{|V_{ij}^1||V_{ij}^2|}$
- Tomando limite temos $f(x_i, y_j) = \omega_{\phi(x_i,y_j)}(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y})$
- $\int_M \omega := \int_{U_0} \omega_{\phi(x,y)}(\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y), \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y))dx \wedge dy$

Example

$\omega = z^2 dx \wedge dy$ e $M = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$.

- Seja

  $\phi(r,t) = (rcos(t), rsen(t), \sqrt{1-r^2}), t \in [0, 2\pi], r \in [0, 1].$
- $\int_{U_0} \omega_{\phi(r,t)}(\frac{\partial\phi}{\partial r}(r,t), \frac{\partial\phi}{\partial t}(r,t))dr \wedge dt$
- $=$

  $\int_{U_0} \omega_{\phi(r,t)}((cos(t), sen(t), \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}}), (-rsen(t)), rcos(t), 0)dr \wedge dt$
- $= \int_{U_0}(1-r^2)rdr \wedge dt = \int_0^{2\phi} \int_0^1 r - r^3 dr \wedge dt = \frac{\pi}{2}.$
- Se utilizarmos a parametrização

  $\psi(r,t) = (-rcos(t), rsen(t), \sqrt{1-r^2}?$

Integração de $k-$formas

Para começa precisamos combinar que $\omega(x) \in (T_x M)^*$

- Seja $\phi : U_0 \to U$ uma paramtrização de um aberto em M de dimensão m em $\mathbb{R}^n$.
- $\{\frac{\partial \phi}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial \phi}{\partial u_m}\} \subset T_x M, x = \phi(u)$.
- $\{du_1, \cdots du_m\}$ base duas de $(T_x M)^*$.
- $du_I = du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r}$ é base de $r-$formas.
- $\omega(x) = \omega(\phi(u)) = \sum a_I du_I$.

Integral de m-formas e mudança de parametrização

- $\phi(u) = \psi(v) = x \in U \cap V$ duas parametrizações
- $\omega(x) = a(u) du_1 \cdots \wedge du_m = b(v) dv_1 \cdots \wedge dv_m$
- $a(u) = det(\frac{\partial v_i}{\partial u_j}) b(v), u \in \phi^{-1}(U \cap V)$ e o jacobiano é de $\psi^{-1} \circ \phi$.
- $\frac{\partial \phi}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial v_i}{\partial u_j} \frac{\partial \psi}{\partial v_j}$
- $dv_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial v_i}{\partial u_j} du_j$
- $dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_m = det J du_1 \wedge \cdots \wedge du_m$

Por definição se $Supp(\omega) \subset U$ então $\int \omega = \int_{U_0} a(u)du$ isto é uma $m-$integral em $\mathbb{R}^m$

- Suponhamos $supp(\omega) \subset V$, $\psi : V_0 \to V$ parametrização positiva
- $b : V_0 \to \mathbb{R}, supp(b) = \psi^{-1} supp(\omega)$
- Toma $\phi^{-1}(supp(\omega)) \subset K \subset \phi^{-1}(U \cap V), L = \psi^{-1}\phi(K)$
- $\int_L b(v)dv = \int_K b(\psi^{-1}\phi(u))J(u)du = \int_K a(u)du$