Em forma?

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

2^o **Semestre de 2022**

Campo Vetorial

Primeiramente definimos espaço tangente $T_p\mathbb{R}^n$.

Consideramos $Df_p : T_p(\mathbb{R}^n) \to T_{f(p)}\mathbb{R}^n$.

Campo Vetorial

Primeiramente definimos espaço tangente $T_p\mathbb{R}^n$.

Consideramos $Df_p : T_p(\mathbb{R}^n) \to T_{f(p)}\mathbb{R}^n$.

Definição

$U \subset \mathbb{R}^n, p \to v(p) \in T_p\mathbb{R}^n$ é um campo vetorial.

Campo Vetorial

Primeiramente definimos espaço tangente $T_p\mathbb{R}^n$.

Consideramos $Df_p : T_p(\mathbb{R}^n) \to T_{f(p)}\mathbb{R}^n$.

Definição

$U \subset \mathbb{R}^n, p \to v(p) \in T_p\mathbb{R}^n$ é um campo vetorial.

Observação: o conjunto de campos vetoriais forma um espaço vetorial!

Exemplos: Campo constante, campo $\frac{\partial}{\partial x_i}$, fv (alterar velocidade)

A forma geral de um campo vetorial: $v = \sum_i g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Campo Vetorial

Primeiramente definimos espaço tangente $T_p\mathbb{R}^n$.

Consideramos $Df_p : T_p(\mathbb{R}^n) \to T_{f(p)}\mathbb{R}^n$.

Definição

$U \subset \mathbb{R}^n, p \to v(p) \in T_p\mathbb{R}^n$ *é um campo vetorial.*

Observação: o conjunto de campos vetoriais forma um espaço vetorial!

Exemplos: Campo constante, campo $\frac{\partial}{\partial x_i}$, fv (alterar velocidade)

A forma geral de um campo vetorial: $v = \sum_i g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. v é chamado C^k se g_i forem C^k.

Definição

Derivada de Lie ao longo de um campo: $f : U \to \mathbb{R}$ *então*

$L_v f(p) := Df_p(v(p))$.

Definição

Derivada de Lie ao longo de um campo: $f : U \to \mathbb{R}$ *então*

$L_v f(p) := Df_p(v(p))$.

Observe que (omitindo o ponto p*)*

$$L_v f = \sum_i g_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Definição

Derivada de Lie ao longo de um campo: $f : U \to \mathbb{R}$ *então*

$L_v f(p) := Df_p(v(p))$.

Observe que (omitindo o ponto p)

$$L_v f = \sum_i g_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Claro que $L_v(f_1 f_2) = L_v(f_1) f_2 + f_1 L_v(f_2)$.

Definição

Derivada de Lie ao longo de um campo: $f : U \to \mathbb{R}$ *então*

$L_v f(p) := Df_p(v(p))$.

Observe que (omitindo o ponto p)

$$L_v f = \sum_i g_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Claro que $L_v(f_1 f_2) = L_v(f_1) f_2 + f_1 L_v(f_2)$.

Espaço cotangente e $1-$formas diferenciais

Definição

$T_p^*\mathbb{R}^n := (T_p\mathbb{R}^n)^*$, $1-$*forma diferencial*

Se f é uma função real Df_p é um elemento de espaço cotangente.

Omitindo p temos df que é uma $1-$forma diferencial.

Espaço cotangente e $1-$formas diferenciais

Definição

$T_p^*\mathbb{R}^n := (T_p\mathbb{R}^n)^*$, $1-$*forma diferencial*

Se f é uma função real Df_p é um elemento de espaço cotangente.

Omitindo p temos df que é uma $1-$forma diferencial.

Exemplo: dx_i ou ω, $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$.

Espaço cotangente e $1-$formas diferenciais

Definição

$T_p^*\mathbb{R}^n := (T_p\mathbb{R}^n)^*$, $1-$*forma diferencial*

Se f é uma função real Df_p é um elemento de espaço cotangente.

Omitindo p temos df que é uma $1-$forma diferencial.

Exemplo: dx_i ou ω, $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$.

Fato: $f : U \to \mathbb{R}, C^\infty$ então $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

Produto interior (contração)

Definição

Dado v campo e ω forma diferencial, $\iota_v\omega$ é uma função suave,

$$\iota_v\omega(p) := \omega_p(v(p)).$$

Produto interior (contração)

Definição

Dado v campo e ω forma diferencial, $\iota_v\omega$ é uma função suave,

$$\iota_v\omega(p) := \omega_p(v(p)).$$

Relação com derivada de Lie:

$L_v\omega = \sum f_i g_i$, *se* $\omega = \sum g_i dx_i, v = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

Produto interior (contração)

Definição

Dado v campo e ω forma diferencial, $\iota_v \omega$ é uma função suave,

$$\iota_v \omega(p) := \omega_p(v(p)).$$

Relação com derivada de Lie:

$L_v \omega = \sum f_i g_i$, *se* $\omega = \sum g_i dx_i, v = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

Proposição

$\iota_v d\phi = L_v \phi$

Line integral

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\gamma : [a, b] \to U$ curva C^1 e $\omega = \sum f_i dx_i$

Line integral

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\gamma : [a, b] \to U$ curva C^1 e $\omega = \sum f_i dx_i$

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b f_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma_i}{dt} dt.$$

Proposição

Seja $\omega = df, f \in C^\infty$. Então $\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$. Portanto se γ for fechada $\int_\gamma \omega = 0$.

Exercício: calcule $\int_\gamma \omega$ onde $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ e γ círculo com centro $(0, 0)$.

Curvas integrais para um campo vetorial

Definição

U aberto e v campo vetorial. Então $\gamma : [a,b] \to U$ é uma curva integral se

$$v(\gamma(t)) = (\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t)).$$

Se $v = \sum g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ então $\frac{d\gamma}{dt}(t) = g(\gamma(t))$ onde $g = (g_1, \cdots, g_n)$.

Teoremas de existência e unicidade de curvas integrais,

Curvas integrais para um campo vetorial

Definição

U aberto e v campo vetorial. Então $\gamma : [a, b] \to U$ *é uma curva integral se*

$$v(\gamma(t)) = (\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t)).$$

Se $v = \sum g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ então $\frac{d\gamma}{dt}(t) = g(\gamma(t))$ onde $g = (g_1, \cdots, g_n)$.

Teoremas de existência e unicidade de curvas integrais, Existência: $U \subset \mathbb{R}^n, v \in \chi(U)$. Dado $p \in U$ e $a \in \mathbb{R}$ existe $\gamma : (a - \epsilon, a + \epsilon) \in U$ tal que $\gamma(a) = p$ e γ é curva integral. Se v é suave (pelo menos Lipschitz) então unicidade.

Existência: $U \subset \mathbb{R}^n, v \in \chi(U)$. Dado $p \in U$ e $a \in \mathbb{R}$ existe $\gamma : (a - \epsilon, a + \epsilon) \in U$ tal que $\gamma(a) = p$ e γ é curva integral. Se v é suave (pelo menos Lipschitz) então unicidade.

Unicidade: Se $\gamma_i : I_i \to U$ curvas integrais e $a \in I_1 \cap I_2$ e $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ então $\gamma_1 = \gamma_2$ em $I_1 \cap I_2$ e podemos definir γ curva integral em $I_1 \cup I_2$.

dependência suave $V \subset U$ abertos e $v \in C^\infty$ em U e I intervalo aberto $a \in I$ tal que $h : V \times I \to U$ satisfazendo:

- $h(a, p) = p$
- $\forall pV$ a curva $\gamma_p : I \to U$ uma curva integral

então h é C^∞.

Existência: $U \subset \mathbb{R}^n, v \in \chi(U)$. Dado $p \in U$ e $a \in \mathbb{R}$ existe $\gamma : (a-\epsilon, a+\epsilon) \in U$ tal que $\gamma(a) = p$ e γ é curva integral. Se v é suave (pelo menos Lipschitz) então unicidade.

Unicidade: Se $\gamma_i : I_i \to U$ curvas integrais e $a \in I_1 \cap I_2$ e $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ então $\gamma_1 = \gamma_2$ em $I_1 \cap I_2$ e podemos definir γ curva integral em $I_1 \cup I_2$.

dependência suave $V \subset U$ abertos e $v \in C^\infty$ em U e I intervalo aberto $a \in I$ tal que $h : V \times I \to U$ satisfazendo:

- $h(a,p) = p$
- $\forall pV$ a curva $\gamma_p : I \to U$ uma curva integral

então h é C^∞.

Reparametrização: $I = (a,b), c \in \mathbb{R}$. Seja $I_c = (a-c, b-c)$ então se $\gamma : I \to U$ é curva integral temos que $\gamma_c := \gamma(t+c)$ também é.

Uma função C^1 $\phi : U \to \mathbb{R}$ é dita integral se é constante sobre toda curva integral $\gamma(t)$ i.e

$$\frac{d}{dt}\phi(\gamma(t)) = (D\phi)_{\gamma(t)}(v) = 0 =^* L_v\phi$$

Mostrar no exemplo $v(x, y) = (-y, x)$.

Definição

Campo completo: v é completo se para todo $p \in U$ *existe uma curva integral* $\gamma : \mathbb{R} \to U, \gamma(0) = p$.

Definição

Campo completo: v é completo se para todo $p \in U$ existe uma curva integral $\gamma : \mathbb{R} \to U, \gamma(0) = p$.

Patologias para $\gamma : [0, b) \to U$ não extender: $\gamma(t) \to \infty, t \to b$ ou conjunto limite de $\{\gamma(t) 0 \leq t < b\}$ contem fronteira de U.

Definição

Campo completo: v é completo se para todo $p \in U$ existe uma curva integral $\gamma : \mathbb{R} \to U, \gamma(0) = p$.

Patologias para $\gamma : [0, b) \to U$ não extender: $\gamma(t) \to \infty, t \to b$ ou conjunto limite de $\{\gamma(t) 0 \leq t < b\}$ contem fronteira de U.

Exemplo: v um campo em $\mathbb{R}$ e $v = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$

Definição

Campo completo: v é completo se para todo $p \in U$ existe uma curva integral $\gamma : \mathbb{R} \to U, \gamma(0) = p$.

Patologias para $\gamma : [0, b) \to U$ não extender: $\gamma(t) \to \infty, t \to b$ ou conjunto limite de $\{\gamma(t) 0 \leq t < b\}$ contem fronteira de U.

Exemplo: v um campo em $\mathbb{R}$ e $v = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$

$x(0) = a > 0, x(t) = \frac{a}{1-at}, t < \frac{1}{a}$

Definição

Campo completo: v é completo se para todo $p \in U$ existe uma curva integral $\gamma : \mathbb{R} \to U, \gamma(0) = p$.

Patologias para $\gamma : [0, b) \to U$ não extender: $\gamma(t) \to \infty, t \to b$ ou conjunto limite de $\{\gamma(t) 0 \leq t < b\}$ contem fronteira de U.

Exemplo: v um campo em $\mathbb{R}$ e $v = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$

$x(0) = a > 0, x(t) = \frac{a}{1-at}, t < \frac{1}{a}$

Teorema

Se existir uma função C^1 *própria tal que* $L_v\phi = 0$ *então* v *é completo.*

ϕ é constante na curva integral e $\gamma(t) \subset \phi^{-1}(c)$ e portanto é compacto e então devemos poder extender a solução.

Teorema

Se existir uma função C^1 própria tal que $L_v\phi = 0$ então v é completo.

ϕ é constante na curva integral e $\gamma(t) \subset \phi^{-1}(c)$ e portanto é compacto e então devemos poder extender a solução.

Exemplo: $v = x^3\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$, $\phi = 2y^2 + x^4$. (polinômios são próprios!)

Observe que nos pontos singulares de v a curva integral constante é definida em todo $\mathbb{R}$.

Teorema

Se existir uma função C^1 própria tal que $L_v\phi = 0$ então v é completo.

ϕ é constante na curva integral e $\gamma(t) \subset \phi^{-1}(c)$ e portanto é compacto e então devemos poder extender a solução.

Exemplo: $v = x^3\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$, $\phi = 2y^2 + x^4$. (polinômios são próprios!)

Observe que nos pontos singulares de v a curva integral constante é definida em todo $\mathbb{R}$.

Teorema

Se $supp(v) = cl\{q \in U : v(q) \neq 0\}$ *é compacto então* v *é completo.*

Curvas em suporte não podem sair do suporte e portanto não vão a infinito!

Teorema

Se $supp(v) = cl\{q \in U : v(q) \neq 0\}$ *é compacto então* v *é completo.*

Curvas em suporte não podem sair do suporte e portanto não vão a infinito!

Finalmente vamos observar que $f_t : U \to U$ definida $f_t(p) = \gamma_p(t)$ define um grupo de um parametro de difeomorfismos.

$f_t \circ f_a = f_{t+a}$ (usamos reparametrização)