Em forma?

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

2^o **Semestre de 2022**

Achar $Ker(Alt), Alt : L^k(V) \to L^k(V)$

$$\text{Achar } Ker(Alt), Alt : L^k(V) \rightarrow L^k(V)$$

Exemplo: $Alt(e_1^* \otimes e_1^* \otimes e_3^*) = 0$. Ou em geral se T é redundante, i.e

$$T = l_1 \otimes \cdots l_i \otimes \cdots \otimes l_k, l_i = l_{i+1}$$

então $Alt(T) = 0$.

$$\text{Achar } Ker(Alt), Alt : L^k(V) \to L^k(V)$$

Exemplo: $Alt(e_1^* \otimes e_1^* \otimes e_3^*) = 0$. Ou em geral se T é redundante, i.e

$$T = l_1 \otimes \cdots l_i \otimes \cdots \otimes l_k, l_i = l_{i+1}$$

então $Alt(T) = 0$.

$\boxed{\text{Denotamos por } \mathcal{I}^k(V) \text{ o espaço gerado por redundantes.}}$

Proposição

Dado $T \in L^k(V)$ *então* $T^\sigma = (-1)^\sigma T + S$ *onde* $S \in \mathcal{I}^k(V)$.

Varifique caso $T = l_1 \otimes l_1$ calculando $T^{\sigma} - (-1)^{\sigma} T^{\sigma}$

Varifique caso $T = l_1 \otimes l_1$ calculando $T^\sigma - (-1)^\sigma T^\sigma$

Caso especial σ é transposição elementar,

$T_1 = l_1 \cdots \otimes l_{i-1}, T_2 = l_{i+2} \cdots \otimes l_k$

Varifique caso $T = l_1 \otimes l_1$ calculando $T^\sigma - (-1)^\sigma T^\sigma$

Caso especial σ é transposição elementar,

$T_1 = l_1 \cdots \otimes l_{i-1}, T_2 = l_{i+2} \cdots \otimes l_k$

$T - (-1)^\sigma T = T_1 \otimes (l_i \otimes l_{i+1} + l_{i+1} \otimes l_i) \otimes T_2 \in \mathcal{I}^k(V)$

Varifique caso $T = l_1 \otimes l_1$ calculando $T^\sigma - (-1)^\sigma T^\sigma$

Caso especial σ é transposição elementar,

$T_1 = l_1 \cdots \otimes l_{i-1}$, $T_2 = l_{i+2} \cdots \otimes l_k$

$T - (-1)^\sigma T = T_1 \otimes (l_i \otimes l_{i+1} + l_{i+1} \otimes l_i) \otimes T_2 \in \mathcal{I}^k(V)$

Agora por indução: $\sigma = \tau\beta$ onde β é produto de transposições.

$$T^\sigma = (T^\beta)^\tau = (-1)^\tau T^\beta + \mathcal{I}^k(V) = ...$$

Varifique caso $T = l_1 \otimes l_1$ calculando $T^\sigma - (-1)^\sigma T^\sigma$

Caso especial σ é transposição elementar,

$T_1 = l_1 \cdots \otimes l_{i-1}, T_2 = l_{i+2} \cdots \otimes l_k$

$T - (-1)^\sigma T = T_1 \otimes (l_i \otimes l_{i+1} + l_{i+1} \otimes l_i) \otimes T_2 \in \mathcal{I}^k(V)$

Agora por indução: $\sigma = \tau\beta$ onde β é produto de transposições.

$$T^\sigma = (T^\beta)^\tau = (-1)^\tau T^\beta + \mathcal{I}^k(V) = ...$$

Agora uma conta simples: $Alt(T) = k!T + \mathcal{I}^k(V)$

Teorema

Dado $T \in L^k(V)$ *existe única forma de escrever* $T = T_1 + T_2$*,* $T_1 \in A^k(V)$, $T_2 \in \mathcal{I}^k(V)$.

Neste momento agora basta provar que é única. Se $T_1 + T_2 = 0$ então $Alt(T_1 + T_2) = k!T_1 = 0$ e portanto $T_1 = 0$ então $T_2 = 0$.

Teorema

Dado $T \in L^k(V)$ *existe única forma de escrever* $T = T_1 + T_2$, $T_1 \in A^k(V)$, $T_2 \in \mathcal{I}^k(V)$.

Neste momento agora basta provar que é única. Se $T_1 + T_2 = 0$ então $Alt(T_1 + T_2) = k!T_1 = 0$ e portanto $T_1 = 0$ então $T_2 = 0$.

Definição

$\Lambda^k(V^*) := L^k(V)/\mathcal{I}^k(V)$

De fato podemos mostrar que $\pi : L^k(V) \to \Lambda^k(V^*)$ transforma isomorficamente $A^k(V)$ em $\Lambda^k(V^*)$.

Wedge Product, Produto Exterior

Definição

Sejam $\omega_i \in \Lambda^{k_i}(V^*), i = 1, 2$. *Se* $\omega_i = \pi(T_i)$ *definimos*

$\omega_1 \wedge \omega_2 = \pi(T_1 \otimes T_2) \in \Lambda^{k_1+k_2}(V^*)$

Observação: Bem definida! Pois se $\pi(T_1) = \pi(T_1') = \omega_1$

- $T_1' = T_1 + W, W \in \mathcal{I}^{k_1}(V)$

$T_1' \otimes T_2 = T_1 \otimes T_2 + W_1 \otimes T_2$

Observe que $W \otimes T_2 \in \mathcal{I}^{k_1+k_2}(V)$.

Propriedades básicas:

- $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$
- $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_2 \wedge \omega_3$
- $\lambda(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\lambda\omega_1) \wedge \omega_2$
- $I_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge I_{\sigma(k)} = (-1)^{\sigma} I_1 \wedge \cdots \wedge I_k$

Propriedades básicas:

- $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$
- $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_2 \wedge \omega_3$
- $\lambda(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\lambda\omega_1) \wedge \omega_2$
- $l_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge l_{\sigma(k)} = (-1)^\sigma l_1 \wedge \cdots \wedge l_k$

Por efeito: $T^\sigma = (-1)^\sigma T + W$ e $\pi(T^\sigma) = (-1)^\sigma \pi(T)$

Observe que $\pi(l_1 \otimes \cdots \otimes l_k) = l_1 \wedge \cdots \wedge l_k$

Propriedades básicas:

- $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$
- $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_2 \wedge \omega_3$
- $\lambda(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\lambda\omega_1) \wedge \omega_2$
- $l_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge l_{\sigma(k)} = (-1)^{\sigma} l_1 \wedge \cdots \wedge l_k$

Por efeito: $T^{\sigma} = (-1)^{\sigma} T + W$ e $\pi(T^{\sigma}) = (-1)^{\sigma}\pi(T)$

Observe que $\pi(l_1 \otimes \cdots \otimes l_k) = l_1 \wedge \cdots \wedge l_k$ Casos particulares:

$l_1 \wedge l_2 = -l_2 \wedge l_1$

Teorema

$$\omega_1 \in \Lambda^r, \omega_2 \in \Lambda^2 \implies \omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{rs} \omega_2 \wedge \omega_1$$

Prova para decomponíveis!

Teorema

$$\omega_1 \in \Lambda^r, \omega_2 \in \Lambda^2 \implies \omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{rs} \omega_2 \wedge \omega_1$$

Prova para decomponíveis!

Corolários:

- $r = 2k + 1$ e $\omega \in \Lambda^r$ então $\omega^k = 0, k > 1$.
- ω decomponível então $\omega^k = 0 . k > 1$.

Teorema

$$\omega_1 \in \Lambda^r, \omega_2 \in \Lambda^2 \implies \omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{rs} \omega_2 \wedge \omega_1$$

Prova para decomponíveis!

Corolários:

- $r = 2k + 1$ e $\omega \in \Lambda^r$ então $\omega^k = 0, k > 1$.
- ω decomponível então $\omega^k = 0 . k > 1$. Observe que em geral $\omega \wedge \omega = 0$ é falso. $\omega = dx \wedge dy + dz \wedge dt$

Produto interior (não interno), contração

Definição

$v \in V$ e $T \in L^k(V)$ então $\iota_v T \in L^{k-1}(V)$ definido como:

$$\iota_v T(v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}) = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} T(v_1, \cdots, v_{r-1}, v, v_r, \cdots, v_{k-1})$$

Observe que se $T \in A^k(V)$ então

$$\iota_v T(v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}) = kT(v, v_1, \cdots, v_{k-1}).$$

Produto interior (não interno), contração

Definição

$v \in V$ e $T \in L^k(V)$ então $\iota_v T \in L^{k-1}(V)$ definido como:

$$\iota_v T(v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}) = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} T(v_1, \cdots, v_{r-1}, v, v_r, \cdots, v_{k-1})$$

Observe que se $T \in A^k(V)$ então

$\iota_v T(v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}) = kT(v, v_1, \cdots, v_{k-1})$.

Propriedades básicas:

- $\iota_{v_1+v_2}T = \iota_{v_1}T + \iota_{v_2}T$, $\iota_v(T_1 + T_2) = \iota_v T_1 + \iota_v T_2$
- $T \in L^k$, $T = l_1 \otimes \cdots \otimes l_k$ então $\iota_v T = \sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1} l_r(v) l_1 \otimes \cdots \hat{l}_r \otimes \cdots \otimes l_k$
- (Leibniz) se $T_1 \in L^p$, $T_2 \in L^q$ então

$$\iota_v(T_1 \otimes T_2) = \iota_v T_1 \otimes T_2 + (-1)^p T_1 \otimes \iota_v T_2$$

Basta fazer para decomponíveis como ι_v é linear.

Teorema

$\iota_v(\iota_v T) = 0$. *Consequentemente* $\iota_{v_1}\iota_{v_2} = -\iota_{v_2}\iota_{v_1}$

Teorema

$\iota_v(\iota_v T) = 0$. *Consequentemente* $\iota_{v_1}\iota_{v_2} = -\iota_{v_2}\iota_{v_1}$

Pela linearidade vamos provar para decomponiveis. $l_1 \otimes \cdots \otimes l_k$ e vamos provar pela indução:

Teorema

$\iota_v(\iota_v T) = 0$. *Consequentemente* $\iota_{v_1}\iota_{v_2} = -\iota_{v_2}\iota_{v_1}$

Pela linearidade vamos provar para decomponiveis. $l_1 \otimes \cdots \otimes l_k$ e vamos provar pela indução: $l := l_k, T := l_1 \otimes \cdots \otimes l_{k-1}$

$\iota_v(l_1 \otimes \cdots \otimes l_k) = \iota_v(T \otimes l)$ Usando Leibniz

$\iota_v\iota_v(T \otimes l) = (\iota_v\iota_v T) \otimes l + (-1)^{k-2} l(v)\iota_v T + (-1)^{k-1} l(v)\iota_v T = 0$

Agora vamos definir $\iota_v : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-1}(V^*)$

Agora vamos definir $\iota_v : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-1}(V^*)$ De fato provamos que se $T \in \mathcal{I}^k$ então $\iota_v \in \mathcal{I}^{k-1}$:

Agora vamos definir $\iota_v : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-1}(V^*)$ De fato provamos que se $T \in \mathcal{I}^k$ então $\iota_v \in \mathcal{I}^{k-1}$:

$T = T_1 \otimes l \otimes l \otimes T_2$ usando que $\iota_v l \otimes l = l(v)l - l(v)l = 0$ e aplicar Leibniz temos que $\iota_v T \in \mathcal{I}^{k-1}$ pois é soma de redundantantes.

Agora vamos definir $\iota_v : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-1}(V^*)$ De fato provamos que se $T \in \mathcal{I}^k$ então $\iota_v \in \mathcal{I}^{k-1}$:

$T = T_1 \otimes l \otimes l \otimes T_2$ usando que $\iota_v l \otimes l = l(v)l - l(v)l = 0$ e aplicar Leibniz temos que $\iota_v T \in \mathcal{I}^{k-1}$ pois é soma de redundantantes.

Assim definimos

$$\iota_v \omega := \pi(\iota_v T), \omega = \pi(T).$$

Praticidades:

Sejam e_i base e e_i^* base dual e $\omega_I = e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*, 1 \leq i_1 < \cdots < i_k$

Praticidades:

Sejam e_i base e e_i^* base dual e $\omega_I = e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*, 1 \leq i_1 < \cdots < i_k$

$\iota_{e_j} e_I = 0, j \notin I$, e se $j = i_r, \iota_{e_j} \omega_I = (-1)^{r-1} e_{I_r}$

Pullback em $\Lambda^k(V^*)$

Pullback em $\Lambda^k(V^*)$

$A : V \to W$ linear e $T \in L^k(W)$ então $A^*T \in L^k(V)$

$$A^*T(v_1, \cdots, v_k) = T(A(v_1), \cdots, A(v_k))$$

Lemma

$T \in \mathcal{I}^k(W)$ então $A^*T \in \mathcal{I}^k(V)$.

Pullback em $\Lambda^k(V^*)$

$A : V \to W$ linear e $T \in L^k(W)$ então $A^*T \in L^k(V)$

$$A^*T(v_1, \cdots, v_k) = T(A(v_1), \cdots, A(v_k))$$

Lemma

$T \in \mathcal{I}^k(W)$ então $A^*T \in \mathcal{I}^k(V)$.

Verifique para redundantes e definição.

Pullback em $\Lambda^k(V^*)$

$A : V \to W$ linear e $T \in L^k(W)$ então $A^*T \in L^k(V)$

$$A^*T(v_1, \cdots, v_k) = T(A(v_1), \cdots, A(v_k))$$

Lemma

$T \in \mathcal{I}^k(W)$ então $A^*T \in \mathcal{I}^k(V)$.

Verifique para redundantes e definição. Portanto podemos definir $A^*\omega := \pi(A^*T)$ se $\omega = \pi(T)$.

Pullback em $\Lambda^k(V^*)$

$A : V \to W$ linear e $T \in L^k(W)$ então $A^*T \in L^k(V)$

$$A^*T(v_1, \cdots, v_k) = T(A(v_1), \cdots, A(v_k))$$

Lemma

$T \in \mathcal{I}^k(W)$ então $A^*T \in \mathcal{I}^k(V)$.

Verifique para redundantes e definição. Portanto podemos definir $A^*\omega := \pi(A^*T)$ se $\omega = \pi(T)$.

Proposição

A^* é linear e

- *$\omega_i \in \Lambda^{k_i}(W^*)$ então $A^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = A^*(\omega_1) \wedge A^*(\omega_2)$*

Pullback em $\Lambda^k(V^*)$

$A : V \to W$ linear e $T \in L^k(W)$ então $A^*T \in L^k(V)$

$$A^*T(v_1, \cdots, v_k) = T(A(v_1), \cdots, A(v_k))$$

Lemma

$T \in \mathcal{I}^k(W)$ então $A^*T \in \mathcal{I}^k(V)$.

Verifique para redundantes e definição. Portanto podemos definir $A^*\omega := \pi(A^*T)$ se $\omega = \pi(T)$.

Proposição

A^* é linear e

- $\omega_i \in \Lambda^{k_i}(W^*)$ *então* $A^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = A^*(\omega_1) \wedge A^*(\omega_2)$
- $B^*A^*\omega = (AB)^*\omega$

Determinantes de uma aplicação linear

Observe que $dim(\Lambda^n(V^*)) = 1$. Então

$$A^*\omega = det(A)\omega, \omega \in \Lambda^n(V^*).$$

Segue $det(AB) = det(A)det(B)$.

Determinantes de uma aplicação linear

Observe que $dim(\Lambda^n(V^*)) = 1$. Então

$$A^*\omega = det(A)\omega, \omega \in \Lambda^n(V^*).$$

Segue $det(AB) = det(A)det(B)$.

Fancy corolário: Se $A : V \to V$ não é sobrejetora então $det(A) = 0$. Observe que $Im(A) = W, dim(W) < n$ e portanto $\Lambda^n(W^*) = 0$. Escreva $A = i_W B$

Orientação

Definimos orientação em $\Lambda^n(V^*)$ e dizemos $\{e_i\}$ tem orientação positiva se $\wedge e_i^*$ está na componente positiva.

Orientação

Definimos orientação em $\Lambda^n(V^*)$ e dizemos $\{e_i\}$ tem orientação positiva se $\wedge e_i^*$ está na componente positiva.

Se $\{e_i\}$ é positivamente orientada e $\{f_i\}$ tal que $e_j = \sum a_{ij} f_j$ $(A(f_i) = e_i,)$

$$f_1^* \wedge \cdots \wedge f_n^* = det[a_{ij}] e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$$

Orientação

Definimos orientação em $\Lambda^n(V^*)$ e dizemos $\{e_i\}$ tem orientação positiva se $\wedge e_i^*$ está na componente positiva.
Se $\{e_i\}$ é positivamente orientada e $\{f_i\}$ tal que $e_j = \sum a_{ij} f_j$ $(A(f_i) = e_i,)$

$$f_1^* \wedge \cdots \wedge f_n^* = det[a_{ij}] e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$$

Se $W < V$, então dada uma orientação em V e V/W temos uma orientação em W.

Orientação

Definimos orientação em $\Lambda^n(V^*)$ e dizemos $\{e_i\}$ tem orientação positiva se $\wedge e_i^*$ está na componente positiva.

Se $\{e_i\}$ é positivamente orientada e $\{f_i\}$ tal que $e_j = \sum a_{ij} f_j$ $(A(f_i) = e_i,)$

$$f_1^* \wedge \cdots \wedge f_n^* = det[a_{ij}] e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$$

Se $W < V$, então dada uma orientação em V e V/W temos uma orientação em W. Toma uma base positiva $\{e_i\}$ tal que $\pi(e_i), i = 1, \cdots, r$ é base positiva para V/W.

Orientação

Definimos orientação em $\Lambda^n(V^*)$ e dizemos $\{e_i\}$ tem orientação positiva se $\wedge e_i^*$ está na componente positiva.

Se $\{e_i\}$ é positivamente orientada e $\{f_i\}$ tal que $e_j = \sum a_{ij} f_j$ $(A(f_i) = e_i,)$

$$f_1^* \wedge \cdots \wedge f_n^* = det[a_{ij}] e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$$

Se $W < V$, então dada uma orientação em V e V/W temos uma orientação em W. Toma uma base positiva $\{e_i\}$ tal que $\pi(e_i), i = 1, \cdots, r$ é base positiva para V/W. Declare: $e_{r+1}, \cdots, e_n$ positiva para W e verificar que a positividade não depende da escolha das bases.