Em forma?

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

2^o **Semestre de 2022**

Produto interno num espaço vetorial:

$$B : V \times V \to \mathbb{R}$$

satisfazendo:

Produto interno num espaço vetorial:

$$B : V \times V \to \mathbb{R}$$

satisfazendo:

- bilinearidade ou 2-linear

Produto interno num espaço vetorial:

$$B : V \times V \to \mathbb{R}$$

satisfazendo:

- bilinearidade ou 2-linear
- Simetria: $B(v, w) = B(w, v)$

Produto interno num espaço vetorial:

$$B : V \times V \to \mathbb{R}$$

satisfazendo:

- bilinearidade ou 2-linear
- Simetria: $B(v, w) = B(w, v)$
- Positivo, $B(v, v) \geq 0$ e $B(v, v) > 0, v \neq 0$

Produto interno num espaço vetorial:

$$B : V \times V \to \mathbb{R}$$

satisfazendo:

- bilinearidade ou 2-linear
- Simetria: $B(v, w) = B(w, v)$
- Positivo, $B(v, v) \geq 0$ e $B(v, v) > 0, v \neq 0$

Definição

(Espaço Quociente) $W < V$ *então* V/W *é o conjunto das classes de equivalências, ou* $v + W := \{v + w : w \in W\}$.

Definição

(Espaço Quociente) $W < V$ *então* V/W *é o conjunto das classes de equivalências, ou* $v + W := \{v + w : w \in W\}$.

Projeção natural: $\pi : V \to V/W, \pi(v) := v + W = [v]$

Definição

(Espaço Quociente) $W < V$ *então* V/W *é o conjunto das classes de equivalências, ou* $v + W := \{v + w : w \in W\}$.

Projeção natural: $\pi : V \to V/W, \pi(v) := v + W = [v]$

As dimensões podem ser infinita. Porém caso finito:

$$dim(V/W) = dim(V) - dim(W).$$

Definição

(Espaço Quociente) $W < V$ *então* V/W *é o conjunto das classes de equivalências, ou* $v + W := \{v + w : w \in W\}$.

Projeção natural: $\pi : V \to V/W, \pi(v) := v + W = [v]$

As dimensões podem ser infinita. Porém caso finito:

$$dim(V/W) = dim(V) - dim(W).$$

Importante: Se $A : V \to U$ linear , $W \subset Ker(A)$, existe única linear $B : V/W \to U$ tal que $A = B \circ \pi$. Quando $W = Ker(A)$ então B é injetora.

Definição

(Espaço dual) V espaço vetorial, V^* espaço de todas as transf. lineares $l : V \to \mathbb{R}$.

Espaço Dual

Definição

(Espaço dual) V espaço vetorial, V^* espaço de todas as transf. lineares $l : V \to \mathbb{R}$.

Fato: Se $dim(V) = n, \{e_i, i = 1, \cdots, n\}$ uma base, então $\{e_i^*\}$ é uma base de espaço dual.

Definição

(Espaço dual) V espaço vetorial, V^* espaço de todas as transf. lineares $l : V \to \mathbb{R}$.

Fato: Se $dim(V) = n, \{e_i, i = 1, \cdots, n\}$ uma base, então $\{e_i^*\}$ é uma base de espaço dual.

Definição

(Transposta) Seja $A : V \to W$ linear então $A^* : W^* \to V^*$

$$A^*(l) = l \circ A.$$

Definição

(Espaço dual) V espaço vetorial, V^* espaço de todas as transf. lineares $l : V \to \mathbb{R}$.

Fato: Se $dim(V) = n, \{e_i, i = 1, \cdots, n\}$ uma base, então $\{e_i^*\}$ é uma base de espaço dual.

Definição

(Transposta) Seja $A : V \to W$ linear então $A^* : W^* \to V^*$

$$A^*(l) = l \circ A.$$

Advinha descrição matricial da transposta de A!

Espaço bi-dual $(V^*)^*$

Dado $v \in V$ defina (transformação linear, pq?) $ev_v : V^* \to \mathbb{R}$,

$ev_v(l) := l(v)$.

Espaço bi-dual $(V^*)^*$

Dado $v \in V$ defina (transformação linear, pq?) $ev_v : V^* \to \mathbb{R}$,

$ev_v(l) := l(v)$.

Defina $ev : V \to (V^*)^*, v \to ev_v$

Espaço bi-dual $(V^*)^*$

Dado $v \in V$ defina (transformação linear, pq?) $ev_v : V^* \to \mathbb{R}$, $ev_v(l) := l(v)$.

Defina $ev : V \to (V^*)^*, v \to ev_v$

Se $dim(V) < \infty$ então ev é bijeção e isso define uma identificação natural.

Espaço bi-dual $(V^*)^*$

Dado $v \in V$ defina (transformação linear, pq?) $ev_v : V^* \to \mathbb{R}$, $ev_v(l) := l(v)$.

Defina $ev : V \to (V^*)^*, v \to ev_v$

Se $dim(V) < \infty$ então ev é bijeção e isso define uma identificação natural.

Definição

Aniquilador (ortogonal) $W < V$ *então*

$W^{\perp} := \{l \in V^* : l(w) = 0, \forall w \in W\}$

Mostre que $dim(W^{\perp}) = dim(V) - dim(W)$.

Definição

Aniquilador (ortogonal) $W < V$ *então*

$W^{\perp} := \{l \in V^* : l(w) = 0, \forall w \in W\}$

Mostre que $dim(W^{\perp}) = dim(V) - dim(W)$.

$i : W^{\perp} \to V^*$ inclusão e toma $i^* : (V^*)^* \to (W^{\perp})^*$

Agora faz composição com ev, i.e, $i^* \circ ev : V \to (W^{\perp})^*$

Definição

Aniquilador (ortogonal) $W < V$ *então*

$W^{\perp} := \{l \in V^* : l(w) = 0, \forall w \in W\}$

Mostre que $dim(W^{\perp}) = dim(V) - dim(W)$.

$i : W^{\perp} \to V^*$ inclusão e toma $i^* : (V^*)^* \to (W^{\perp})^*$

Agora faz composição com ev, i.e, $i^* \circ ev : V \to (W^{\perp})^*$

Mostrar que é sobrejetora com núcleo igual a W. Então existe

$$\nu : V/W \to (W^{\perp})^*$$

tal que $\nu \circ \pi = i^* \circ ev$.

New class

Tensores ou transformações multilineares

$T : V^k \to \mathbb{R}$ linear em todas as coordenadas é chamada de $k-$tensor ou $k-$linear.

New class

Tensores ou transformações multilineares

$T : V^k \to \mathbb{R}$ linear em todas as coordenadas é chamada de $k-$tensor ou $k-$linear.

Definição

Multi-índice de tamanho k: $I = (i_1, \cdots, i_k), 1 \leq i_j \leq n$.

Claro que temos n^k múlti-indice de tamanho k.

Definição

Produto tensorial: $T_1 \in L^k(V)$ e $T_2 \in L^s(V)$ sejam $k-$tensor e $l-$tensor então $T_1 \otimes T_2$ é $k + l$ tensor.

New class

Tensores ou transformações multilineares

$T : V^k \to \mathbb{R}$ linear em todas as coordenadas é chamada de $k-$tensor ou $k-$linear.

Definição

Multi-índice de tamanho k: $I = (i_1, \cdots, i_k), 1 \leq i_j \leq n$.

Claro que temos n^k múlti-indice de tamanho k.

Definição

Produto tensorial: $T_1 \in L^k(V)$ *e* $T_2 \in L^s(V)$ *sejam* $k-$*tensor e* $l-$*tensor então* $T_1 \otimes T_2$ *é* $k+l$ *tensor.*

Tensores decomponíveis: $T = l_1 \otimes \cdots \otimes l_k$ é $k-$tensor onde $l_i \in V^*$.

Tensores decomponíveis: $T = l_1 \otimes \cdots \otimes l_k$ é $k-$tensor onde $l_i \in V^*$.

Seja $\{e_i\}$ base de V então dado um múlti-indice $I = (i_1, \cdots, i_k)$ temos $e_I^* = \bigotimes_{j=1}^k e_{i_j}^*$

Tensores decomponíveis: $T = l_1 \otimes \cdots \otimes l_k$ é $k-$tensor onde

$l_i \in V^*$.

Seja $\{e_i\}$ base de V então dado um múlti-indice $I = (i_1, \cdots, i_k)$

temos $e_I^* = \bigotimes_{j=1}^{k} e_{i_j}^*$

Mostrar que $\{e_I^*\}$ forma uma base e portanto $dim(L^k(V)) = n^k$.

Pullback

Definição

$A : V \to W$ *linear então se* $T \in L^k(W)$ *definimos*

$$A^*T(v_1, \cdots, v_k) := T(Av_1, \cdots Av_k)$$

$$A^*T \in L^k(V)$$

Pullback

Definição

$A : V \to W$ *linear então se* $T \in L^k(W)$ *definimos*

$$A^*T(v_1, \cdots, v_k) := T(Av_1, \cdots Av_k)$$

$$A^*T \in L^k(V)$$

$\boxed{\text{Proposição: } A^* : L^k(W) \to L^k(V) \text{ é linear.}}$

Pullback

Definição

$A : V \to W$ *linear então se* $T \in L^k(W)$ *definimos*

$A^*T(v_1, \cdots, v_k) := T(Av_1, \cdots Av_k)$

$A^*T \in L^k(V)$

$\boxed{\text{Proposição: } A^* : L^k(W) \to L^k(V) \text{ é linear.}}$

$\boxed{A : V \to W, B : U \to V \text{ então } (AB)^*T = B^*(A^*T)}$

$k-$tensores alternados (motivação determinantes)

Permutação, grupo de simetrias S_k

Lemma

O grupo S_k tem $k!$ elementos.

Definição de Transposições τ_{ij} e transposições elementares

$k-$tensores alternados (motivação determinantes)

Permutação, grupo de simetrias S_k

Lemma

O grupo S_k tem $k!$ elementos.

Definição de Transposições τ_{ij} e transposições elementares

Teorema

Qualquer permutação é composição de transposições que por sua vez é combinação de transposições elementares.

Demonstração por indução! $\tau_{ij} = \tau_{j-1,j}\tau_{i,j-1}\tau_{i-1,j}$

Sinal de uma permutação

$$\boxed{(-1)^{\sigma} := \prod_{i<j} \frac{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}}{x_i - x_j}}$$

Sinal de uma permutação

$$\boxed{(-1)^\sigma := \prod_{i<j} \frac{x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(j)}}{x_i-x_j}}$$

sinal é um homomorfismo de grupo entre S_k (não abeliano) e $\{-1, 1\}$

Sinal de uma permutação

$$\boxed{(-1)^\sigma := \prod_{i<j} \frac{x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(j)}}{x_i-x_j}}$$

$\boxed{\text{sinal é um homomorfismo de grupo entre } S_k \text{ (não abeliano) e } \{-1,1\}}$

$$\prod_{i<j} \frac{x_{\sigma\tau(i)}-x_{\sigma\tau(j)}}{x_i-x_j} = \prod_{i<j} \frac{x_{\sigma\tau(i)}-x_{\sigma\tau(j)}}{x_{\tau(i)}-x_{\tau(j)}} \cdot \prod_{i<j} \frac{x_{\tau(i)}-x_{\tau(j)}}{x_i-x_j}$$

Sinal de uma permutação

$$\boxed{(-1)^\sigma := \prod_{i<j} \frac{x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(j)}}{x_i-x_j}}$$

$\boxed{\text{sinal é um homomorfismo de grupo entre } S_k \text{ (não abeliano) e } \{-1,1\}}$

$$\prod_{i<j} \frac{x_{\sigma\tau(i)}-x_{\sigma\tau(j)}}{x_i-x_j} = \prod_{i<j} \frac{x_{\sigma\tau(i)}-x_{\sigma\tau(j)}}{x_{\tau(i)}-x_{\tau(j)}} \cdot \prod_{i<j} \frac{x_{\tau(i)}-x_{\tau(j)}}{x_i-x_j}$$

A partir disto e que transposição sempre tem sinal -1 podemos concluir que o sinal de uma permutação é -1 elevado ao número de transposições que a compõem!

Definição

$T \in L^k(V)$ *é* $k-$*tensor e* $\sigma \in S_k$ *então*

$T^\sigma(v_1, \cdots, v_k) = T(v_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, v_{\sigma^{-1}(k)})$ *para toda* $\sigma \in S_k$.

Definição

$T \in L^k(V)$ é $k-$tensor e $\sigma \in S_k$ então

$T^\sigma(v_1, \cdots, v_k) = T(v_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, v_{\sigma^{-1}(k)})$ para toda $\sigma \in S_k$.

Definição

$T \in L^k(V)$ é $k-$tensor ou $k-$forma alternada se $T^\sigma = (-1)^\sigma T$

para toda $\sigma \in S_k$.

Definição

$T \in L^k(V)$ *é* $k-$*tensor e* $\sigma \in S_k$ *então*

$T^\sigma(v_1, \cdots, v_k) = T(v_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, v_{\sigma^{-1}(k)})$ *para toda* $\sigma \in S_k$.

Definição

$T \in L^k(V)$ *é* $k-$*tensor ou* $k-$*forma alternada se* $T^\sigma = (-1)^\sigma T$ *para toda* $\sigma \in S_k$.

Exercício: Se $T = l_1 \otimes l_2 \cdots \otimes l_k, l_i \in V^*$ então

$T^\sigma = l_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes l_{\sigma(k)}$

Proposição: $T \to T^{\sigma}$ é uma transformação linear de $L^k(V)$ e $\sigma, \tau \in S_k$ então $T^{\sigma\tau} = (T^{\sigma})^{\tau}$

Definição

Operação de Alternação: $T \in L^k(V)$ *definimos*

$Alt(T) := \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\sigma} T^{\sigma}$

Proposição: $T \to T^{\sigma}$ é uma transformação linear de $L^k(V)$ e $\sigma, \tau \in S_k$ então $T^{\sigma\tau} = (T^{\sigma})^{\tau}$

Definição

Operação de Alternação: $T \in L^k(V)$ *definimos*

$Alt(T) := \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\sigma} T^{\sigma}$

Proposição

- $Alt(T)^{\sigma} = (-1)^{\sigma} Alt(T)$, $Alt(T^{\sigma}) = Alt(T^{\sigma})$

Proposição: $T \to T^{\sigma}$ é uma transformação linear de $L^k(V)$ e $\sigma, \tau \in S_k$ então $T^{\sigma\tau} = (T^{\sigma})^{\tau}$

Definição

Operação de Alternação: $T \in L^k(V)$ *definimos*

$Alt(T) := \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\sigma} T^{\sigma}$

Proposição

- $Alt(T)^{\sigma} = (-1)^{\sigma} Alt(T)$, $Alt(T^{\sigma}) = Alt(T^{\sigma})$
- $T \in A^k(V)$ *então* $Alt(T) = k!T$

Proposição: $T \to T^\sigma$ é uma transformação linear de $L^k(V)$ e $\sigma, \tau \in S_k$ então $T^{\sigma\tau} = (T^\sigma)^\tau$

Definição

Operação de Alternação: $T \in L^k(V)$ *definimos* $Alt(T) := \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma T^\sigma$

Proposição

- $Alt(T)^\sigma = (-1)^\sigma Alt(T)$, $Alt(T^\sigma) = Alt(T^\sigma)$
- $T \in A^k(V)$ *então* $Alt(T) = k! T$
- $Alt : L^k(V) \to A^k(V) < L^k(V)$ *é linear.*

Calcular dimensão de $A^k(V)$

Definição

Dado multi-indice $I = (i_1, \cdots, i_k)$

- I *é estritamente crescente se* $i_1 < \cdots < i_k$
- $\sigma \in S_k$ *então* $I^\sigma := (i_{\sigma(1)}, \cdots, i_{\sigma(k)})$

$e_I^* = e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^*$ e $\phi_I := Alt(e_I^*)$.

Proposição

- $\phi_{I^\sigma} = (-1)^\sigma \phi_I$

Proposição

- $\phi_{I^\sigma} = (-1)^\sigma \phi_I$
- *Se I tem repetição então* $\phi_I = 0$.

Proposição

- $\phi_{I^\sigma} = (-1)^\sigma \phi_I$
- *Se I tem repetição então* $\phi_I = 0$.
- *Se I, J são estritamente crescentes* $\phi_I(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}) = \delta_{I,J}$

Proposição

- $\phi_{I^\sigma} = (-1)^\sigma \phi_I$
- *Se I tem repetição então* $\phi_I = 0$.
- *Se I, J são estritamente crescentes* $\phi_I(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}) = \delta_{I,J}$

2. Toma uma transposição e $\phi_I = \phi_{I^\tau} = (-1)^\tau \phi_I = \phi_I$.
3. $\phi_I(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}) = \sum (-1)^\tau e^*_{I^\tau}(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k})$

Afirmação: Toda $T \in A^k(V)$ se escreve de uma maneira única como

$$\sum_I c_I \phi_I$$

onde I é estritamente crescente. Basta pegar $T = \sum a_J e_J^*$ e tomar Alt.

Além disto $c_J = T(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k})$ e assim ϕ_I forma uma base.

$$dim(A^k(V)) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$