

Em forma?

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

2º Semestre de 2022

Produto interno num espaço vetorial:

$$B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfazendo:

Produto interno num espaço vetorial:

$$B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfazendo:

- ▶ bilinearidade ou 2-linear

Produto interno num espaço vetorial:

$$B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfazendo:

- ▶ bilinearidade ou 2-linear
- ▶ Simetria: $B(v, w) = B(w, v)$

Produto interno num espaço vetorial:

$$B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfazendo:

- ▶ bilinearidade ou 2-linear
- ▶ Simetria: $B(v, w) = B(w, v)$
- ▶ Positivo, $B(v, v) \geq 0$ e $B(v, v) > 0, v \neq 0$

Produto interno num espaço vetorial:

$$B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfazendo:

- ▶ bilinearidade ou 2-linear
- ▶ Simetria: $B(v, w) = B(w, v)$
- ▶ Positivo, $B(v, v) \geq 0$ e $B(v, v) > 0, v \neq 0$

Definição

(Espaço Quociente) $W < V$ então V/W é o conjunto das classes de equivalências, ou $v + W := \{v + w : w \in W\}$.

Definição

(Espaço Quociente) $W < V$ então V/W é o conjunto das classes de equivalências, ou $v + W := \{v + w : w \in W\}$.

Projeção natural: $\pi : V \rightarrow V/W, \pi(v) := v + W = [v]$

Definição

(Espaço Quociente) $W < V$ então V/W é o conjunto das classes de equivalências, ou $v + W := \{v + w : w \in W\}$.

Projeção natural: $\pi : V \rightarrow V/W, \pi(v) := v + W = [v]$

As dimensões podem ser infinita. Porém caso finito:

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W).$$

Definição

(Espaço Quociente) $W < V$ então V/W é o conjunto das classes de equivalências, ou $v + W := \{v + w : w \in W\}$.

Projeção natural: $\pi : V \rightarrow V/W, \pi(v) := v + W = [v]$

As dimensões podem ser infinita. Porém caso finito:

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W).$$

Importante: Se $A : V \rightarrow U$ linear , $W \subset \text{Ker}(A)$, existe única linear $B : V/W \rightarrow U$ tal que $A = B \circ \pi$. Quando $W = \text{Ker}(A)$ então B é injetora.

Espaço Dual

Definição

(*Espaço dual*) V espaço vetorial, V^* espaço de todas as transf. lineares $l : V \rightarrow \mathbb{R}$.

Espaço Dual

Definição

(*Espaço dual*) V espaço vetorial, V^* espaço de todas as transf. lineares $l : V \rightarrow \mathbb{R}$.

Fato: Se $\dim(V) = n$, $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ uma base, então $\{e_i^*\}$ é uma base de espaço dual.

Espaço Dual

Definição

(*Espaço dual*) V espaço vetorial, V^* espaço de todas as transf. lineares $l : V \rightarrow \mathbb{R}$.

Fato: Se $\dim(V) = n$, $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ uma base, então $\{e_i^*\}$ é uma base de espaço dual.

Definição

(*Transposta*) Seja $A : V \rightarrow W$ linear então $A^* : W^* \rightarrow V^*$

$$A^*(l) = l \circ A.$$

Espaço Dual

Definição

(Espaço dual) V espaço vetorial, V^* espaço de todas as transf. lineares $l : V \rightarrow \mathbb{R}$.

Fato: Se $\dim(V) = n$, $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ uma base, então $\{e_i^*\}$ é uma base de espaço dual.

Definição

(Transposta) Seja $A : V \rightarrow W$ linear então $A^* : W^* \rightarrow V^*$

$$A^*(l) = l \circ A.$$

Advinha descrição matricial da transposta de A !

Espaço bi-dual $(V^*)^*$

Dado $v \in V$ defina (transformação linear, pq?) $ev_v : V^* \rightarrow \mathbb{R}$,
 $ev_v(l) := l(v)$.

Espaço bi-dual $(V^*)^*$

Dado $v \in V$ defina (transformação linear, pq?) $ev_v : V^* \rightarrow \mathbb{R}$,
 $ev_v(l) := l(v)$.

Defina $ev : V \rightarrow (V^*)^*$, $v \rightarrow ev_v$

Espaço bi-dual $(V^*)^*$

Dado $v \in V$ defina (transformação linear, pq?) $ev_v : V^* \rightarrow \mathbb{R}$,
 $ev_v(l) := l(v)$.

Defina $ev : V \rightarrow (V^*)^*$, $v \rightarrow ev_v$

Se $\dim(V) < \infty$ então ev é bijeção e isso define uma identificação natural.

Espaço bi-dual $(V^*)^*$

Dado $v \in V$ defina (transformação linear, pq?) $ev_v : V^* \rightarrow \mathbb{R}$,
 $ev_v(l) := l(v)$.

Defina $ev : V \rightarrow (V^*)^*$, $v \rightarrow ev_v$

Se $\dim(V) < \infty$ então ev é bijeção e isso define uma identificação natural.

Definição

Aniquilador (ortogonal) $W < V$ então

$$W^\perp := \{I \in V^* : I(w) = 0, \forall w \in W\}$$

Mostre que $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W)$.

Definição

Aniquilador (ortogonal) $W < V$ então

$$W^\perp := \{I \in V^* : I(w) = 0, \forall w \in W\}$$

Mostre que $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W)$.

$i : W^\perp \rightarrow V^*$ inclusão e toma $i^* : (V^*)^* \rightarrow (W^\perp)^*$

Agora faz composição com ev , i.e, $i^* \circ ev : V \rightarrow (W^\perp)^*$

Definição

Aniquilador (ortogonal) $W < V$ então

$$W^\perp := \{l \in V^* : l(w) = 0, \forall w \in W\}$$

Mostre que $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W)$.

$i : W^\perp \rightarrow V^*$ inclusão e toma $i^* : (V^*)^* \rightarrow (W^\perp)^*$

Agora faz composição com ev , i.e, $i^* \circ ev : V \rightarrow (W^\perp)^*$

Mostrar que é sobrejetora com núcleo igual a W . Então existe

$$\nu : V/W \rightarrow (W^\perp)^*$$

tal que $\nu \circ \pi = i^* \circ ev$.

Tensores ou transformações multilineares

$T : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ linear em todas as coordenadas é chamada de k -tensor ou k -linear.

Tensores ou transformações multilineares

$T : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ linear em todas as coordenadas é chamada de k -tensor ou k -linear.

Definição

Multi-índice de tamanho k : $I = (i_1, \dots, i_k), 1 \leq i_j \leq n$.

Claro que temos n^k multi-índice de tamanho k .

Definição

Produto tensorial: $T_1 \in L^k(V)$ e $T_2 \in L^l(V)$ sejam k -tensor e l -tensor então $T_1 \otimes T_2$ é $k + l$ tensor.

Tensores ou transformações multilineares

$T : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ linear em todas as coordenadas é chamada de k -tensor ou k -linear.

Definição

Multi-índice de tamanho k : $I = (i_1, \dots, i_k), 1 \leq i_j \leq n$.

Claro que temos n^k multi-índice de tamanho k .

Definição

Produto tensorial: $T_1 \in L^k(V)$ e $T_2 \in L^l(V)$ sejam k -tensor e l -tensor então $T_1 \otimes T_2$ é $k + l$ tensor.

Tensores decomponíveis: $T = l_1 \otimes \cdots \otimes l_k$ é k -tensor onde $l_i \in V^*$.

Tensores decomponíveis: $T = l_1 \otimes \cdots \otimes l_k$ é k -tensor onde $l_i \in V^*$.

Seja $\{e_i\}$ base de V então dado um múlti-índice $I = (i_1, \dots, i_k)$ temos $e_I^* = \bigotimes_{j=1}^k e_{i_j}^*$

Tensores decomponíveis: $T = l_1 \otimes \cdots \otimes l_k$ é k -tensor onde $l_i \in V^*$.

Seja $\{e_i\}$ base de V então dado um múlti-índice $I = (i_1, \dots, i_k)$ temos $e_I^* = \bigotimes_{j=1}^k e_{i_j}^*$

Mostrar que $\{e_I^*\}$ forma uma base e portanto $\dim(L^k(V)) = n^k$.

Pullback

Definição

$A : V \rightarrow W$ linear então se $T \in L^k(W)$ definimos

$$A^*T(v_1, \dots, v_k) := T(Av_1, \dots, Av_k)$$

$$A^*T \in L^k(V)$$

Pullback

Definição

$A : V \rightarrow W$ linear então se $T \in L^k(W)$ definimos

$$A^*T(v_1, \dots, v_k) := T(Av_1, \dots, Av_k)$$

$$A^*T \in L^k(V)$$

Proposição: $A^* : L^k(W) \rightarrow L^k(V)$ é linear.