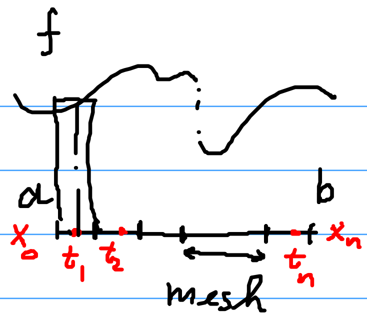
(Analise II),

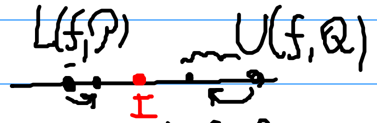


$\mathcal{P}$: Partição, $T = \{t_1, \dots, t_n\}$

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta x_i$$

$U(f, \mathcal{P})$ $\quad$ $L(f, \mathcal{P})$ $\quad$ $U(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \overset{f(t_i)}{M_i} \Delta x_i$ $\quad$ $M_i = \sup f\big|_{[x_{i-1}, x_i]}$

$M_i = \sup f\big|_{[x_{i-1}, x_i]}$



$\approx \int_{[a,b]} f$

$\mathcal{P}' > \mathcal{P}$

Def: f é integrável (Riemann) se $\exists\, I \in \mathbb{R}$ tq $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0$ tq $|\mathcal{P}| < \delta \Rightarrow |I - \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, T)| \leq \varepsilon$.

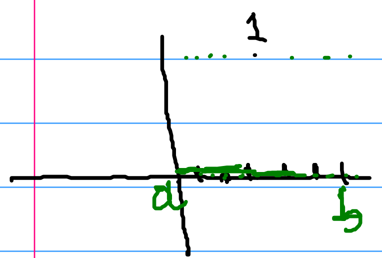
mesh

Def: f é Darboux Integrável se $\underline{I} = \overline{U}$.

$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f$ $\qquad$ $\overline{U} = \overline{\int_a^b} f$

$\underline{\int} f = \sup_{\mathcal{P}} L(f, \mathcal{P})$ $\qquad$ $\overline{U} = \inf_{\mathcal{P}} U(f, \mathcal{P})$

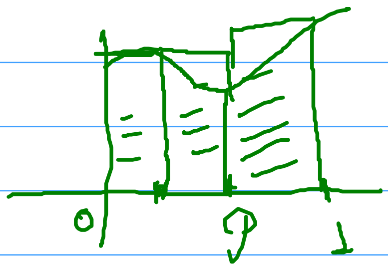
Ex: Seja $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ $\quad f : [0,1] \to \mathbb{R}$



$\mathcal{P}$: Qualquer

$U(f, \mathcal{P}) = \sum \underbrace{M_i}_{1} \Delta x_i = b - a = 1.$

Superior



$U(f,\mathcal{P}) \geq$ Área abaixo gráfico.

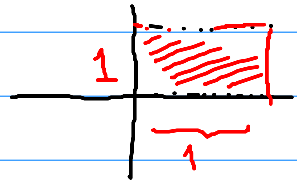
$\inf U(f,\mathcal{P}) \geq$ Área abaixo gráfico.

$\overline{U} = \overline{\int} f$

$\underline{L} = \underline{\int} f$

Ex: $\overline{\int_0^1} f = 1$

$\underline{\int_0^1} f = 0$

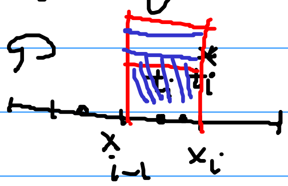


Teorema: f é Darboux integrável $\Leftrightarrow$ Riemann integrável.

f é Riemann integrável $\Rightarrow$ Darboux integrável.

Sabemos que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tq $|\mathcal{P}| < \delta \Rightarrow |R - I| < \varepsilon/4$ (*)

Agora seja $\mathcal{P}$ uma partição (*) $\qquad U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$



$\exists\, t_i, t_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ $\qquad f(t_i) \sim m_i \leftarrow \inf$

$f(t_i^*) \sim M_i \leftarrow \sup$

Tal que $R - L < \varepsilon/4$, $U - R^* < \varepsilon/4$.

Já que $|\mathcal{P}| < \delta$ sabemos $|R - I| < \varepsilon/4$, $|R^* - I| < \varepsilon/4$.

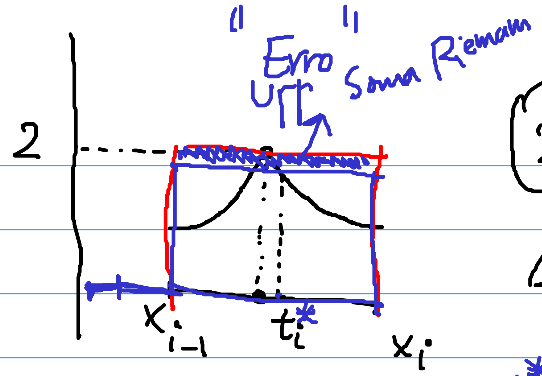
Então $U - L = \underbrace{U - R'}_{<\varepsilon/4} + \underbrace{R' - I}_{\varepsilon/4} + \underbrace{I - R}_{\varepsilon/4} + \underbrace{R - L}_{\varepsilon/4} = \varepsilon.$

Riemann

L I U

. . .

$\Delta x_i \cdot \sup f|_{[x_{i-1}, x_i]}$



$\sup f|_{[x_{i-1},x_i]}$

$2 \cdot \Delta x_i \leftarrow U_P$

$\Delta x_i \cdot f(t_i)$ $\quad R$: Riemann

t_i^* tq $f(t_i^*) \sim M_i$.

$U^* - R < \varepsilon/4$.

$U^* - R$

$\underline{n}$ elementos da Partição P. $\quad$ Soma Erros $\leq \frac{\varepsilon}{4}$

basta Erro em $[x_{i-1}, x_i] \leq \frac{\varepsilon}{4n}$

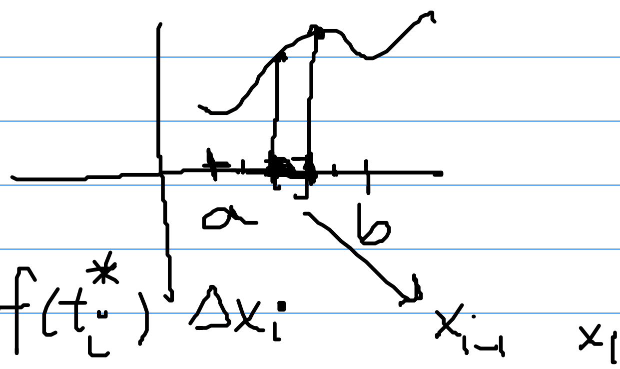
Erro em $[x_{i-1}, x_i] = \Delta x_i \cdot \left(\underbrace{\sup f|_{[x_{i-1},x_i]} - f(t_i^*)}\right) \leq \frac{\varepsilon}{4n}$

Escolha t_i^* é tq $\sup - f(t_i^*) \leq \frac{\varepsilon}{4n\Delta x_i}$.

Darboux $\overset{?}{\Rightarrow}$ Riemann.

Critério Para integrabilidade.

Ex: Toda função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Contínua é integrável.



$U - L < \varepsilon$.

$\rightarrow U(P) = \sum M_i \Delta x_i = \sum f(t_i^*) \Delta x_i$

$L(P) = \sum f(t_i) \Delta x_i$

$U - L = \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{f(t_i^*) - f(t_i)}\right) \overset{\leq b-a}{\underline{\Delta x_i}} < \varepsilon.$

Pela Continuidade, Compacidade $[a,b]$,

f é Uniformemente Contínua.

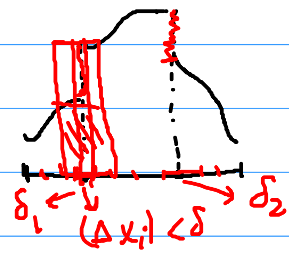
$$\forall \varepsilon\ \exists \delta\quad |x-y| < \overset{\text{mesh}}{\delta} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-f(y)|}_{} \leq \varepsilon .$$

$$f(t_i^*) - f(t_i) \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)\cdot n}$$ escolha do mesh Partição

$$\sum \underbrace{\left(f(t_i^*)-f(t_i)\right)}_{\frac{\varepsilon}{(\cancel{b-a})n}} \overset{\leq \cancel{b-a}}{\cancel{\Delta x_i}} \leq n\cdot\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

Ex: Se f é Contínua por Pedaços $\Rightarrow$ f é integrável.

(nº finito de descontinuidade)



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\sum \underline{\delta_i}\, \underbrace{(M_i - m_i)}_{}$$

Def: Um Conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é de medida nula

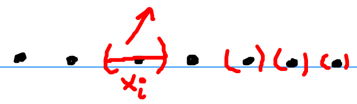
Se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ Uma Cobertura enumerável (intervalos) $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ $\bigcup U_i \supseteq A$

e $\sum |U_i| \leq \varepsilon$.

Ex: A finito, A enumerável. $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

$$|U_i| = \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$U_i = \left[x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}},\ x_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right]$$



$$\sum |U_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

Teorema: f é integrável se somente se seus pontos de descontinuidade formam um conj de medida nula.