

PRIMEIRA PROVA DE MATEMÁTICA DISCRETA (18/04/2006)

DANIEL SMANIA

Exercício 1. *Faça os seguintes itens:*

- A. (1pt) O coelhinho da Páscoa, em um plano maquiavélico que visa aumentar a taxa de colesterol e de açúcar no sangue das crianças de todo o mundo, entrega bilhões de ovos de Páscoa a cada ano. Dado que o Coelho-móvel foi apreendido pela polícia na Páscoa do ano passado depois de um radar ter pego o coelhinho correndo cerca de 3.000.000 % acima da velocidade máxima permitida, o jeito foi pedir o trenó do Papai-Noel emprestado este ano. O Papai-Noel liberou, mas ele costuma prender o trenó com uma trava de bicicleta em um iceberg no Polo Norte e ele se esqueceu de dar pro coelhinho a senha da trava. A trava tem 10 teclas (de 0 a 9) e o código tem 4 dígitos, sendo que a ordem com os dígitos são digitados não importa, e cada tecla deve ser apertada uma única vez. O coelhinho é rápido: ele precisa de apenas 1 segundo para testar cada código possível. Quanto tempo o coelhinho precisa para testar todos os códigos possíveis?
- B. (1pt) Suponhamos que temos 5 bolas: 3 delas são azuis e indistinguíveis entre si. Temos também uma bola amarela e outra verde. De quantos modos distintos podemos colocar estas 5 bolas em 5 caixas, se cada caixa tem capacidade para conter um número arbitrário de bolas?

Exercício 2. *Mostre que*

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

- A. (1pt) *Algebricamente.*
B. (1pt) *Utilizando um argumento combinatorial.*

Exercício 3. (2pt) *Verifique que*

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + \cdots + (n+1)\binom{n}{n} = 2^n + n2^{n-1}.$$

Exercício 4. (2pt) *Verifique que*

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{r}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Exercício 5. (2pt) *Considere a seguinte relação de recorrência linear*

$$u_n = 2u_{n-1} + 15u_{n-2}$$

com condições iniciais $u_0 = 1$, $u_1 = 1$. Resolva esta recorrência linear de dois modos distintos (usando o primeiro método que aprendemos e o método das funções geradoras).

Exercício 6. (2pt) *Entre as palavras de comprimento n usando o alfabeto $\{a, b, c, d\}$, quantas delas têm um número par de letras "a"?*

URL: www.icmc.usp.br/~smania/