

## LISTA INCRÍVEL DE MATEMÁTICA DISCRETA II

DANIEL SMANIA

### 1. AMOSTRAS, SELEÇÕES, PERMUTAÇÕES E COMBINAÇÕES

**Exercício 1.** *Quantos bytes (8 bits) existem de modo que ele contenha exatamente quatro 1's?*

**Exercício 2.** *Verifique que*

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

*Mostre que se  $n \geq 1$  então*

$$\binom{2n}{n}$$

*é par.*

**Exercício 3.** *De quantos modos distintos podemos colocar  $k$  bolas iguais em  $n$  caixas de modo que cada caixa contenha no máximo uma bola?*

**Exercício 4.** *Quão grande a população de uma cidade pode ser se não há duas pessoas cujos nomes tem as mesmas três letras iniciais?*

**Exercício 5.** *Um clube possui 5 homens e 4 mulheres.*

- De quantos modos podemos formar um comite com três pessoas?*
- De quantos modos podemos formar um comite com 3 homens e 4 mulheres?*
- De quantos modos podemos formar um comite de 6 pessoas e um certo par de homens de recusa a pertencer a um mesmo comite?*

**Exercício 6.** *Seja  $p_1, p_2, \dots, p_n$  pessoas (distintas).*

- De quantos modos podemos colocar  $k$  destas pessoas em uma fila?*
- De quantos modos podemos colocar  $k$  destas pessoas em uma fila se  $p_1$  se recusa a ficar ao lado de  $p_2$  na fila, dado que  $p_2$  tem uma séria aversão a banhos?*
- De quantos modos podemos colocar  $k$  destas pessoas em uma fila se  $p_1$  se recusa a ficar em uma fila com  $p_2$ ? ( $p_2$  não toma banho a MUITO tempo....)*

**Exercício 7.** *Use um argumento combinatorial para mostrar que  $(2n)!/2^n$  e  $(3n)!/(2^n 3^n)$  são números inteiros.*

**Exercício 8.** Mostre que  $(n^2)!/(n!)^{n+1}$  é um número inteiro.

**Exercício 9.** Mostre que o número de palavras com  $j + k$  bits de modo que ela contenha  $k$  bits 1 e  $j$  bits 0 e tal que não haja dois 1 consecutivos é

$$\binom{j+1}{k}.$$

**Exercício 10.** Um alfabeto com  $m$  letras pode ser transmitido através de um canal de comunicação. Encontre o número de diferentes mensagens (palavras) com  $n$  letras, se

- as letras podem ser usadas com repetições em uma palavra.
- das  $m$  letras permitidas,  $l$  delas só podem ser usadas como a primeira ou última letra da palavra. As outras letras podem aparecer com repetições e sem restrições quanto a sua posição.
- das  $m$  letras permitidas,  $l$  delas só podem ser usadas como a primeira ou última letra da palavra. As outras letras podem aparecer com repetições e em qualquer posição, exceto na primeira e última.

**Exercício 11.** Quantas diferentes mãos de 10 cartas podem ser obtidas de um baralho com 52 cartas?

**Exercício 12.** Quantos subconjuntos com dois elementos de  $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$  existem de modo que a soma de seus elementos é par?

**Exercício 13.** Quantos subconjuntos do conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  existem com exatamente três elementos e tal que o subconjunto não possua dois números consecutivos?

**Exercício 14.** Encontre o coeficiente de  $a^7b^6$  em  $(a + b)^{13}$ .

**Exercício 15.** Encontre o coeficiente de  $x^{-6}y^3$  em  $(2x^{-1} + y)^9$ .

**Exercício 16.** Encontre o coeficiente de  $x^n$  em  $(x^3 - x^{-2})^n$ .

**Exercício 17.** Verifique que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$$

**Exercício 18.** Verifique que

$$\binom{n}{k} \binom{k}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}.$$

**Exercício 19.** Mostre que

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

*Sug: Use a fórmula do binômio de Newton.*

**Exercício 20.** Mostre que

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}.$$

**Exercício 21.** *Mostre que*

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

- Algebricamente.*
- Utilizando um argumento combinatorial.*

**Exercício 22.** *Mostre que*

$$\binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3$$

- Algebricamente.*
- Utilizando um argumento combinatorial.*

**Exercício 23.** *Três inteiros são selecionados dos inteiros  $1, 2, \dots, 1000$ . De quantos modos podemos selecionar estes três inteiros de modo a que sua soma seja divisível por 3 Sug: Você provavelmente terá que se lembrar de coisas que aprendeu em matemática Discreta I aqui.*

**Exercício 24.** *Verifique que*

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + \dots + (n+1)\binom{n}{n} = 2^n + n2^{n-1}.$$

**Exercício 25.** *Verifique que*

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{r}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

*de uma maneira combinatorial e de uma maneira algébrica.*

**Exercício 26.** *Considere o conjunto das palavras de tamanho  $n$  geradas pelo alfabeto  $\{0, 1, 2\}$ .*

- Mostre que o número de palavras nas quais o dígito 0 aparece um número par de vezes é  $(3^n + 1)/2$ .*
- Mostre a identidade*

$$\binom{n}{0}2^n + \binom{n}{2}2^{n-2} + \dots + \binom{n}{q}2^{n-q} = \frac{3^n + 1}{2},$$

*onde  $q = n$  se  $n$  é par, e  $q = n - 1$  se  $n$  é ímpar.*

**Exercício 27.** *Fixe  $x \in ]0, 1/2[$ . Mostre que existe uma constante  $C$  com a seguinte propriedade: para quaisquer números naturais  $j$  e  $n$  tais que  $j/n < x$  temos*

$$\binom{n}{j} \leq \sum_{i=0}^j \binom{n}{i} \leq C \binom{n}{j}.$$

*Sug. Verifique e use que se  $i/n < x$  então*

$$\binom{n}{i-1} \leq \frac{x}{1-x} \binom{n}{i}.$$

**Exercício 28.** *Um bêbado anda em um praia após o show do Rolling Stones. Ele pode dar um passo para frente ou um passo para trás de cada vez. Suponha que em cada passo o bêbado anda 1m (para frente ou para trás). Quantas são as possíveis trajetórias do bêbado após  $n$  passos? Quantas são as possíveis trajetórias do bêbado em que ele volta a sua posição inicial após  $n$  passos?*

**Exercício 29.** De quantos modos 16 objetos podem ser divididos em quatro grupos de tamanho igual?

**Exercício 30.** Calcule o número de palavras de comprimento  $2n$ ,  $s = s_1 s_2 \dots s_{2n}$ , com  $s_i \in \{-1, 1\}$ , tais que

$$f(k) = \sum_{i=1}^k s_i \geq 0$$

para todo  $k \leq 2n$ . Sug: Defina uma nova função  $g(k)$  tal que

$$g(k) = \begin{cases} f(k) & 1 \leq k \leq m \\ -(f(k) + 2) & m < k \leq 2n. \end{cases}$$

onde  $m$  é o menor natural tal que  $f(m) = -1$ , se houver tal natural. Caso contrário tome  $m = 2n$ .

**Exercício 31.** Seja  $C_n$  o número de palavras de comprimento  $2n$ ,  $s = s_1 s_2 \dots s_{2n}$ , com  $s_i \in \{-1, 1\}$ , tais que

$$\sum_{i=1}^j s_i \geq 0$$

para todo  $j < 2n$ , e além disso

$$\sum_{i=1}^{2n} s_i = 0.$$

Mostre que

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Os números  $C_n$  são chamados de "Catalan numbers". Sug: Procure por "Catalan Numbers" no Google ;-).

## 2. RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES HOMOGÊNEAS.

**Exercício 32.** Encontre as soluções gerais das relações de recorrência lineares homogêneas abaixo. Quando as condições iniciais forem dadas, encontre a solução particular os valores iniciais dados.

a.  $s_n = 3s_{n-1} - 2s_{n-2}$ ,  $s_0 = 0$ ,  $s_1 = 1$ .

b.  $s_n = 2s_{n-1} + 3s_{n-2}$ ,  $s_0 = 1$ ,  $s_1 = 5$ .

c.  $s_n = 2s_{n-1} - s_{n-2}$ ,  $s_0 = a$ ,  $s_1 = b$ .

d.  $s_n = 2s_{n-2}$ ,  $s_0 = 0$ ,  $s_1 = 5$ .

e.  $s_n = \pi^2 s_{n-2}$ ,  $s_0 = a$ ,  $s_1 = b$ .

**Exercício 33.** Defina

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{2k}, \quad n \geq 1.$$

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k}{2k+1}, \quad n \geq 1.$$

e  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 0$ .

a. Verifique que

$$a_{n+1} = a_n + b_{n+1}, \quad n \geq 0,$$

$$b_{n+1} = a_n + b_n, \quad n \geq 0.$$

b. Mostre que  $a_n$  e  $b_n$  satisfazem relações de recorrência lineares de ordem dois.

c. Expresse  $a_n$  e  $b_n$  em termos dos números de Fibonacci.

**Exercício 34.** Seja  $r_n$  o número de palavras de comprimento  $n$  e com alfabeto  $\{0, 1, 2, 3\}$  tal que o padrão 33 nunca ocorra. Encontre a recorrência linear satisfeita pela sequência  $r_n$ . Solucione esta recorrência linear e calcule  $r_9$ .

**Exercício 35.** Seja  $h_n$  o número de palavras de comprimento  $n$  e com alfabeto  $\{1, 2, 3\}$  tal que os padrões 11 e 12 nunca ocorram. Encontre a recorrência linear satisfeita pela sequência  $h_n$ . Solucione esta recorrência linear.

### 3. RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES NÃO HOMOGÊNEAS.

**Exercício 36.** Encontre as soluções gerais das relações de recorrência lineares não homogêneas abaixo.

a.  $s_n = 4s_{n-1} + 1.$

b.  $s_n = -3s_{n-1} + n - 1.$

c.  $s_n = -6s_{n-1} + 2^n + 3^n.$

d.  $s_n = -5s_{n-1} + 4s_{n-2} + n + 2..$

e.  $s_n = 2s_{n-1} + 3s_{n-2} + 1/2..$

**Exercício 37.** Calcule as seguintes somas

a.  $s_m = \sum_{k=0}^m k(k-1).$

b.  $s_m = \sum_{k=0}^m k^2.$

c.  $s_m = \sum_{k=0}^m k(k+2).$

d.  $s_m = \sum_{k=0}^m k(k+1)(k+2).$

*Sug: Encontre uma relação de recorrência satisfeita por  $s_m$  e solucione a recorrência com os valores iniciais apropriados.*

#### 4. FÓRMULA DE STIRLING

**Exercício 38.** *Mostre que os Catalan numbers definidos no Exercício 31 satisfazem*

$$C_n \approx \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}.$$

*Sug: Fórmula de Stirling.*

**Exercício 39. GRANDE Desafio!!** *Dada uma palavra de comprimento  $n$ ,  $s=s_1s_2\ldots s_n$ , onde  $s_i \in \{0,1\}$ , podemos considerar a média*

$$M(s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i.$$

*Seja  $x$  um número real em  $]0, 1/2[$ .*

*Seja  $K_n$  o número de palavras  $s$  de comprimento  $n$  tais que  $M(s) < x$ . Defina*

$$h(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x) - \ln(1/2).$$

*Verifique que  $h > 0$  em  $]0, 1/2[$ .*

*Mostre que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{K_n}{2^n} \right)^{1/n} = e^{-h(x)}.$$

*O que acontece com esta mesma sequência se tomarmos  $x = 1/2$ ? e para  $x > 1/2$ ?*

*Sug: Use o Exercício 27 e a fórmula de Stirling.*

*E-mail address: [smania@icmc.usp.br](mailto:smania@icmc.usp.br)*

*URL: [www.icmc.usp.br/~smania/](http://www.icmc.usp.br/~smania/)*