SEGUNDA PROVA DE ESTRUTURAS ALGÉBRICAS (22/06/2005)

DANIEL SMANIA

Exercício 1. *(2pt) Defina o que é um grupo. O que é um grupo abeliano? Dê um exemplo de um grupo não abeliano.*

Exercício 2. *Construa a táboa do grupo aditivo* $\mathbb{Z}_5$. *Qual o subgrupo gerado por* $\overline{3}$*?*

Exercício 3. *(2pt) Seja* $(G, \cdot)$ *um grupo abeliano. Dizemos que* $y \in G$ *é um quadrado perfeito se existe* $z \in G$ *tal que* $y = z^2$. *Mostre que se* y *é um quadrado perfeito e* x *NÃO é um quadrado perfeito então* xy *NÃO é um quadrado perfeito.*

Exercício 4. *(2pt) Seja* $(G, \cdot)$ *um grupo abeliano. Defina* $H = \{x^2 : x \in G\}$. *Mostre que* H *é um subgrupo de* G.

Exercício 5. *(2pt) Prove que um grupo* G *é abeliano se e somente se a função* $f : G \to G$ *definida por* $f(x) = x^{-1}$ *é um homomorfismo.*

Exercício 6. *(2pt) Prove o Pequeno Teorema de Fermat: se* p *é um número natural primo e* n *é um número inteiro tal que* p *não divide* n, *então* $n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. *(Sugestão: Aplique o Teorema de Lagrange para o grupo* $(\mathbb{Z}_p^\star, \cdot)$.

Exercício 7. *(2pt) Mostre que todo grupo cíclico infinito tem dois e somente dois geradores.*

URL: www.icmc.usp.br/~smania/