Olimpíada não-presencial de Topologia

São Petersburgo, 1–31 de outubro de 2017

Os problemas originais em russo se encontram no endereço
http://mathcenter.spb.ru/nikaan/olympiad/problems.pdf
(versão atual com possíveis correções).

Problemas

1. Encontre subconjuntos compactos não-homeomorfos X_1 e X_2 no plano tais que $X_1 \times I$ é homeomorfo a $X_2 \times I$, onde $I := [0, 1]$ é o intervalo fechado da reta.

2. Um conjunto de 4 pontos está munido da topologia minimal (com relação à quantidade de abertos) tal que dois pontos são abertos e os outros dois são fechados. Calcule o grupo fundamental deste espaço e construa seu recobrimento universal.

3. a. No espaço de todos os triângulos do plano, o subespaço de todos os triângulos retângulos é um retrato de deformação?

b. Construa uma retração de deformação do espaço de todos os triângulos no plano para o subespaço de triângulos regulares.

4. Seja X uma variedade conexa e seja $f : X \to \mathbb{S}^2$ uma função contínua tal que a imagem inversa $f^{-1}(x)$ é homeomorfa a $\mathbb{S}^1$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$. Quais podem ser $H_1(X, \mathbb{Z})$ e $H_2(X, \mathbb{Z})$?

5. Considere $\mathbb{S}^4 := \{x \in \mathbb{R}^5 \mid |x| = 1\}$. É verdade que, para cada $x \in \mathbb{S}^4$, é possível encontrar um plano afim P_x tangente a $\mathbb{S}^4$ em x, de modo que P_x depende continuamente de x ?

6. Um espaço de Hausdorff enumerável e infinito pode ser conexo?

7. Existe uma função sobrejetora $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que não é um homeomorfismo, mas, para cada ponto $x \in \mathbb{R}^2$, existe uma vizinhança U tal que $f : U \to f(U)$ é um homeomorfismo?

8. a. Considere o quadrado $[0, n]^2$ no plano, onde n é natural. Retiramos do quadrado todos os pontos com ambas as coordenadas não-inteiras. Restou um complexo celular unidimensional X. Encontre $k = k(n)$ maximal tal que, para qualquer função contínua de X para R^1, existe um ponto com pelo menos k imagens inversas.

b. Faça o mesmo com funções para $\mathbb{R}^2$ do complexo bidimensional obtido de $[0, n]^3 \subset \mathbb{R}^3$ por excluir todos os pontos com todas as coordenadas não-inteiras.

9. Existe uma imersão da esfera $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ que não admite uma imersão $g : D^3 \to \mathbb{R}^3$ do disco tridimensional para a qual $g|_{\partial D^3} = f$?

Regras

1. Só serão corrigidos (por nós) soluções de alunos do ICMC.
2. As provas serão corrigidas em duas categorias: graduação e pós-graduação.
3. As equipes podem ser de 1 a 3 pessoas.
4. É permitido a consulta a qualquer fonte — mas não se pode pedir ajuda a pessoas de fora da equipe.
5. Soluções, mesmo que parciais, deverão ser entregues em papel ou email (sasha_a@icmc.usp.br) até o dia 15 de dezembro para o Sasha.
6. Para as versões em papel, use caneta ou imprima um arquivo TEX/LATEX. Para as versões eletrônicas, somente arquivos pdf.
7. Haverá premiação.