

الکتره ۳۱-۱
(۲۰۱۷)

المپیاد توپولوژی شوروی سن پترزبورگ

نسخه اصلی سؤاها ایمی تواند در سایت زیر بباید:

<http://mathcenter.spb.ru/nikaan/olympiad/problemseng.pdf>
(این نسخه توسط علی تهرانی از دانشگاه ساقم لولوب تارسی نوشته شده است)

سؤاها المپیاد

- ۱- دو زیر مجموعه X_1 و X_2 از صفحه \mathbb{R}^2 را طوری بباید که با هم ناهمبند باشند (ناهمبند بودن یعنی $X_1 \times I$ و $X_2 \times I$ همبند باشند. $I = [0, 1]$ بازه واحد حقیقی است).
- ۲- یک مجموعه A عضوی از نظر کلمبره. این مجموعه را با توپولوژی منبها (از لحاظ تعداد مجموعه های باز) بجز کنید. به وضوح A مجموعه باز دارد A مجموعه بسته (های) خود مجموعه دکت زیر مجموعه دو عضوی گروه اباسی این فضای توپولوژی را ببندید. فضای پوششی یونیورسال هم ببازید (بنیادی)
- ۳- (الف) آیا دو فضای تمام مثلثهای در یک صفحه می توان گفت که زیر مجموعه مثلثهای تمام الزامی است؟
(ب) یک لفتض در درسی بین تمام مثلثها در صفحه و مثلثهای متساوی الاضلاع پیدا کنید.
- ۴- فرض کنید X یک فضا همبند باشد $f: X \rightarrow S^1$ یک تابع سوسم به طوری که برای تمام نقاط $x \in S^1$ ، $f^{-1}(x)$ همبند با S^1 باشد. در مورد $H_2(X, \mathbb{Z})$ و $H_1(X, \mathbb{Z})$ چه می توان گفت؟
- ۵- کره واحد $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x|=1\}$ را در نظر بگیرید. آیا ممکن است یک فضای امین دو بعدی P_x یافت که به ازای هر $x \in S^1$ ، P_x بر کره تماس باشد و P_x با x به طوری بسته تغییر کند؟

۶- آیا یک فضای هاسدورف دشما می تواند همبند باشد؟

۷- آیا هیچ تابع پیوسته و یو لای از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2 وجود دارد که هر بخشی نباشد و بی به طور موضعی هر بخشی نباشد؟ یعنی، به ازای هر $x \in \mathbb{R}^2$ ، یک همسایگی U وجود دارد که $f(U) \rightarrow U$ یک هم بخشی باشد.

۸- الف) مربع $[0, n]^2$ را در صفحه در نظر گرفته و تمام نقاط با محور مختصات طوسی را از این مربع حذف کنید. اکنون یک سلول یک بعدی باقی مانده است که X می نامیم. بزرگترین عدد $K = K(n)$ را بیابید که برای هر تابع پیوسته از X به \mathbb{R} ، یک نقطه وجود داشته باشد که حداقل K ، وارد داشته باشد. ب) سوال بالا را در مورد $[0, n]^3$ در نظر گرفته و جواب دهید. در این حالت بعد از حذف نقاط یک سلول دو بعدی خواهد داشت.

۹- آیا می توان یک غوطه وری سازی (Immersion) $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ یافت به طوری که هیچ غوطه وری سازی $g: \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ یافت نشود که $f = g|_{\partial \mathbb{D}^3}$ ؟

قرائین: این متن گمانی است و البته حواشی به روی اصحاح می کشند. اگر شما به فارسی جواب می دهید (که انتظار می رود) جواب را به آریس علی تنزیلی بفرستید.
tahzibi@icmc.usp.br