Sétima Lista de Exercícios de SMA304-Álgebra Linear

1. No espaço $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ consideremos o produto interno $\langle f(t), g(t)\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Calcule $\langle f(t), g(t)\rangle$, $\|f(t)\|$, $\|g(t)\|$ e $\|f(t)+g(t)\|$ quando:
(a) $f(t) = t^3 - t - 1$ e $g(t) = t^2 + 1$.
(b) $f(t) = 2$ e $g(t) = t^3 + t + 1$.
2. Sejam $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ e $g(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n$ dois polinômios quaisquer de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. A função $(f(t), g(t)) \mapsto a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$ um produto interno no espaço $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$? Justifique sua resposta.
3. No espaço $V = M_2(\mathbb{R})$ considere o produto interno $\langle A, B\rangle = tr(B^t A)$. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcule: $\langle A, B\rangle$, $\|A\|$, $\|B\|$ e $d(A, B)$.
4. Sendo u e v vetores de um espaço euclidiano tais que $\|u\| = 5$, $\|v\| = 8$ e $\|u+v\| = \sqrt{129}$, determine o cosseno do ângulo entre u e v.
5. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ (produto interno usual) para demonstrar que, dados números reais estritamente positivos a_1, a_2, a_3, vale a desigualdade:

$$(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9.$$

6. Encontrar a distância entre u e v e o cosseno do ângulo entre eles nos seguintes casos:
(a) $u = (1, 1, 1)$ e $v = (-1, 0, 1, -1)$ com o produto usual do $\mathbb{R}^4$.
(b) $u = 1 + t - t^2$ e $v = 3t^2$ em relação ao produto interno $\langle f(t), g(t)\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ com o produto interno do Exerccio 3.
7. Determinar todos os vetores do $\mathbb{R}^3$ de norma igual a dois que sejam ortogonais simultaneamente a $(2, 1, 2)$ e $(-1, 3, 4)$.
8. Provar que os vetores 1, t e $t^2 - \frac{1}{3}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ são dois a dois ortogonais em relação do produto interno dado por $\langle f(t), g(t)\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.
9. Considere os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$: $u = (2, 2, 2)$ e $v = (3, 3, 1)$.
(a) Determine dois vetores v_1 e v_2 tais que $v = v_1 + v_2$, v_1 ortogonal a u e $v_2 = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
(b) Se $w = (-5, 1, -1)$ decompor v em uma parcela de $W = [u, w]$ e uma parcela de $W^{\perp}$.
(c) Determinar uma base ortonormal de W.
10. Determinar a projeção ortogonal do vetor $(1, 1, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$ sobre o subespaço $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z = 0 \text{ e } z - 2t = 0\}$.
11. Considere $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com o produto interno definido por $\langle f(t), g(t)\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
(a) Ortonormalizar a base $\{1, 1+t, 2t^2\}$.
(b) Achar o complemento ortogonal do subespaço $W = [5, 1+t]$.
12. Determinar uma base ortonormal de cada um dos seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$ utilizando o processo de Gram-Schmidt:
(a) $W = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 3, 4)]$.
(b) $W = [(2, 0, 0, 0), (1, 3, 3, 0), (3, -3, -3, 0)]$.