

Exercício 1. Determinar as matrizes das seguintes transformações lineares em relação as bases canônicas dos respectivos espaços vetoriais.

- (a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) \doteq (x + y, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (b) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y, z, t) \doteq 2x + y - z + 3t$, $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.
- (c) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x) \doteq (x, 2x, 3x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (d) $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T(x, y, z) \doteq (x + y, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (e) $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $T(x, y) \doteq (x + y, x, x - y)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (f) $T \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$, $T(x, y, z, t) \doteq 2x + y - z + 3t$, $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.
- (g) $T \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, $T(x) \doteq (x, 2x, 3x)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 2. Considere $M \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Determinar a matriz do operador linear $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ dado por $T(X) \doteq MX - XM$, $X \in M_2(\mathbb{R})$ em relação à base canônica de $M_2(\mathbb{R})$. Agora, seja $M \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Faça o mesmo para esta matriz genérica.

Exercício 3. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ transformação linear definida por

$$T(p) \doteq \int_{-1}^1 p(t) dt, \quad p \in P_2(\mathbb{R}).$$

Determine a matriz de T em relação às bases β de $P_2(\mathbb{R})$ e γ de $\mathbb{R}$, nos seguintes casos:

- (a) $\beta \doteq \{p_0, p_1, p_2\}$ e $\gamma \doteq \{1\}$, onde $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$, $p_2(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$.
- (b) $\beta \doteq \{q_0, q_1, q_2\}$ e $\gamma \doteq \{-2\}$, onde $q_0(t) = 1$, $q_1(t) = 1 + t$, $q_2(t) = 1 + t + t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 4. Seja $\beta \doteq \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de um espaço vetorial V . Se $T, S : V \rightarrow V$ são operadores lineares em V tais que

$$\begin{aligned} T(e_1) &\doteq 2e_1 - 3e_2 + e_3 & S(e_1) &\doteq 3e_1 + 2e_2 \\ T(e_2) &\doteq e_1 + e_2 & S(e_2) &\doteq e_1 - e_2 - e_3 \\ T(e_3) &\doteq e_2 + e_3 & S(e_3) &\doteq e_1 + e_2 - 2e_3 \end{aligned}$$

Determine as seguintes matrizes $[T]_\beta$, $[S]_\beta$, $[S \circ T]_\beta$, $[S^2 + I]_\beta$ e $[T^3 - S^2]_\beta$.

Exercício 5. Sejam $U \doteq \mathbb{R}^3$, $V \doteq \mathbb{R}^2$, $\beta \doteq \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $\gamma \doteq \{(1, 0), (0, 1)\}$ bases dos espaços vetoriais U e V , respectivamente. Encontrar, em cada um dos itens abaixo, $T \in L(U, V)$ tal que $[T]_{\beta\gamma}$ seja a matriz;

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercício 6. Seja $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, que tem como base canônica a base

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + d, b + c)$.

- (a) Encontre a matriz $[T]_{\alpha\beta}$, onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

- (b) Se $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ é uma transformação linear tal que $[S]_{\alpha\beta} \doteq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, encontre uma expressão para $S(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Além disso, determine $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $S(a, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 7. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $[T]_\alpha \doteq \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Determine todos os vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$ tais que $T(u) = u$ e $T(v) = -v$.

Exercício 8. Sejam $A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e T o operador linear em $\mathbb{R}^2$ definido por

$$T(v) \doteq A[v]_\alpha, \quad v \in \mathbb{R}^2,$$

onde $[v]_\alpha$ denota a matriz das coordenadas do vetor v em relação à base canônica α de $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz do operador T em cada uma das bases de $\mathbb{R}^2$ seguintes:

(a) $\beta_1 \doteq \{ (1, 0), (0, 1) \}$.

(b) $\beta_2 \doteq \{ (1, 3), (2, 5) \}$

Exercício 9. Mostre que as transformações em $L(\mathbb{R}^2)$ dadas por

$$T(x, y) = (x, 2y), \quad S(x, y) = (y, x + y) \quad \text{e} \quad L(x, y) = (0, x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

formam um conjunto L.I. em $L(\mathbb{R}^2)$.

Exercício 10. Seja $\beta \doteq \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de um espaço vetorial V . Considere $T, S \in L(V)$ dadas por

$$T(e_1) = e_1 - e_2, \quad T(e_2) = e_1 + e_3, \quad T(e_3) = e_2,$$

e

$$S(e_1) = 2e_1 + e_3, \quad S(e_2) = e_1, \quad S(e_3) = e_2 - 3e_1.$$

Determine as matrizes, em relação à base β , dos seguintes operadores lineares:

$$T, \quad S, \quad 3T - 5S, \quad T \circ S \circ T, \quad T^2 + S^2, \quad T^{-1} \text{ (caso exista) }, \quad (T \circ S)^{-1} \text{ (caso exista)}.$$

Exercício 11. Verifique se os operadores lineares em $\mathbb{R}^3$ abaixo são isomorfismos e em caso afirmativo determinar o isomorfismo inverso.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) \doteq (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) \doteq (x, x - y, 2x + y - z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) \doteq (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(d) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ operador linear tal que

$$T(1, 0, 0) \doteq (1, 1, 1), \quad T(0, 1, 0) \doteq (1, 0, 1) \quad \text{e} \quad T(0, 1, 2) \doteq (0, 0, 4).$$

Exercício 12. Considere o operador linear em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1, 0, 0) \doteq (1, 1, 1), \quad T(0, 0, 1) \doteq (1, 0, 1), \quad T(0, 1, 2) \doteq (0, 0, 4).$$

Pergunta-se: T é um isomorfismo? Em caso afirmativo, obtenha o isomorfismo inverso.

Exercício 13. Mostre que $\mathbb{R}^2$ é isomorfo a qualquer subespaço de dimensão 2 de $\mathbb{R}^3$. Exiba um isomorfismo.

Exercício 14. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se os espaços vetoriais U e V são isomorfos, justificando a resposta.

(a) $U \doteq \mathbb{R}^2$, $V \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$.

(b) $U \doteq M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, $V \doteq \{p \in P_4(\mathbb{R}); p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

(c) $U \doteq \mathbb{R}^3$, $V \doteq \{A \in M_2(\mathbb{R}); A^t = A\}$.

(d) $U \doteq \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R} \right\}$, $V \doteq \{p \in P_3(\mathbb{R}); p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 15. Mostre que o subespaço $W \doteq \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = z - 2t = 0\}$ é isomorfo ao subespaço $U \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$ e exiba um isomorfismo entre estes subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$.