

Exercício 1. Verifique se as transformações abaixo são lineares.

- (a) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) \doteq (2x^2 + 3y, x, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (b) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) \doteq (x + y, x - y)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (c) $T: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(p)(x) \doteq (a_1 - 2a_3 - a_2) - a_0x^2$, onde $p(x) \doteq a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, $x \in \mathbb{R}$.
- (d) $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x) \doteq |x|$.
- (e) $T: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ dada por $T(p) \doteq p'$, $p \in P_3(\mathbb{R})$.
- (f) $T: P_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(p) \doteq \int_0^1 p(x) dx$, $p \in P_4(\mathbb{R})$.
- (g) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dada por $T(x, y, z) \doteq \begin{pmatrix} -z & z - y \\ x & 0 \end{pmatrix}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (h) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y, z) \doteq x + 5y - z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (i) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y, z) \doteq x + 5y - z + 1$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (j) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y, z) \doteq x^2 + 5y - z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (k) $T: M_{n \times 1} \rightarrow M_{n \times 1}$, $T(X) \doteq AX + X$, $X \in M_{n \times 1}$ com $A \in M_n$ fixa.
- (l) $T: P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$, $T(p) \doteq p' + p''$, $p \in P_n(\mathbb{R})$.
- (m) $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, $T(X) \doteq AX$, $X \in M_2$, onde $A \in M_2(\mathbb{R})$ está fixada.
- (n) $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$, $T(p) \doteq p + q$, $p \in P_2(\mathbb{R})$ e $q \in P_2(\mathbb{R})$ é dada por $q(t) \doteq t^2 + 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 2. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$T(x, y, z) \doteq (3x, x - y, 2x + y + z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Mostre que $(T^2 - I) \circ (T - 3I) = 0$.

Exercício 3. Sejam $T, S \in L(V)$ tais que $S \circ T = T \circ S$. Mostre que

- (a) $(T + S)^2 = T^2 + 2(T \circ S) + S^2$.
- (b) $(T + S) \circ (T - S) = T^2 - S^2$

Exercício 4. Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) \doteq (y, x)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Determine $T^n(x, y)$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 5. Determine todas as transformações lineares $T \in L(\mathbb{R}^2)$ tais que $T^2 = T$ e $T(x, y) = (ax, bx + cy)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 6.

- (a) Determine uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1, 0, 0) \doteq (2, 0), \quad T(0, 1, 0) \doteq (1, 1) \quad \text{e} \quad T(0, 0, 1) \doteq (0, -1).$$

Encontre $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (3, 2)$.

- (b) Determine uma transformação linear $T: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_{1 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$T(1) \doteq \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T(x) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T(x^2) \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) Determine uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$T(1, 1, 1) \doteq (2, 0, 0, 0), \quad T(1, 1, 0) \doteq (1, 1, -1, 1) \quad \text{e} \quad T(1, 0, 0) \doteq (0, 0, 0, -1).$$

Exercício 7. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$T(x, y) \doteq \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Mostre que a aplicação T é um operador linear em $\mathbb{R}^2$.
- (b) Encontre todos os vetores $u \in \mathbb{R}^2$ tais que $T(u) = u$.
- (c) Encontre todos os vetores $v \in \mathbb{R}^2$ tais que $T(v) = -v$.

Exercício 8. Para cada uma das transformações lineares abaixo determinar uma base e a respectiva dimensão do núcleo e da imagem.

- (a) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x, y, z) \doteq x + z - y$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (b) Seja $p_2(x) \doteq x^2$, $x \in \mathbb{R}$ e $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(p) \doteq p_2 p''$, $p \in P_2(\mathbb{R})$.
- (c) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) \doteq (z, x - y, -z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (d) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) \doteq (2y, x - y, -x)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (e) Seja $M \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ dada por $T(X) \doteq MX + X$, $X \in M_2(\mathbb{R})$.

Exercício 9. Dê exemplos de transformações lineares $T: U \rightarrow V$, satisfazendo:

- (a) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\dim[N(T)] = 1$.
- (b) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$.
- (c) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(\mathbb{R}^2) = \{(0, 0, 0)\}$.
- (d) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(\mathbb{R}^3) = [(2, 1, 1), (1, -1, 2)]$.
- (e) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$.
- (f) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x\}$.
- (g) $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\dim[T(\mathbb{R}^4)] = 3$.
- (h) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $N(T) = [(2, 1)]$.

Exercício 10. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$T(1, 0, 0) \doteq (1, 1, 0), \quad T(0, 1, 0) \doteq (1, 1, 2) \quad \text{e} \quad T(0, 0, 1) \doteq (0, 0, 2).$$

Determinar uma base de cada um dos seguintes subespaços:

$$(a) N(T) \quad (b) T(\mathbb{R}^3) \quad (c) N(T) \cap T(\mathbb{R}^3) \quad (d) N(T) + T(\mathbb{R}^3).$$

Exercício 11. Sejam U e V dois espaços vetoriais tais que $\dim U > \dim V$. Mostre que se $T: U \rightarrow V$ é uma transformação linear, então existe um vetor, não nulo, $u_0 \in U$ tal que $T(u_0) = 0$.

Exercício 12. Determinar o núcleo das transformações lineares abaixo e descreva-os geometricamente.

- (a) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y) \doteq y + 2x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (b) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y, z) \doteq z - 2x$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (c) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) \doteq (2x + 2y, x + y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (d) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) \doteq (x + y, x - y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (e) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) \doteq (z - x, z - 2x, z - 3x)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 13. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$T((1, 0, 0)) \doteq (2, 3, 1), \quad T((1, 1, 0)) \doteq (5, 2, 7) \quad \text{e} \quad T((1, 1, 1)) \doteq (-2, 0, 7).$$

- (a) Encontre $T((x, y, z))$ para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (b) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.
- (c) T é injetora? Justifique sua resposta.
- (d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

Exercício 14. Seja $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ um operador linear em $P_2(\mathbb{R})$ tal que

$$(T(p_0))(t) \doteq 1 + t, \quad (T(p_1))(t) \doteq t + t^2 \quad \text{e} \quad (T(p_2))(t) \doteq 1 + t - 2t^2,$$

onde $p_i(t) = t^i$, $t \in \mathbb{R}$, para $i = 0, 1, 2$.

- (a) Encontre $T(p)$ para $p \in P_2(\mathbb{R})$.
- (b) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.
- (c) T é injetora? Justifique sua resposta.
- (d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

Exercício 15. Seja $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ um operador linear em $M_2(\mathbb{R})$ tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \doteq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Encontre $T(X)$ para $X \in M_2(\mathbb{R})$.
- (b) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.
- (c) T é injetora? Justifique sua resposta.
- (d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

Exercício 16. Determinar um operador linear em $\mathbb{R}^4$ cujo núcleo é gerado pelos vetores $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$.

Exercício 17. Determinar um operador linear em $\mathbb{R}^4$ cujo núcleo e a imagem sejam gerados pelos (mesmos) vetores $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$.

Exercício 18. Determinar um operador linear em $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo é gerado pelos vetores $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ e a imagem gerado pelo vetor $(1, -1, 1)$.

Exercício 19. Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(\mathbb{R}^5) \doteq [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)] \quad \text{e} \quad N(T) = [(1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 0)].$$

Exercício 20. Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\dim[N(T)] = 2$ e $\dim[T(\mathbb{R}^5)] \doteq 3$.

Exercício 21. Sejam V espaço vetorial e $T : V \rightarrow V$ um operador linear idempotente, isto é, $T^2 = T$.

Mostrar que $V = N(T) \oplus T(V)$.

Exercício 22. Mostre que $T, R, S \in L(\mathbb{R}^2)$, dados por $T(x, y) \doteq (x, 2y)$, $R(x, y) \doteq (x, x+y)$, $S(x, y) \doteq (0, x)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, formam um subconjunto l.i. em $L(\mathbb{R}^2)$.

Exercício 23. Sejam U, V, W espaços vetoriais, $T \in L(U, V)$ e $S \in L(V, W)$ tais que $N(T) = \{0\}$ e $N(S) = \{0\}$. Mostre que $N(S \circ T) = \{0\}$.