

Exercício 1. Determinar as coordenadas do vetor $u \doteq (-1, 8, 5) \in \mathbb{R}^3$ em relação a cada uma das bases de $\mathbb{R}^3$ abaixo;

- (a) base canônica de $\mathbb{R}^3$.
- (b) $\beta \doteq \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$.
- (c) $\gamma \doteq \{(1, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 4)\}$.

Exercício 2. Determinar as coordenadas do polinômio $p \in P_3(\mathbb{R})$, dado por

$$p(t) \doteq 10 + t^2 + 2t^3, \quad t \in \mathbb{R}$$

em relação as seguintes bases de $P_3(\mathbb{R})$;

- (a) base canônica de $P_3(\mathbb{R})$.
- (b) $\beta \doteq \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, onde

$$q_0(t) \doteq 1, \quad q_1(t) \doteq 1 + t, \quad q_2(t) \doteq 1 + t + t^2, \quad q_3(t) \doteq 1 + t + t^2 + t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (c) $\gamma \doteq \{r_0, r_1, r_2, r_3\}$, onde

$$r_0(t) \doteq 4 + t, \quad r_1(t) \doteq 2, \quad r_2(t) \doteq 2 - t^2, \quad r_3(t) \doteq t + t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercício 3. Determinar as coordenadas do vetor $A \doteq \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} \in M_2$ em relação as seguintes bases de $M_2(\mathbb{R})$:

- (a) base canônica de $M_2(\mathbb{R})$.
- (b) $\beta \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Exercício 4. Encontre uma base de $M_2(\mathbb{R})$ que contenha

$$S \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercício 5. Verifique que as coordenadas de $p \in P_n(\mathbb{R})$ com relação à base $\beta \doteq \{p_0, p_2, \dots, p_n\}$, onde

$$p_0(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq x, \quad p_2(x) \doteq x^2, \dots, p_n(x) \doteq x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

é

$$\begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \frac{1}{2!}p''(0) \\ \vdots \\ \frac{1}{n!}p^{(n)}(0) \end{pmatrix},$$

onde $p^{(k)}(0)$ denota a k -ésima derivada do polinômio p calculado em $x = 0$.

Exercício 6.

- (a) Determinar as coordenadas do vetor $p \in P_2(\mathbb{R})$ em relação à base $\beta \doteq \{p_1, p_2, p_3\}$ de $P_2(\mathbb{R})$, onde

$$p(x) \doteq x^2, \quad p_1(x) \doteq 1, \quad p_2(x) \doteq 2 - x, \quad p_3(x) \doteq 2 + x + x^2 \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (b) Determinar as coordenadas do vetor $1 - 2i \in \mathbb{C}$ em relação à base $\beta \doteq \{1 - i, 1 + i\}$ de $\mathbb{C}$.

Exercício 7. Sejam

$$\beta \doteq \{(1, 0), (0, 1)\}, \quad \beta_1 \doteq \{(-1, 1), (1, 1)\}, \quad \beta_2 \doteq \{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)\}$$

bases de $\mathbb{R}^2$.

- (a) Determinar as coordenadas do vetor $(3, 2)$ em relação à base β , em relação à β_1 e em relação à base β_2 ?
- (b) Encontre as matrizes de mudança da base β para a base β_1 , da base β_1 para a base β_2 e da base β para a base β_2 .
- (c) Existe alguma relação entre as matrizes de mudança de bases encontradas no item (b)? Qual?

Exercício 8. Seja β é uma base de um espaço vetorial V . Qual é a matriz de mudança da base β para a base β ?

Exercício 9. Seja V o espaço das matrizes 2×2 triangulares superiores. Sejam

$$\beta \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \gamma \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

duas bases de V .

(a) Encontre as coordenadas do vetor $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ em relação às base β e em relação à base γ .

(b) Encontre as matrizes de mudança da base β para a base γ e a da base γ para a base β .

Exercício 10. A matriz de mudança de uma base β do $\mathbb{R}^2$ para a base $\beta_1 \doteq \{(1, 1), (0, 2)\}$ desse mesmo espaço é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determine a base β .

Exercício 11. A matriz de mudança da base $\beta \doteq \{p_1, p_2\}$ para uma base γ , ambas de um mesmo subespaço W de $P_2(\mathbb{R})$, é $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, onde

$$p_1(x) \doteq 1 + x, \quad p_2(x) \doteq 1 - x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Determine a base γ .

Exercício 12. Considere as bases $\beta \doteq \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\gamma \doteq \{g_1, g_2, g_3\}$ de um espaço vetorial V relacionadas da seguinte forma

$$\begin{cases} g_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ g_2 = 2e_2 + 3e_3 \\ g_3 = 3e_1 + e_3 \end{cases}$$

(a) Determine as matrizes mudança da base β para a base γ , isto é, $M_{\beta\gamma}$, e da base γ para a base β , isto é, $M_{\gamma\beta}$.

(b) Se a matriz das coordenadas do vetor $v \in V$ em relação a base β , isto é, $[v]_\beta$, é dada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ encontrar a matriz das coordenadas do vetor v em relação a base γ , isto é, $[v]_\gamma$.

(c) Se a matriz das coordenadas do vetor $v \in V$ em relação a base γ , isto é, $[v]_\gamma$, é dada por $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ encontre a matriz das coordenadas do vetor v em relação a base β , isto é, $[v]_\beta$.

Exercício 13. Considere as bases ordenadas $\beta \doteq \{p_0, p_1, p_2\}$ e $\gamma \doteq \{q_0, q_1, q_2\}$ do espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$, onde

$$p_0(t) \doteq 1, \quad p_1(t) \doteq 1 + t, \quad p_2(t) \doteq 1 + t^2$$

e

$$q_0(t) \doteq t^2, \quad q_1(t) \doteq t, \quad q_2(t) \doteq 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Encontre as matrizes de mudança da base β para a base γ , isto é $M_{\beta\gamma}$, e da base γ para a base β , isto é $M_{\gamma\beta}$.

(b) Se $[v]_\beta \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ encontre $[v]_\gamma$.

(c) Se $[v]_\gamma \doteq \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ encontre $[v]_\beta$.

(d) Se a base $\delta \doteq \{r_o, r_1, r_2\}$ é a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$, encontre as matrizes de mudança da base β para a base δ e da base δ para a base γ , isto é, $M_{\beta\delta}$ e $M_{\delta\gamma}$, respectivamente.

Exercício 14. Considere W o seguinte subespaço vetorial do espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$

$$W \doteq \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2; x - y - z = 0 \right\}.$$

(a) Mostre que

$$\beta \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\gamma \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

são bases do subespaço vetorial W .

(b) Encontre as matrizes de mudança da base β para a base γ e da base γ para a base β , isto é, $M_{\beta\gamma}$ e $M_{\gamma\beta}$, respectivamente.

(c) Encontre uma base δ do subespaço vetorial W , tal que a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

seja a matriz de mudança da base δ para a base β , isto é, $P = M_{\delta\beta}$.

- Gabarito do Monitor Jean: 1. (a) (-1,8,5), (b) (-3,9,-1), (c) $1/3(-8,5,5)$. 2. (a) (10,0,1,2), (b) (10,-1,-1,2), (c) (-2,10,-1,2). 3. (a) (2,5,-8,7), (b) (-3,13,-15,-8). 4. $S \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. 6. (a) (-4,1,1), (b) (3/2,-1/2). 7. (a) (3,2), (-1/2,5/2) e $1/2(\sqrt{3} + 2, \sqrt{3} - 2)$, (b) $M_{\beta\beta_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{\beta_1\beta_2} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} & -1 - \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & -1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $M_{\beta\beta_2} = 1/2 \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, (c) Sim. $M_{\beta\beta_2} = M_{\beta\beta_1} \cdot M_{\beta_1\beta_2}$. 8. $M_{\beta\beta} = Id$. 9. (a) (1,2,4) e (-1,-2,4), (b) $M_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $M_{\gamma\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 10. $\{(1, -1/3), (0, 2/3)\}$. 11. $\{2 + x - x^2, 1 + 2x - x^2\}$. 12. (a) $M_{\beta\gamma} = 1/17 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $M_{\gamma\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -6 \\ -1 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$. 13. (a) $M_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $M_{\gamma\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $M_{\beta\delta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 14. (b) $M_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $M_{\gamma\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.