

Exercício 1. Verifique se em cada um dos itens abaixo o subconjunto W é um subespaço vetorial do espaço vetorial V . Caso não sejam especificadas, considere as operações em V como sendo as operações usuais.

- (a) $V \doteq M_2, W \doteq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} : a, b, c, \in \mathbb{R} \right\}$.
- (b) $V \doteq \mathbb{R}^4, W \doteq \{(x, x, y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- (c) $V \doteq P_n(\mathbb{R}), W \doteq \{p \in P_n(\mathbb{R}) : p(0) = p(1)\}$.
- (d) $V \doteq M_n(\mathbb{R})$, seja $B \in M_n$ fixa, defina $W \doteq \{A \in M_n : BA = 0\}$.
- (e) $V \doteq \mathbb{R}^n, W \doteq \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$, onde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ são fixados.
- (f) $V \doteq M_{n \times 1}(\mathbb{R}), W \doteq \{X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) : AX = 0\}$, onde $A \in M_{m \times n}$ é fixada.
- (g) $V \doteq P_n(\mathbb{R}), W \doteq \{p \in P_n(\mathbb{R}) : p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.
- (h) $V \doteq M_n(\mathbb{R}), W \doteq \{A \in M_n : A^t = A\}$.
- (i) $V \doteq M_n(\mathbb{R}), W \doteq \{A \in M_n : A^t = -A\}$.
- (j) $V \doteq C^\infty(\mathbb{R} : \mathbb{R}), W \doteq \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R} : \mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \right\}$.
- (k) $V \doteq F(\mathbb{R} : \mathbb{R}), W \doteq \{f \in F(\mathbb{R} : \mathbb{R}) : f(x_0) = 0\}, x_0 \in \mathbb{R}$.

Exercício 2. Quais dos seguintes subconjuntos W de $\mathbb{R}^n$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$? Justifique sua resposta.

- (a) $W \doteq \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \in \mathbb{Z}\}$.
- (b) $W \doteq \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$.
- (c) $W \doteq \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \text{ é irracional}\}$.

Exercício 3. Quais dos seguintes subconjuntos abaixo são subespaços vetoriais de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$? Justifique sua resposta.

- (a) Todas as funções $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ tais que $f(x^2) = f(x)^2, x \in \mathbb{R}$.
- (b) Todas as funções $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ tais que $f(0) = f(1)$.
- (c) Todas as funções $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ tais que $f(-3) = 2 + f(1)$.
- (d) $W = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$.
- (e) $W = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(1) = 2f(5)\}$.

Exercício 4. Seja V o espaço vetorial de todas as matrizes quadradas de ordem n , munido das com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de número real por matrizes. Qual dos seguintes subconjuntos de matrizes em V são subespaços vetoriais de V ? Justifique sua resposta.

- (a) Todas as matrizes de V que são inversíveis.
- (b) Todas as matrizes de V que não inversíveis
- (c) Todas as matrizes $A \in V$ tais que $AB = BA$, onde $B \in V$ é uma matriz fixada.
- (d) Todas as matrizes de V que são diagonais.
- (e) Todas as matrizes $A \in V$ tais que $\det(A) = 0$.

Exercício 5. Defina $V_p = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é uma função par}\}$ e $V_i = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é uma função ímpar}\}$.

- (a) Mostre que V_p e V_i são subespaços vetoriais de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
- (b) Mostre que $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = V_p \oplus V_i$.

Exercício 6. Diga, em cada um dos itens abaixo, se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta (isto é, provando se for verdadeira ou dando um contra-exemplo se for falsa).

- (a) Se W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de um espaço vetorial V então $W_1 \cup W_2$ é subespaço de V .
- (b) Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V .
 $W_1 \cup W_2$ é subespaço vetorial de V se, e somente se, $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$. (Sugestão: mostre que se W é subespaço de V e $x_o, y_o \in V$ são tais que $x_o \in W$ e $y_o \notin W$ então $x_o + y_o \notin W$ e use-o.)

Exercício 7. Em cada item abaixo encontrar os subespaços vetoriais $U + W$ e $U \cap W$, onde U, W são subespaços do espaço vetorial V indicado.

- (a) $V = \mathbb{R}^2$, $U \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, $W \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\}$.
 (b) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U \doteq \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $W \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\}$.
 (c) $V \doteq P_3(\mathbb{R})$, $U \doteq \{p \in V : p''(t) = 0\}$, $W \doteq \{q \in V : q'(t) = 0, t \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 8. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se $V = U \oplus W$.

- (a) $V \doteq \mathbb{R}^2$, $U \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$, $W \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$.
 (b) $V \doteq M_3(\mathbb{R})$, $U \doteq \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, $W \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ f & g & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix} : e, f, g, h, i \in \mathbb{R} \right\}$.
 (c) $V \doteq P_3(\mathbb{R})$, $U \doteq \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(1) = p(0) = 0\}$, $W \doteq \{q \in P_3(\mathbb{R}) : q'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 9. Em cada um dos itens abaixo, dado U subespaço vetorial do espaço vetorial V , encontrar o subespaço suplementar de U (isto é, o subespaço vetorial W do espaço vetorial V tal que $V = U \oplus W$).

- (a) $V \doteq \mathbb{R}^3$, $U \doteq \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
 (b) $V \doteq P_3(\mathbb{R})$, $U \doteq \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p''(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.
 (c) $V \doteq M_3$, $U \doteq \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A^t = A\}$.
 (1) $V \doteq M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$, $U \doteq \{X \in M_{2 \times 1}(\mathbb{R}) : AX = 0\}$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 10. Os polinômios p_1 e p_2 , dados por:

$$p_1(x) \doteq 5 + 9x + 5x^2, \quad p_2(x) \doteq 2 + 6x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

estão no subespaço gerado pelos polinômios q_1, q_2, q_3 , onde

$$q_1(x) \doteq 2 + x + 4x^2, \quad q_2(x) \doteq 1 - x + 3x^2, \quad q_3(x) \doteq 3 + 2x + 5x^2, \quad x \in \mathbb{R} ?$$

Justifique sua resposta.

Exercício 11. Sejam $U \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$, $V \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ e $W \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

- (a) Mostre que U, V e W são subespaços de $\mathbb{R}^3$.
 (b) Mostre que $U + V = \mathbb{R}^3$, $U + W = \mathbb{R}^3$ e $W + V = \mathbb{R}^3$. Em algum caso a soma é direta? Justifique sua resposta.

Exercício 12.

- (a) Mostre que o subconjunto de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes anti-simétricas é um subespaço vetorial de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.
 (b) Mostre que o subconjunto de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes simétricas é um subespaço vetorial de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.
 (c) Mostre que $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é soma direta dos subespaços das matrizes simétricas e anti-simétricas.