Fibrações de Milnor de Singularidades Analíticas Reais [1]

Raimundo Nonato Araújo dos Santos

Orientadora: ***Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas***

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC - USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

USP - São Carlos-SP
Abril/2002

[1]Este trabalho foi completamente financiado pelo CNPq

" $\mathcal{A}$ $\mathcal{MEUS}$ $\mathcal{PAIS}$: Andremaria Santos e Antonio Carlos, *in memoriam.*"

Resumo

Neste trabalho estudamos a fibração de Milnor associada a singularidades isoladas reais definidas por germes de aplicações $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$. O principal resultado relaciona a existência da fibração de Milnor com a $(c)-$regularidade da família de hipersuperfícies com singularidade isolada obtida projetando f sobre a família $L_{-\theta}$ de todas as retas pela origem no plano $\mathbb{R}^2$. Estudamos também famílias de germes de funções analíticas com singularidades isoladas. O objetivo é encontrar condições suficientes para a trivialidade topológica das famílias e a equivalência das fibrações de Milnor associadas a elas.

Abstract

In this work we study the Milnor's fibrations associated to real isolated singularities defined by map-germs $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$. The main result relates the existence of the Milnor's fibration with the $(c)-$regularity of the family of hypersurfaces with isolated singularity obtained by projecting f into the family $L_{-\theta}$ of all lines through the origin in the plane $\mathbb{R}^2$. We also study families of germs of analytic functions with isolated singularities. The aim is to get sufficient condition for the topological triviality of the families and the equivalence of the Milnor fibrations associated to them.

Índice

Introdução

No final da década de 60, mais precisamente em 1968, John Milnor lançou seu livro **"Singular Points of Complex Hypersurfaces"**, no qual estuda a topologia de uma variedade analítica numa vizinhança de um ponto crítico. Ele demonstra dois teoremas de fibração, um para germes de funções holomorfas e o outro para germes de aplicações analíticas reais.

No caso complexo, Milnor mostra que dado um germe de função holomorfa $\psi : \mathbb{C}^n, 0 \to \mathbb{C}, 0$, com singularidade isolada na origem, existe um $\epsilon_0 > 0$, suficientemente pequeno, tal que, para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, a aplicação

$$\varphi := \frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\epsilon^{2n-1} \setminus K_\epsilon \to S^1$$

é a projeção de um fibrado localmente trivial, onde $K_\epsilon := \psi^{-1}(0) \cap S_\epsilon^{2n-1}$, é o link da singularidade.

No caso real, dizemos que um germe de aplicação polinomial $\psi : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$, $n \geq p \geq 2$, satisfaz à **condição de Milnor** se existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ da origem, tal que ψ tem posto máximo em $U \setminus \{0\}$. Milnor mostrou que existe um $\epsilon_0 > 0$, suficientemente pequeno, tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, a aplicação $\varphi := \frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\epsilon^{n-1} \setminus N_{K_\epsilon} \to S^{p-1}$ é a projeção de um fibrado localmente trivial, onde N_{K_ϵ} é uma vizinhança tubular de $K_\epsilon := \psi^{-1}(0) \cap S_\epsilon^{n-1}$ na esfera S_ϵ^{n-1}.

Milnor observa que sempre podemos provar que o complementar inteiro $S_\epsilon^{n-1} \setminus K_\epsilon$ também fibra sobre S^{p-1}, mas não é verdade em geral que a aplicação projeção ainda permanece do tipo $x \mapsto \frac{\psi(x)}{\|\psi(x)\|}$. Como exemplo, exibe a seguinte aplicação:

$$\begin{cases} P = x \\ Q = x^2 + y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Quando podemos estender o fibrado à $S_\epsilon^{n-1} \setminus K_\epsilon$, mantendo a aplicação $\frac{\psi}{\|\psi\|}$ como projeção do fibrado, dizemos que a aplicação é do **tipo Milnor Forte**.

Essa condição **Milnor Forte** foi estudada pela primeira vez por A. Jacquemard, no final da década de 80, no artigo **" Fibrations de Milnor pour des applications réelles"** [Ja]. Ele propõe duas condições suficientes, uma geométrica e outra algébrica, para que um germe de aplicação analítica $\psi : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ tenha uma fibração deste tipo. Um problema, na prática, é verificar quando um dado germe satisfaz suas hipóteses, já que ele exibe poucos exemplos de aplicações que as satisfazem.

Em [[S1], [S2]], Seade dá uma construção que fornece famílias infinitas de singularidades isoladas reais $\psi : \mathbb{C}^n, 0 \to \mathbb{C}, 0$ satisfazendo à condição Milnor forte na origem, da seguinte forma: dado um germe em $0 \in U \subset \mathbb{C}^n$ de campo de vetores holomorfos F e X, a função $\psi_{F,X} : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, definida por $\psi_{F,X}(z) = \langle F(z), X(z) \rangle = \sum_{i=1}^n F_i(z).\overline{X_i(z)}$, é analítica real, e podemos perguntar em que condições esta aplicação tem singularidade isolada e satisfaz à condição acima na origem. Uma classificação completa de tais exemplos quando F e X são campos de vetores monomiais é dada em [RSV].

Neste trabalho usamos o método de Seade para dar uma condição suficiente para que um germe de aplicação analítica real $\psi : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$, com singularidade isolada em 0 satisfaça à condição Milnor forte. Seja $\pi_\theta : \mathbb{C} \to L_{-\theta}$ a projeção linear sobre a reta $L_{-\theta}$, formando um ângulo $-\theta$ com o eixo horizontal em $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Nosso principal resultado estabelece que se a família $\psi_\theta = \pi_\theta \circ \psi$ satisfaz à condição de $(c)-$regularidade de K. Bekka, então ψ satisfaz à condição Milnor forte. Como uma consequência deste resultado podemos provar que as hipóteses de Jacquemard são equivalentes a $(w)-$regularidade da família ψ_θ. Estudamos também famílias de germes de aplicações analíticas com singularidades isoladas. O objetivo é obter condições suficientes para a trivialidade topológica destas famílias e a equivalência das fibrações de Milnor a elas associadas.

No **primeiro capítulo** deste trabalho revemos fatos básicos sobre diagrama de Newton e fecho integral de ideais, e enunciamos um resultado de M.Saia [Ma], que relaciona o fecho integral de um ideal Newton não-degenerado com o ideal gerado por monômios cujos expoentes aparecem nas faces do diagrama de Newton.

No **capítulo 2**, relembramos os teoremas de fibração de Milnor [Mi], e mostramos que para germes analíticos a condição de Milnor é determinada por um jato de ordem finita. Enunciamos um resultado devido a Ruas, Seade e Verjovski, dado em [RSV], para fibrações do tipo quase-homogêneas, o qual fornece ordens precisas para perturbações que preservam a condição de Milnor. Finalizamos com uma caracterização de singularidade do tipo Milnor em $\mathbb{C}$, e mostramos como reobter a partir deste exemplo, uma das famílias classificadas em [RSV].

No **capítulo 3**, apresentamos o resultado de A. Jacquemard e provamos um primeiro resultado sobre a condição Milnor forte para germes cujos gradientes das funções coordenadas são quase-homogêneos.

O **capítulo 4**, contém os principais resultados do trabalho. No Teorema 4.2.2, relacionamos a existência da fibração de Milnor com a $(c)-$regularidade da família ψ_θ de hipersuperfícies com singularidade isolada, obtida por projeções sobre a família de retas no plano passando pela origem. Mostramos ainda que a $(w)-$regularidade desta família é condição equivalente às condições de Jacquemard. Discutimos exemplos que mostram que a classe das singularidades que satisfazem à condição Milnor forte contém propriamente a classe das singularidades cujas famílias ψ_θ associadas satisfazem à condição de $(c)-$regularidade; a qual, por sua vez, contém propriamente aquelas que satisfazem às condições (A) e (B) de Jacquemard.

No último capítulo, o **capítulo 5**, verificamos como se comportam as fibrações do tipo Milnor forte, ao longo de famílias de aplicações analíticas reais com singularidade isolada. Mostramos que as famílias que satisfazem às hipóteses de Jacquemard são topologicamente triviais e as fibrações de Milnor associadas são equivalentes. Além disso, para germes cujas funções coordenadas possuem gradientes Newton não-degenerados, mostramos que a condição Milnor forte e o tipo topológico da fibração permanecem invariantes por pertubações por termos de filtração maior ou igual à filtração de Newton do germe inicial.

Capítulo 1

Preliminares

Vamos introduzir neste capítulo as notações e definições básicas, usualmente utilizadas na Teoria de Singularidades.

Seja $\mathcal{A}_n = \{f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}, 0\}$, o conjunto dos germes na origem de funções analíticas reais. É conhecido que $\mathcal{A}_n$ é um anel local cujo ideal maximal denotamos $\mathcal{M}_n$.

Mais geralmente, $\mathcal{A}(n,p) = \{f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0\}$, onde f é uma aplicação analítica real, é um módulo sobre o anel $\mathcal{A}_n$. Em particular, quando $p = 1$, temos $\mathcal{A}(n,1) = \mathcal{A}_n$.

Indicaremos por $\mathcal{O}_n = \{f : \mathbb{C}^n, 0 \to \mathbb{C}, 0\}$, o anel dos germes na origem de funções holomorfas.

Neste trabalho estaremos especialmente interessados no módulo $\mathcal{A}(n,p)$, quando $p = 2$. Todo elemento $f \in \mathcal{O}_n$ pode ser considerado como um elemento em $\mathcal{A}(n,2)$.

Considere $\mathcal{C}^l - \mathcal{R} = \{h : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^n, 0\}$, onde h é um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^l$, $0 \leq l \leq \infty$. Com a operação de composição, $\mathcal{C}^l - \mathcal{R}$ é um grupo, também conhecido como o grupo de mudança de coordenadas $\mathcal{C}^l$ na fonte.

Para cada $0 \leq l \leq \infty$, existe uma ação natural do grupo $\mathcal{C}^l - \mathcal{R}$ à direita no espaço dos germes de classe $\mathcal{C}^l$, mas estaremos interessados na restrição desta ação ao módulo $\mathcal{A}(n,p)$.

Definição 1.0.1 *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ germes de aplicações analíticas. Dizemos que f e g são $\mathcal{C}^l - \mathcal{R}$-equivalentes, e denotamos $f \underset{\mathcal{C}^l - \mathcal{R}}{\backsim} g$, se existe um germe de difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^l$, $l \geq 0$, $h : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$, tal que $g = f \circ h^{-1}$.*

Definição 1.0.2 *Um elemento $f \in \mathcal{A}(n,p)$ é $k - \mathcal{C}^l - \mathcal{R}-$ determinado se $\forall g \in \mathcal{A}(n,p)$*

tal que $j^k f(0) = j^k g(0)$*, então* $f \underset{\mathcal{C}^l - \mathcal{R}}{\backsim} g$*. Dizemos que* f *é finitamente determinado se* f *é* k*-determinado para algum* k*.*

Dada $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ denotamos por $\mathrm{I}_{\mathcal{R}} f$ o ideal de $\mathcal{A}_n$ gerado pelos menores $p \times p$ da matriz jacobiana de f, e por $\mathrm{N}_{\mathcal{R}} f(x) = |df(x)|^2 = \sum_j \mathrm{M}_j^2$, onde os M_j são os geradores de $\mathrm{I}_{\mathcal{R}} f$.

Definição 1.0.3 *Dizemos que* f *satisfaz a uma condição de Lojasiewicz, se existem constantes positivas* c *e* α *tais que* $\|f(x)\| \geq c\|x\|^\alpha$*, numa vizinhança da origem.*

A seguinte proposição resulta do trabalho de vários autores ([K], [Ku], [BL]). Veja [W] para um survey sobre o assunto.

Proposição 1.0.1 *Seja* $f \in \mathcal{A}(n, p)$*. São equivalentes:*

(a) $\sum_f = \{0\}$*, onde* $\sum_f$ *denota o germe do conjunto singular de* f*.*

(b) $\mathrm{N}_{\mathcal{R}} f(x)$ *satisfaz a uma condição de Lojasiewicz;*

(c) f *é* $\mathcal{C}^l - \mathcal{R}-$*finitamente determinado para todo* $l \in [0, \infty)$*.*

Para estimativas para o grau de $\mathcal{C}^l-$determinação finita, veja [RS], [R].

1.1 Fecho Integral

Vamos relembrar a noção de fecho integral de um ideal. As principais referências para esta seção são [Te], [Ma], [CR].

Definição 1.1.1 *Seja* I *um ideal do anel* A*, então* $h \in A$ *está no fecho integral de* I*, denotado por* $\overline{I}$*, se existe um polinômio mônico* $P(z) = z^n + \sum_i a_i z^i$*,* $a_i \in I^{n-i}$*, tal que* $P(h) = 0$*.*

Quando o anel $A = \mathcal{O}_n$, Teissier [Te] exibiu várias noções que são equivalentes:

Teorema 1.1.1 ([Te]) *Seja* I *um ideal em* $\mathcal{O}_n$*. São equivalentes:*

(1) $h \in \overline{I}$.

(2) **(Condição de Crescimento)** *Para cada escolha de geradores g_i de I existem uma vizinhança U de 0 e uma constante $C > 0$ tal que para todo $x \in U$:*
$|h(x)| \leq C. \sup_i |g_i(x)|$

(3) **(Critério Avaliativo)** *Para cada curva analítica $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$,*
$h \circ \varphi \in (\varphi^*(I))\mathcal{O}_1$.

(4) *Existe um módulo fiel M sobre $\mathcal{O}_n$ tal que $h.M \subset I.M$.*

A definição algébrica de fecho integral não é a mais adequada para o estudo de germes analíticos reais, como observou Gaffney em [Ga]. Por exemplo, considerando o ideal $I = (x^2 + y^2)$ em $\mathcal{A}_2$, esperamos pela condição (3) e (4) acima, que o fecho integral real seja $\mathcal{M}_2^2 = (x^2, xy, y^2)$, mas verifica-se que $\mathcal{M}_2^2$ contém propriamente $\overline{I}$.

Como estaremos interessados em germes de aplicações analíticas reais, vamos introduzir a definição de **fecho integral real** dada por Gaffney em [Ga].

Definição 1.1.2 *Dado $h \in \mathcal{A}_n$, $h \in \overline{I}_{\mathbb{R}}$, e lê-se h está no fecho integral real de I, se para qualquer curva analítica real $\varphi : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$, temos que*

$\nu(h \circ \varphi) \geq \min_i \nu(g_i \circ \varphi)$; $I = (g_1, ..., g_s)$,

onde ν é a valoração canônica no anel das séries de potências convergentes na origem.

Observamos que a definição acima é equivalente a dizer que para toda curva analítica real, $\varphi : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ temos $h \circ \varphi \in (\varphi^*(I))\mathcal{A}_1$. Gaffney prova em [Ga] que a equivalência (2) $\Longleftrightarrow$ (3) ainda é verdadeira para ideais em $\mathcal{A}_n$

1.2 Diagrama de Newton

Dado um germe $f(x) = \Sigma a_i x^i$ em $\mathbb{R}^n$, o suporte de f é definido por $supp(f) = \{j \in \mathbb{Z}^n; a_j \neq 0\}$.

Definição 1.2.1 *Seja I um ideal de $\mathcal{O}_n$. Definimos $supp(I) = \bigcup\{suppf : f \in I\}$ e, $E(I) = \bigcup\{k + v : k \in supp(I),\ v \in \mathbb{R}^n_+\}$.*

Definição 1.2.2 *O diagrama (ou poliedro) de Newton de I, denotado por $\Gamma_+(I)$, é o fecho convexo em $\mathbb{R}^n_+$ do conjunto $E(I)$. Denotaremos por $\Gamma(I)$ a união das faces compactas de $\Gamma_+(I)$.*

Considere $I = \langle g_1, ..., g_s \rangle$ um ideal finitamente gerado e de codimensão finita em $\mathcal{O}_n$.

Dado um vetor $v \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$, definimos $l(v) = \min\{\langle k, v\rangle : k \in \Gamma_+(I)\}$.

Uma definição formal para a face de um poliedro é a seguinte: um subconjunto Δ de $\Gamma_+(I)$ é uma face quando existe $v \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ tal que $\Delta = \{k \in \Gamma_+(I) : \langle k, v\rangle = l(v)\}$. Nesse caso, v define a face Δ. Quando v é o vetor de menor comprimento que define Δ e pertence ao conjunto $(\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}) \bigcap \mathbb{Z}^n_+$, v é chamado um vetor primitivo para Δ.

Dado um subconjunto finito $\Delta \subset \Gamma_+(I)$, para qualquer germe $f(x) = \sum a_i x^i$, definimos $f_\Delta = \Sigma_{k\in\Delta} a_k x^k$. Se Δ é uma face de $\Gamma_+(I)$, $C(\Delta)$ denota o cone formado pelos semi-raios saindo da origem e passando por Δ.

Como I é um ideal de codimensão finita em $\mathcal{O}_n$ e $\Gamma_+(I)$ é um poliedro convexo em $\mathbb{R}^n_+$, a coleção de todos $C(\Delta)$ dá uma decomposição poliedral para $\mathbb{R}^n_+$.

Antes de construirmos a filtração de Newton em $\mathcal{O}_n$, vamos lembrar da filtração homogênea. Dado um germe $f(x) = \sum a_k x^k \in \mathcal{O}_n$, escrevemos $f = f_d + f_{d+1} + ...$ em que f_i é uma forma de grau i, isto é, um polinômio homogêneo de grau i. O grau de homogeneidade é medido pela valoração $v_h : \mathcal{O}_n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $v_h(f) = \min\{\varphi(k) : k \in supp(f)\}$ em que $\varphi : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\varphi(k) = \varphi(k_1, ..., k_n) = k_1 + ... + k_n$. O conjunto $\varphi^{-1}(d)$, que denotamos por Δ_1 é a face de nível d da filtração homogênea. Observamos que a função φ satisfaz as seguintes propriedades:

(1) φ é linear em $C(\Delta_1)$

(2) φ assume valores inteiros positivos em $\mathbb{Z}^n_+ \bigcap \mathbb{R}^n_+$

(3) φ é constante na face compacta Δ_1

Para generalizarmos esta idéia, fixamos um poliedro $\Gamma_+(I)$ e definimos a seguinte aplicação

$$\Phi : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

satisfazendo:

(1) para cada face Δ de $\Gamma_+(I)$,Φ é linear em $C(\Delta)$,

(2) Φ assume valores inteiros positivos em $\mathbb{Z}^n_+ \bigcap \mathbb{R}^n_+$,

(3) existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\Phi \mid_{\Gamma(I)} = p$.

Definimos $fil : \mathcal{O}_n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ com $fil(f) = \inf\{\Phi(k) : k \in supp(f)\}$. Como $supp(0) = \varnothing$, convencionamos então $fil(0) = \infty$.

Lema 1.2.1 *fil é uma função de ordem em $\mathcal{O}_n$.*

A demonstração do Lema acima, é de fácil verificação, mas para uma prova direta e fácil, assim como uma melhor apresentação sobre o assunto, convido o leitor a consultar [CR].

Definimos para cada $\Delta \subset \Gamma(I)$, o anel $C[[\Delta]]$, consistindo das séries de potências com monômios não nulos $x^s = x_1^{s_1}...x_n^{s_n}$ tais que $s = (s_1, ..., s_n) \in C(\Delta)$.

Considere ainda $I = (g_1, ..., g_s)$, finitamente gerado em $\mathcal{O}_n$.

Definição 1.2.3 *Dado um ideal I em $\mathcal{O}_n$, denotamos por $C(\overline{I})$ o fecho convexo em $\mathbb{R}^n_+$ do conjunto $\{k \in \mathbb{N}^n \mid x^k \in \overline{I}\}$*

Definição 1.2.4 *Uma face compacta $\Delta \subset \Gamma(I)$ é Newton não-degenerada se o ideal gerado por $g_{1_\Delta}, ..., g_{n_\Delta}$ tem codimensão finita em $C[[\Delta]]$.*

Definição 1.2.5 *Um ideal I é Newton não-degenerado se cada face compacta $\Delta \subset \Gamma(I)$ é Newton não-degenerada.*

Observamos que a definição acima é equivalente ao seguinte:

I é Newton não-degenerado se para cada face compacta $\Delta \subset \Gamma(I)$, a equação $g_{1_\Delta} = ... = g_{n_\Delta} = 0$ não tem solução comum em $(\mathbb{C} - \{0\})^n$.

O principal resultado, devido a Marcelo Saia [Ma], que usaremos neste trabalho caracteriza os ideais Newton não-degenerados em função do fecho integral, para os ideais finitamente gerados e de codimensão finita em $\mathcal{O}_n$.

Teorema 1.2.2 ([Ma]) *Seja $I = \langle g_1, ..., g_s \rangle$ um ideal de codimensão finita em $\mathcal{O}_n$. Então, I é Newton não-degenerado se e somente se, $\Gamma_+(I) = C(\overline{I})$.*

Observação: Os conceitos desta seção se estendem para germes e ideais em $\mathcal{A}_n$. O Teorema 1.2.2 também permanece verdadeiro em $\mathcal{A}_n$. Isto é, se $I \subset \mathcal{A}_n$ é um ideal de codimensão finita Newton não-degenerado, então $\Gamma_+(I) = C(\overline{I})$ ([Ma1]).

Capítulo 2

Fibração de Milnor

Seja $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada. Considere $V := f^{-1}(0)$, $S_\epsilon := \{z \in \mathbb{C}^n / |z| = \epsilon\}$ e $K_\epsilon := f^{-1}(0) \cap S_\epsilon$(link da singularidade). Em seu livro "Singular Points of Complex Hypersurfaces", 1968, John Milnor provou o seguinte:

Teorema 2.0.3 *Existe $\epsilon_0 > 0$, suficientemente pequeno, tal que $\varphi = \frac{f}{\|f\|} : S_\epsilon^{2n+1} \backslash K_\epsilon \to S^1$ é a projeção de um fibrado suave localmente trivial.*

Além disso, a fibra $F_\theta := \varphi^{-1}(\exp(i\theta))$ é uma $2n$-subvariedade real suave de S_ϵ, paralelizável e que tem o tipo de homotopia de um bouquet com $\mu(f)$ esferas S^n, onde $\mu(f)$ é o número de Milnor da singularidade, e a subvariedade K_ϵ é $(n-2)$-conexa.

Para o caso de singularidades reais, Milnor também provou um teorema de fibração que passamos a descrever:

Seja $f : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^k, 0)$ uma aplicação polinomial com $f(0) = 0$ tal que existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^m$, $0 \in U$ com $rank(Jf(x)) = k$, $\forall x \in U \setminus \{0\}$. Ou seja, f tem posto máximo numa vizinhança da origem, exceto possivelmente em 0.

Sabemos que, neste caso, $V := \{x \in \mathbb{R}^m / f_1(x) = ... = f_k(x) = 0\}$ é uma variedade suave de dimensão m-k em $(U \cap V) \backslash \{0\}$ ou é vazio. Além disso a interseção $K_\epsilon := V \cap S_\epsilon^{m-1}$ é uma variedade suave de dimensão=m-k-1, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Vamos supor de agora em diante que $k \geq 2$. O Teorema principal de Milnor neste caso é:

Teorema 2.0.4 *O complementar de uma vizinhança tubular aberta de K_ϵ em S_ϵ^{m-1} é* *o espaço total de um fibrado suave sobre a esfera S^{k-1}, cada fibra F sendo uma (m-k)-variedade compacta suave cujo bordo é uma cópia de K_ϵ.*

As demonstrações dos teoremas no caso real e complexo podem ser encontradas em [Mi]. Neste capítulo, apresentamos a teoria e algumas ferramentas básicas para o estudo de fibrações de Milnor Reais.

2.1 A Condição de Milnor

Vamos agora introduzir algumas definições e resultados que nos servirão para os próximos capítulos. As principais referências são [RS], [RSV] e [W].

Definição 2.1.1 *Dizemos que uma aplicação analítica $f : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^k, 0)$ satisfaz à condição ou hipótese de Milnor, ou é de Milnor, se existe uma vizinhança da origem $U \subset \mathbb{R}^m$ tal que $rank(Jf(x)) = k$ para todo $x \in U \setminus \{0\}$.*

Do ponto de vista da Teoria de Singularidades esta propriedade pode ser bem caracterizada através do conceito de $\mathcal{C}^l - \mathcal{R}-$equivalência, pela Definição 1.0.2 do capítulo 1.

A seguinte caracterização para a hipótese de Milnor é uma consequência imediata da **Proposição 1.0.1**.

Teorema 2.1.1 *Seja $f \in \mathcal{A}(m,p)$. São equivalentes:*

(a) *f satisfaz a uma condição de Milnor em 0;*

(b) *$\mathrm{N}_{\mathcal{R}} f(x)$ satisfaz a uma condição de Lojasiewicz;*

(c) *f é $\mathcal{C}^l - \mathcal{R}-$finitamente determinado para todo $l \in [0, \infty)$.*

Quando f é uma aplicação quase homogênea, existem estimativas precisas para a ordem das perturbações que preservam a condição de Milnor. Vejamos antes algumas definições e notações.

Definição 2.1.2 *Dados $r_1, ..., r_n; d_1, ..., d_p$, inteiros positivos, um elemento $f \in \mathcal{A}(n,p)$ é quase homogêneo do tipo $(r_1, ..., r_n : d_1, ..., d_p)$ se para todo $\lambda > 0$ temos: $f(\lambda^{r_1} x_1, ..., \lambda^{r_n} x_n) =$*

$(\lambda^{d_1} f_1(x), ..., \lambda^{d_p} f_p(x))$. Os números $r_1, ..., r_n$ são os pesos de $x_1, ..., x_n$. O inteiro $d = d_1 + ... + d_n$, é o peso total de f. Observamos que esses inteiros não são únicos.

Definição 2.1.3 *(i) Dados pesos $(r_1, ..., r_n)$ para $(x_1, ..., x_n)$, e um monômio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$, $\alpha = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, definimos sua filtração por: $fil(x^\alpha) = \sum \alpha_i x_i$.*

(ii) Dado $f \in \mathcal{A}_n$, sua filtração é: $fil(f) = \inf_\alpha \{fil(x^\alpha)/(\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha})(0) \neq 0\}$, onde $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$ significa a derivada parcial de f com respeito aos $x_{i's}$, com grau total α.

(iii) Dado $f = (f_1, ... f_p) \in \mathcal{A}(n, p)$, com $fil(f_i) = d_i$, a filtração de f é $fil(f) = (d_1, ..., d_p)$.

Neste caso temos:

Teorema 2.1.2 ([RS], Teorema 2.2) *Seja $f : \mathbb{R}^m, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ germe de aplicação polinomial quase homogêneo, do tipo $(r_1, ..., r_m; d_1, ..., d_p)$ com $r_1 \leq ... \leq r_m$, $d_1 \leq ... \leq d_p$, com singularidade isolada. Então:*

(a) Deformações de f definidas por $f_t(x) = f(x) + t\theta(x)$, $\theta(x) = (\theta_1, ..., \theta_p)$ com $fil(\theta_i) \geq d_i - r_1 + lr_m + 1$, para todo i, $l \geq 1$ e $t \in [0, 1]$ são $\mathcal{C}^l - \mathcal{R}-$triviais.

(b) Se f_t é uma deformação de f que é quase homogênea do mesmo tipo que f, então a família f_t é $\mathcal{C}^0 - \mathcal{R}-$trivial para t suficientemente pequeno.

2.2 Exemplos

Exemplos de germes $f : \mathbb{R}^{2m}, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ com singularidade isolada que não provêm de um germe de aplicação holomorfa $f : (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ com singularidade isolada são difíceis de serem encontrados.

Em [S1] e [S2], Seade descreve um método para construir tais exemplos e, em [RSV] são exibidas famílias de singularidades que satisfazem à condição de Milnor.

Sejam F e X germes de campos de vetores analíticos complexos em $(\mathbb{C}^n, 0)$. Defina a aplicação analítica real $\psi_{F,X} \in \mathcal{A}(2n, 2)$ dada por $\psi_{F,X} := \langle F, X \rangle$, onde $\langle , \rangle$ denota o produto hermitiano em $\mathbb{C}^n$. Assim,

$$\psi_{F,X} = \sum_i F_i(z).\overline{X_i(z)}.$$

Como uma consequência do **Teorema 2.1.2** temos:

Corolário 2.2.1 *Suponha que o germe de aplicação $\psi_{F,X}$ satisfaça à condição de Milnor em 0. Sejam F_* e X_* campos de vetores analíticos, obtidos respectivamente, adicionando a F e a X termos de grau suficientemente grande. Então a correspondente função ψ_{F_*,X_*} satisfaz à condição de Milnor em 0. Além disso, existe um germe de homeomorfismo $h : (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$ tal que $\psi_{F_*,X_*} = \psi_{F,X} \circ h^{-1}$.*

Sejam F e X campos monomiais $F(z) = (k_1 z_{\sigma_1}^{a_1}, ..., k_m z_{\sigma_m}^{a_m})$, $X(z) = (t_1 z_1^{b_1}, ..., t_m z_m^{b_m})$, onde os $k_{i's}$ e $t_{i's}$ são números complexos não nulos, $a_{i's}$, $b_{i's}$ são naturais e $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_m)$ é alguma permutação das coordenadas $(z_1, ..., z_m)$, em [RSV] é obtida uma classificação completa das $\psi_{F,X}$ que satisfazem à condição de Milnor.

Teorema 2.2.2 ([RSV], Teorema 2.2) *Suponha $a_i > 1$, $\forall i = 1, ..., m$. Então ψ satisfaz à condição de Milnor em $0 \in \mathbb{C}^m$ se, e somente se uma das seguintes condições é satisfeita:*

- (a) *A permutação σ é a identidade, ou seja, $F(z) = (k_1 z_1^{a_1}, ..., k_m z_m^{a_m})$ e $a_i \neq b_i$, para todo i.*
- (b) *Se σ se fatora em ciclos $\sigma_1, ..., \sigma_s$, tais que cada σ_j é uma permutação de comprimento θ_j com $\theta_1 + ... + \theta_s = m$, então para cada $j = 1, ..., s$ tal que $\theta_j = 1$, devemos ter que o correspondente expoente satisfaz $a_j \neq b_j$; para cada $j = 1, ..., s$ com $\theta_j > 1$, o expoente b_j correspondente a essas componentes são todos 1(ou 0).*

Vamos analisar no próximo exemplo em que condições um campo $F : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ dá origem a uma aplicação $\psi : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, $\psi(z) = \langle F(z), X(z) \rangle = F(z).\overline{X(z)}$, que satisfaz à condição de Milnor. É um exemplo simples, mas como consequência desta análise reobtemos o item (a) do **Teorema 2.2.2** acima. Além disso, podemos observar que a condição "Milnor"não é aberta, isto é, não permanece necessariamente verdadeira, por pequenas perturbações.

Exemplo 2.2.3 *Seja $F : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ holomorfa. Definamos $\psi(z) = F(z).\overline{X(z)}$, onde $X(z) = z$. Então:*

- (i) *Se $j^1 F(0) \neq 0 \Rightarrow \psi$ não é de Milnor.*
- (ii) *Se $j^1 F(0) = 0$ e $j^{n+1} F(0) \neq 0$, para algum $n \geq 1 \Rightarrow \psi$ é de Milnor.*

Vamos começar com $F : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, $F(z) = \alpha z$; $\alpha \in \mathbb{C}^*$, logo, $\psi(z, \overline{z}) = \langle F(z), z\rangle = \alpha z\overline{z} = \alpha|z|^2$. Temos,

$\psi_1 = Re(\psi) = (\alpha+\overline{\alpha})|z|^2$ e $\psi_2 = Im(\psi) = (\alpha-\overline{\alpha})|z|^2$. Calculando a matriz jacobiana, obtemos:

$D\psi = \begin{pmatrix} (\alpha+\overline{\alpha})\overline{z} & (\alpha+\overline{\alpha})z \\ (\alpha-\overline{\alpha})\overline{z} & (\alpha-\overline{\alpha})z \end{pmatrix} \therefore detD\psi(z,\overline{z}) = (\alpha+\overline{\alpha})\overline{z}(\alpha-\overline{\alpha})z - (\alpha+\overline{\alpha})z(\alpha-\overline{\alpha})\overline{z} = 0$, $\forall(z, \overline{z})$. Ou seja, ψ não é de Milnor.

Observamos que sendo $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorfa com $F(0) = 0$, $\psi(z, \overline{z}) = \langle F(z), z\rangle$, então $\det(D\psi(z, \overline{z}))= 2(|F|^2 - |DF|^2|z|^2)$.

Vamos agora considerar o caso geral:

$F(z) = \alpha z + \gamma(z)z^{n+1}$, onde , $\gamma(z) = a + bz + ...$ $\alpha, a, b \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$. Temos,

$DF(z, \overline{z}) = \alpha + \gamma_z(z)z^{n+1} + (n + 1)\gamma(z)z^n$. Logo,

$$\begin{aligned} \det(DF(z,\overline{z})) &= 2(|F|^2 - |DF|^2|z|^2) \\ &= |z|^2[-n\alpha\overline{\gamma_z(z)}\overline{z}^{n+1} - \alpha n\overline{\gamma(z)}\overline{z}^n - \overline{\alpha}\gamma_z(z)z^{n+1} \\ &- (n+1)\gamma(z)\overline{\gamma_z(z)}|z|^{2n}\overline{z} - (n^2+2n)|\gamma(z)|^2|z|^{2n}]. \end{aligned}$$

Facilmente se verifica que se $\alpha = 0$, já temos singularidade isolada na origem.

Sendo $\alpha \neq 0$, neste caso podemos tomar $\alpha = 1$, por um cálculo simples podemos mostrar que $det(DF(z, \overline{z})$ é uma curva analítica real passando pela origem. Para verificar isso basta analisar que $det(DF(z, \overline{z})$ tem uma reta tangente não degenerada na origem.

Assim, podemos concluir que: ψ_F é de Milnor se, e somente se, $j^1F(0) = 0$ e $j^{n+1}F(0) \neq 0$, para algum $n \geq 1$.

Dados os campos $F_i, X_i : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. Defina os campos $F : (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$ por $F(z_1, ..., z_m) = F_1(z_1) \bigoplus ... \bigoplus F_m(z_m) = (F_1(z_1), ..., F_m(z_m))$ e $X : (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$ por $X(z_1, ..., z_m) = X_1(z_1) \bigoplus ... \bigoplus X_m(z_m)$, com sua respectiva aplicação dada por $\psi_{F,X}$. Temos o seguinte resultado:

Proposição 2.2.1 *$\psi_{F,X}$ satisfaz a condição de Milnor se, e somente se, ψ_{F_i,X_i} for de Milnor para cada $i = 1, ..., m$.*

Fazendo $F_i(z_i) = k_i.z_i^{a_i}$, $X_i(z_i) = z_i^{b_i}$ na Proposição acima reobtemos a forma normal do Teorema 2.2 para $\sigma = Id$.

Capítulo 3

Fibração de Milnor Forte

Como vimos anteriormente, o teorema de Milnor para singularidades reais garante que se $\psi : \mathbb{R}^m, 0 \rightarrow \mathbb{R}^k, 0$ tem singularidade isolada, ψ admite uma fibração do tipo $\frac{\psi}{\|\psi\|} : S^{m-1} \setminus \mathrm{N}_K \rightarrow S^{k-1}$, onde N_K é uma vizinhança tubular do link K_ϵ na esfera S^{m-1}. Embora exista uma extensão $\varphi : S_\epsilon^{m-1} \setminus K_\epsilon \rightarrow S^{k-1}$ para a fibração associada à $\psi : \mathbb{R}^m, 0 \rightarrow \mathbb{R}^k, 0$, nem sempre esta extensão é dada pela aplicação $\varphi = \frac{\psi}{\|\psi\|}$.

Exemplo 3.0.4 ([Mi], pag 99) *:*

$$\begin{cases} P = x \\ Q = x^2 + y(x^2 + y^2) \end{cases} \tag{3.1}$$

Neste exemplo, K_ϵ é vazio e $\frac{\psi}{\|\psi\|}$ não é uma submersão em S_ϵ, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Neste capítulo estaremos estudando singularidades isoladas reais para as quais a aplicação $\frac{\psi}{\|\psi\|}$ é a projeção de um fibrado cujo espaço total é todo o complementar do link K_ϵ em S_ϵ^{m-1}.

Começaremos com uma definição.

Definição 3.0.1 *Dizemos que uma singularidade isolada real $\psi : \mathbb{R}^m, 0 \rightarrow \mathbb{R}^k, 0$ satisfaz à condição de Milnor forte, ou é Milnor forte, se ψ é de Milnor e $\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\epsilon^{m-1} \setminus K_\epsilon \rightarrow S^{k-1}$ é um fibrado localmente trivial, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.*

Se $\psi : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é uma função holomorfa com singularidade isolada, $\psi(z) = (P(z), Q(z))$, onde $P(z)$ e $Q(z)$, são respectivamente, a parte real e imaginária de ψ, segue do Teorema da Fibração de Milnor para funções holomorfas que ψ é Milnor forte. Exemplos não triviais de fibrações que são Milnor forte e que não provêm de uma estrutura holomorfa, como visto acima, foram também obtidos em [RSV]. Vamos estudar esses exemplos no próximo capítulo.

3.1 Condições de Jacquemard

Uma abordagem para estudar singularidades isoladas reais do tipo Milnor forte é descrita por A. Jacquemard [Ja] em sua tese de doutorado (veja também [Ja1]).

Seja $\psi = (P, Q) : \mathbb{R}^m, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ uma aplicação analítica real com singularidade isolada na origem. Considere $\nabla P(x)$ e $\nabla Q(x)$ os gradientes de P e Q, respectivamente. Jacquemard mostra que através de uma condição geométrica e de uma condição algébrica, sobre as funções coordenadas da aplicação ψ obtemos condições suficientes para que

$\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\epsilon^{m-1} \setminus K_\epsilon \to S^1$ seja a projeção de um fibrado localmente trivial, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Seu resultado é:

Teorema 3.1.1 ([Ja], Teorema 2) *Seja $\psi = (P, Q) : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ uma aplicação analítica real com singularidade isolada em 0. Suponha que exista uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}^m$ tal que:*

(A) $\frac{|\langle \nabla P(x), \nabla Q(x) \rangle|}{\|\nabla P(x)\|.\|\nabla Q(x)\|} \leq 1 - \rho$, $\forall\ x \in V - \{0\}$, $0 < \rho \leq 1$.

(B) *O fecho integral dos ideais gerados por $\nabla P(x)$ e $\nabla Q(x)$ no anel das funções analíticas reais coincidem.*

Então existe $\epsilon_0 > 0$, suficientemente pequeno, tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, $\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\epsilon^{m-1} \setminus K_\epsilon \to S^1$ é a projeção de um fibrado localmente trivial. Além disso, esse fibrado é equivalente ao fibrado dado por Milnor em [Mi].

Em [RSV] os autores modificam a condição (B) de Jacquemard, trocando a condição de fecho integral pela condição de fecho integral real, como na **Definição 1.1.2**, pag. 20, dada por Gaffney em [Ga].

É fácil verificar na prova de Jacquemard que seu resultado ainda vale se substituimos a condição (B) pela condição:

$(B_{\mathbb{R}})$: $\overline{\langle \nabla P(x) \rangle}_{\mathbb{R}} = \overline{\langle \nabla Q(x) \rangle}_{\mathbb{R}}$ no anel das funções analíticas reais $\mathcal{A}_m$.

Proposição 3.1.2 ([RSV], Proposição 3.4) *Suponha que as funções componentes satisfaçam às condições* (A) *e* $(B_{\mathbb{R}})$*. Então* ψ *é Milnor forte.*

Na sequência deste trabalho estaremos sempre utilizando o conceito de fecho integral real do ideal I. Entretanto, para simplificar a notação, indicaremos $\overline{I_{\mathbb{R}}}$ simplesmente por $\overline{I}$.

Exemplo 3.1.3 *Seja* $\psi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *uma aplicação holomorfa com singularidade isolada. Considere* $\psi(z) = (P(z), Q(z))$*, onde* $P(z)$ *é a parte real e* $Q(z)$ *é a parte imaginária de* ψ*. Neste caso, usando as equações de Cauchy-Riemann, verificamos diretamente que* $\nabla P(x)$ *e* $\nabla Q(x)$ *satisfazem às condições* (A) *e* $(B_{\mathbb{R}})$ *dadas acima, como naturalmente era de se esperar.*

No estudo da fibração de Milnor forte, um problema natural é identificar outras classes de exemplos que satisfaçam a esta condição. Neste trabalho, vamos estudar, em particular, em que condição singularidades isoladas quase-homogêneas satisfazem à condição Milnor forte.

A proposição abaixo é um primeiro resultado nesta direção.

Proposição 3.1.4 *Seja* $\psi = (P, Q) : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ *uma aplicação analítica real com singularidade isolada, tal que* $\nabla P(x)$ *e* $\nabla Q(x)$ *são quase homogêneos do mesmo tipo e grau. Então, existe uma vizinhança* $0 \in U \subset \mathbb{R}^m$ *tal que* ψ *satisfaz às hipóteses* (A) *e* $(B_{\mathbb{R}})$ *da* **Proposição 3.1.2***, portanto* ψ *é Milnor forte.*

Demonstração. A prova da proposição segue dos **Lemas 3.1.4** e **3.1.5** abaixo.

Definição 3.1.1 *Chamamos raio de Milnor da aplicação* ψ *ao maior número real* $\epsilon_0 > 0$ *tal que, para todo* ϵ*,* $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$*,* $V := \psi^{-1}(0)$ *é transversal a* S_ϵ^{m-1}*.*

Milnor prova em [Mi], pg.17, que sendo 0 um ponto singular isolado de uma aplicação ψ, o raio de Milnor sempre existe.

Lema 3.1.5 *Seja* $\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$*,* $\psi = (P, Q)$*,* $\Sigma(\psi) = \{0\}$ *e suponha que* $\nabla P(x), \nabla Q(x)$ *sejam quase homogêneos do tipo* $(w_1, w_2, ..., w_m; d_1, d_2)$*. Existe uma vizinhança*
da origem $U \subset \mathbb{R}^m$ *tal que:* $\frac{|\langle \nabla P(x), \nabla Q(x) \rangle|}{\|\nabla P(x)\| . \|\nabla Q(x)\|} \leq 1 - \rho\ ,\ 0 < \rho \leq 1.$

Demonstração. Tome $\epsilon_0 > 0$ tal que $\psi^{-1}(0)$ é transversal a S_ε^{m-1}, para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

Seja U vizinhança de 0 no $\mathbb{R}^m$ tal que $\overline{D^m_{\epsilon_0}} \subseteq U$, e considere $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Como $\nabla P(x)$ e $\nabla Q(x)$ são quase homogêneos do tipo $(w_1, w_2, ..., w_m; d_1, d_2)$, dado $x \in D^m_{\epsilon_0} \setminus \{0\}$ existe $\lambda \ \epsilon \ \mathbb{R}^*$ e $y \in S^{m-1}_{\epsilon_0}$ tais que $x = (\lambda^{w_1}y_1, ..., \lambda^{w_n}y_n)$.

Com efeito, sendo $x \in D^m_{\epsilon_0} \setminus \{0\}$, defina

$$\begin{aligned} r \ &: \ (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^m - \{0\} \\ &t \mapsto r(t) = (\frac{x_1}{t^{w_1}}, ..., \frac{x_n}{t^{w_n}}) \end{aligned}$$

Temos que $r(t)$ é suave e, $\lim_{t \quad 0} |r(t)| = +\infty$ então, existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $r(\lambda) \cap S^{m-1}_{\epsilon_0}$ = y.

Defina agora,

$$\begin{aligned} g \ &: \ S^{m-1}_{\varepsilon_0} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x \mapsto g(x) = \frac{|\langle \nabla P(x), \nabla Q(x) \rangle|}{\|\nabla P(x)\|.\|\nabla Q(x)\|} \end{aligned}$$

Como a singularidade é isolada, nos pontos onde g está definida, g é C^∞.

Como $S^{m-1}_{\epsilon_0}$ é compacta, g atinge seu valor máximo em $S^{m-1}_{\epsilon_0}$. Mais uma vez, como a singularidade de ψ é isolada, $\nabla P(x)$ *e* $\nabla Q(x)$ são linearmente independentes, $\forall x \neq 0$.

Assim, o máximo de $g(x)$ em $S^{m-1}_{\epsilon_0}$ é uma constante $M < 1$, logo $\exists\ 0 < \rho \leq 1$ tal que $x \ \epsilon \ S^{m-1}_{\epsilon_0}$ e temos $g(x) \leq \ 1 - \rho$.

Agora, para concluir a prova do lema temos:

Para cada $x \in D^m_{\epsilon_0} \setminus \{0\} \Rightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R}^*$ e $y \in S^{m-1}_{\epsilon_0}$ tais que $x = \lambda y = (\lambda^{w_1}y_1, ..., \lambda^{w_n}y_n)$. Logo ,

$$0 \leq \frac{|\langle \nabla P(x), \nabla Q(x)\rangle|}{\|\nabla P(x)\|.\|\nabla Q(x)\|} = \frac{|\langle \nabla P(\lambda y), \nabla Q(\lambda y)\rangle|}{\|\nabla P(\lambda y)\|.\|\nabla Q(\lambda y)\|} = \frac{\lambda^{d_1} \ \lambda^{d_2} |\langle \nabla P(y), \nabla Q(y)\rangle|}{\lambda^{d_1} \ \lambda^{d_2} \|\nabla P(y)\| \ \|\nabla Q(y)\|} = \frac{|\langle \nabla P(y), \nabla Q(y)\rangle|}{\|\nabla P(y)\|.\|\nabla Q(y)\|} \leq 1 - \rho.$$

Portanto, $0 \leq \lim_{x \to 0} \frac{|\langle \nabla P(x), \nabla Q(x)\rangle|}{\|\nabla P(x)\|.\|\nabla Q(x)\|} \leq 1 - \rho;\ 0 < \rho \leq 1.$ □

Lema 3.1.6 *Suponha que P e Q têm singularidade isolada, e que $\nabla P(x)$ e $\nabla Q(x)$ são quase homogêneos com mesmo peso e mesmo grau. Então,* $\overline{\langle \nabla P(x) \rangle} = \overline{\langle \nabla Q(x) \rangle}$

Demonstração.

Como $\nabla P(x)$ *e* $\nabla Q(x)$ são quase-homogêneos, seus poliedros de Newton $\Gamma_+(\nabla P(x))$ e $\Gamma_+(\nabla Q(x))$ têm uma única face compacta.

Além disso, chamando Δ_1 e Δ_2 as faces compactas de $\Gamma_+(\nabla P(x))$ *e* $\Gamma_+(\nabla Q(x))$, respectivamente, temos que elas têm vêrtices em todos os eixos coordenados. Com efeito, seja $Ox_i := (0, ..., 0, x_i, ..., 0)$ um eixo coordenado, e suponhamos que $x_i^k \notin \Delta_1$, $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, logo $\nabla P(Ox_i) = \nabla P(0, ..., 0, x_i, ..., 0) = 0$, o que contradiz a hipótese que $\nabla P(x)$ tem singularidade isolada. Portanto, Δ_1 corta todos os eixos coordenados.

O mesmo argumento pode ser usado para Δ_2.

Assim, Δ_1 e Δ_2 cortam todos os eixos coordenados.

Portanto, $\nabla P(x)$ *e* $\nabla Q(x)$ são Newton não degenerados conforme Definição 1.2.5 dada no **Capítulo 1** (e observação do final deste capítulo), pois só têm uma face. Logo,

$$\overline{\langle \nabla P(x) \rangle} = \langle\ \{x^n; n \ \in\ \Delta_1, \text{ onde } \Delta_1 \text{ é a única face compacta de } \Gamma_+(\nabla P(x))\}\ \rangle$$

$$\overline{\langle \nabla Q(x) \rangle} = \langle\ \{x^k; k \ \in\ \Delta_2, \text{ onde } \Delta_2 \text{ é a única face compacta de } \Gamma_+(\nabla Q(x))\}\ \rangle$$

Como estamos supondo que $\nabla P(x)$ *e* $\nabla Q(x)$ são do mesmo grau com respeito aos pesos $(w_1, ..., w_n)$, segue que $\Delta_1 = \Delta_2$, e $\overline{\langle \nabla P(x) \rangle} = \overline{\langle \nabla Q(x) \rangle}$. □

Uma consequência imediata é:

Corolário 3.1.7 *Se $\psi = (P, Q)$ é homogênea com singularidade isolada, então ψ é Milnor forte.*

Exemplo 3.1.8 *Como um exemplo e aplicação da Proposição 3.1.4, seja $\psi(z, \overline{z}) = \sum k_i.z_i^{a_i}.\overline{z_i}^{b_i}$, $a_i > 1$, $b_i \geq 1$. $P(z, \overline{z})$ e $Q(z, \overline{z})$, a parte real e imaginária, respectivamente, de $\psi(z, \overline{z})$ e, $\nabla P(z, \overline{z})$, $\nabla Q(z, \overline{z})$ seus respectivos gradientes.*

Temos que ψ é quase-homogêneo do tipo $(w_1, ..., w_n; 1)$, tomando w_j = peso x_j = peso y_j, $z_j = x_j + iy_j$, $w_j = \frac{1}{a_j + b_j}$. Portanto, segue da Proposição 3.1.4 que ψ é Milnor forte.

É possível redefinir os pesos das variáveis de modo que $\nabla P(z, \overline{z})$ e $\nabla Q(z, \overline{z})$ fiquem quase-homogêneos do tipo $(\widetilde{w_1}, ..., \widetilde{w_n}; 1)$ com $\widetilde{w_j} = \frac{1}{a_j + b_j - 1}$.

Observemos que não é possível usar as condições de Jacquemard para estender a **Proposição 3.1.4** para incluir o caso em que a aplicação $\psi = (P, Q)$ é quase homogênea do tipo $(w_1, ..., w_n; d_1, d_2)$, $d_1 \neq d_2$. Para isso citamos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.1.9 *Considere*

$$\begin{cases} P = x \\ Q = y(x^2 + y^2) \end{cases} \tag{3.2}$$

Temos que $\nabla P(x,y) = (1,0)$, $\nabla Q(x,y) = (2xy, x^2 + 3y^2)$. Obviamente a condição $(B_{\mathbb{R}})$ não está satisfeita. Por outro lado, é fácil verificar que o link é vazio e que $\varphi = \frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\epsilon \to S^1$ é uma submersão sobre e portanto ψ é Milnor forte. $\square$

Com os resultados do próximo capítulo, será possível estender a **Proposição 3.1.4** para os germes quase homogêneos quando $d_1 = d_2$.

Capítulo 4

Principais Resultados

Vamos começar esta seção relembrando uma construção devida a Seade, em [S1] (ver também [S2] e [RSV]), que será muito importante para nossos objetivos.
Sejam $F, X : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ campos holomorfos com singularidade isolada da forma $F(z) = (k_1 z_{\sigma_1}^{a_1}, ..., k_n z_{\sigma_n}^{a_n})$, $X(z) = (t_1 z_1^{b_1}, ..., t_n z_n^{b_n})$, $k_i, t_i \in \mathbb{C}^*$, como vimos no capítulo 2.
Defina $\psi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ por $\psi(z) = \langle F(z), X(z) \rangle$, onde $\langle , \rangle$ denota o produto interno hermitiano. Pelo **Teorema 2.1.2** do Capítulo 2, sabemos que sob certas condições ψ tem singularidade isolada na origem. Seja $\pi_\theta : \mathbb{C} \to L_{-\theta}$ a projeção ortogonal de $\mathbb{C}$ sobre $L_{-\theta}$, onde $L_{-\theta}$ é a reta no plano complexo $\mathbb{C}$ passando pela origem com inclinação $-\theta$.

Defina, $\psi_\theta : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ por $\psi_\theta(z) = \pi_\theta \circ \psi(z)$

Podemos facilmente verificar que $\psi_\theta(z) = Re(e^{i\theta}\psi(z))$.

Como π_θ é uma submersão, então $\psi_\theta(z) = \pi_\theta \circ \psi(z)$ é uma submersão em $U \setminus \{0\}$, para alguma vizinhança U da origem. Defina $M_\theta := \psi_\theta^{-1}(0)$. É claro que $M_\theta = M_{\theta + r\pi}$, $\forall r \epsilon Z$.

Lema 4.0.10 ([S2], Teorema 1.4, pg.203) *(i)* $\mathbb{C}^n = \cup_\theta M_\theta$, $0 \leq \theta < \pi$.

(ii) $M = \cap_\theta M_\theta = M_{\theta_1} \cap M_{\theta_2}$, *onde* $M = \psi^{-1}(0)$, $\theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi)$.

(iii) *Para cada* $\theta \in [0, \pi)$ *temos* $M_\theta = E_\theta \cup M \cup E_{\theta+\pi}$, *onde* $E_\alpha = \widetilde{\phi}^{-1}(e^{i\alpha})$ *com* $\widetilde{\phi} : \mathbb{C}^n \setminus M \to \mathbb{S}^1$, $\widetilde{\phi}(z) = i\frac{\overline{\psi(z)}}{\|\psi(z)\|}$.

(iv) *Se* ψ *satisfaz à condição de Milnor em 0, cada* $M_\theta^* := M_\theta \setminus \{0\}$ *é uma subvariedade real suave de* $\mathbb{C}^n$ *de codimensão real 1.*

Vejamos o seguinte resultado.

Teorema 4.0.11 ([RSV]) *Sejam F, X campos como acima. Assuma que as sequintes condições são satisfeitas.*

(a) *Para cada ciclo de σ de comprimento 1, os correspondentes expoentes satisfazem $a_i \neq b_i$;*

(b) *Para cada ciclo de comprimento $r > 1$, r ímpar, para cada $i = 1, ..., n$, temos $a_i \geq 1$, $b_i = 1$ e ao menos um dos a_i é estritamente maior que 1.*

(c) *Para cada ciclo de σ de comprimento $r > 1$, r par, para cada $i = 1, ..., n$ temos $a_i \geq 1$, $b_i = 1$ e ao menos dois $a_{i's}$, digamos a_{i_1} e a_{i_2} são estritamente maiores que 1,com i_1 sendo ímpar e i_2 par no ciclo.*

Então, ψ satisfaz a condição de Milnor forte em 0. Isto é, para toda esfera $S_\epsilon^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, a função:

$\phi = \frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\epsilon^{2n-1} \backslash K_\epsilon \to S^1$ é a projeção de um fibrado suave, localmente trivial. Cada par de fibras antípodas $\phi^{-1}(\exp(i\theta))$, $-\phi^{-1}(\exp(i\theta))$, são coladas juntas ao longo do link K_ϵ, formando uma (2n-2)-subvariedade suave em S_ϵ^{2n-1}:

$M_\theta \cap S_\epsilon^{2n-1}$, onde $M_\theta = \{z \in \mathbb{C}^n / Re\langle \exp(i\theta)F(z), z\rangle\}$. A monodromia deste fibrado é a aplicação de primeiro retorno da ação de S^1 nas variedades M_{θ_s}.

A demonstração do teorema acima depende de forma essencial do fato de ψ ser uma aplicação quase homogênea. Este fato é fundamentalmente usado em toda extensão da prova. Na primeira parte da prova, para garantir que as variedades M_{θ_s} são transversais a todas as esferas, e depois para construir uma ação nas esferas que é transversal às fibras, conseguindo assim a trivialidade local do fibrado.

Neste capítulo, estendemos a construção de J. Seade para qualquer aplicação $\psi : \mathbb{R}^m, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ com singularidade isolada, e através da correspondente família ψ_θ, obtemos condição suficiente para que ψ seja Milnor forte.

O resultado principal, **Teorema 4.2.2**, seção 4.2, estabelece que se a família ψ_θ é $(c)-$regular no sentido de K. Bekka [BK], então ψ é Milnor forte.

A conexão entre a abordagem deste capítulo e o resultado de A. Jacquemard, [Ja] estudado no **Capítulo 3**, é obtida no **Teorema 4.3.1** da mesma seção.

Os resultados aqui apresentados fazem parte do artigo [NR], submetido para publicação.

4.1 Condições de Regularidade

Como dissemos acima queremos encontrar alguma condição na família ψ_θ para que ψ seja Milnor forte. A principal referência para esta seção é [BK]. Seja M uma variedade suave e sejam X e Y subvariedades suaves de M tais que $Y \subset \overline{X}$.

Definição 4.1.1 ([BK]) (i) **(Whitney (a)-regularidade)**: *Dizemos que (X, Y) é (a)-regular em $y_0 \in Y$ se para cada sequência de pontos $\{x_i\} \to y_0$ tal que a sequência de espaços tangentes $\{T_{x_i}X\}$ tende no espaço de Grassmann de dimX-planos para algum plano T, então $T_{y_0}Y \subset T$. Dizemos que (X, Y) é regular se é (a)-regular em qualquer y_0 em Y.*

(ii) **((c)-regularidade)**:

Seja ρ uma função não negativa e suave tal que $\rho^{-1}(0) = Y$. Dizemos que o par (X, Y) é (c)-regular em $y_0 \in Y$ para uma função controle ρ se :

para cada sequência de pontos $\{x_i\} \to y_0$ tal que a sequência de planos $\{kerd\rho(x_i) \cap T_{x_i}X\}$ tende no espaço de Grassmann de (dimX-1)-planos para algum plano T, então $T_{y_0}Y \subset T$. Dizemos que o par (X, Y) é (c)-regular para a função controle ρ se é (c)-regular para qualquer ponto $y_0 \in Y$ para a função controle ρ.

Observamos que $(c)-$regularidade $\Longrightarrow$ $(a)-$regularidade.

Vamos supor agora que M tem uma métrica Riemanniana. Seja (T_Y, π, ρ) uma vizinhança tubular para Y junto com a projeção associada e uma função controle não negativa suave tal que $\rho^{-1}(0) = Y$ e $\nabla\rho(x) \in kerd\pi(x)$.

Essa última condição indica que ρ não depende do espaço de parâmetros.

Definição 4.1.2 ([BK]) *Dizemos que (X, Y) satisfaz à condição (m) se existe algum número $\epsilon > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}(\pi, \rho)\mid_{X\cap T_Y^\epsilon} \ : \ & X \cap T_Y^\epsilon \to Y \times \mathbb{R} \\ & x \longmapsto (\pi(x), \rho(x))\end{aligned}$$

é submersão, onde $T_Y^\epsilon := \{x \in T_Y / \rho(x) < \epsilon\}$.

A (c)-regularidade é então caracterizada da seguinte forma:

Teorema 4.1.1 ([BK]) *O par (X, Y) é $(c)-$regular em $y_0 \in Y$ para a função controle ρ se e somente se o par (X, Y) é $(a)-$regular em $y_0 \in Y$ e satisfaz condição (m).*

A importância da condição de $(c)-$regularidade é descrita no seguinte resultado, que será fundamental para o principal resultado da próxima seção.

Seja $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, 0 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, 0$ uma família a um parâmetro de germes de funções analíticas com singularidade isolada, $F_t(x) = F(x, t)$, $X_t = F_t^{-1}(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^m, 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $X = F^{-1}(0) \setminus (0 \times \mathbb{R}) \subset (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, 0 \times \mathbb{R})$, $Y = 0 \times \mathbb{R}$. Então, vale o seguinte resultado:

Teorema 4.1.2 ([Ve], [KB]) *Se o par (X, Y) como acima for $(c)-$regular, então existe uma família de homeomorfismos $h_t : \mathbb{R}^m, 0 \to \mathbb{R}^m, 0$ tal que $h_t(X_t) = X_0$ e, $\|h_t(x)\| = \|x\|$ sobre $F^{-1}(0)$.*

4.2 Resultado Principal para Fibrações de Milnor Reais

Seja $\psi : \mathbb{R}^m, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$, $\psi(x) = (P(x), Q(x))$, uma aplicação analítica com singularidade isolada na origem 0. Considere $(P(x), Q(x)) \sim P(x) + iQ(x)$ a identificação natural com os números complexos. Defina $\psi_\theta : \mathbb{R}^m, 0 \to \mathbb{R}, 0$ dada por $\psi_\theta(x) = \pi_\theta \circ \psi(x)$. Podemos facilmente verificar, fazendo uma mudança de base em $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, que obtemos

$$\psi_\theta(x) = Re(e^{i\theta}\psi(x)) = cos(\theta)P(x) - sin(\theta)Q(x).$$

Defina $M = \psi^{-1}(0)$ e $M_\theta := \psi_\theta^{-1}(0)$. O Lema seguinte é uma generalização do **Lema 4.0.10**.

Lema 4.2.1 *Seja $0 \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ uma vizinhança da origem tal que para todo $x \in U \setminus \{0\}$, temos o rank$\psi(x)$ seja máximo. Então, temos:*

(i) $U = \cup_\theta (M_\theta \cap U)$, $0 \leq \theta < \pi$.

(ii) $M = \cap_\theta M_\theta = M_{\theta_1} \cap M_{\theta_2}$, *onde* $M = \psi^{-1}(0)$, $\theta_1 \neq \theta_2$ $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi)$.

(iii) *Para cada* $\theta \in [0, \pi)$ *temos* $M_\theta = E_\theta \cup M \cup E_{\theta+\pi}$, *onde* $E_\alpha = \widetilde{\phi}^{-1}(e^{i\alpha})$ *com* $\widetilde{\phi} : U \setminus M \to \mathbb{S}^1$
$\widetilde{\phi}(x) = i\frac{\overline{\psi(x)}}{\|\psi(x)\|}$.

(*iv*) *Se ψ satisfaz a condição de Milnor em 0, cada $M_\theta^* = M_\theta \setminus \{0\}$ é uma subvariedade real suave de $U \setminus \{0\}$, formada por E_θ, $E_{\theta+\frac{\pi}{2}}$ de codimensão real 1 e, $M \setminus \{0\}$ tendo codimensão real 2, se $M \setminus \{0\}$ for não vazio.*

Demonstração. A idéia da prova é análoga à prova do **Lema 4.0.10**. Vamos começar pela propriedade (iii).

- $M \subset M_\theta$.

Seja $x \in M := \{x \in \mathbb{R}^m / \psi(x) = 0\}$. Então, $\psi_\theta(x) = \pi_\theta(\psi(x)) = 0$, e portanto $x \in M_\theta$.

- $E_\theta \subset M_\theta$.

Seja $x \in E_\theta = \widetilde{\phi}^{-1}(e^{i\theta})$,

Então $\widetilde{\phi}(x) = \frac{i\overline{\psi(x)}}{\|\psi(x)\|} = e^{i\theta}$, $\psi(x) \neq 0$. Portanto, $i\overline{\psi(x)} = \|\psi(x)\| e^{i\theta}$, ou seja, $\psi(x) = \|\psi(x)\| e^{i(-\theta+\frac{\pi}{2})}$. Logo, $\psi(x) \in L_{-\theta+\frac{\pi}{2}}$, e portanto $x \in M_\theta$.

- $E_{\theta+\pi} \subset M_\theta$.

Observe que $L_{-\theta} = L_{-\theta+\pi}$ e $\pi_\theta = \pi_{\theta+\pi}$. Assim, este caso já está incluso no anterior. Logo, $E_\theta \cup M \cup E_{\theta+\pi} \subseteq M_\theta$.

Agora, se $x \in M_\theta = \psi_\theta^{-1}(0)$, isto é, $0 = \psi_\theta(x) = \pi_\theta \circ \psi(x)$ e portanto, $\psi(x) \in L_{-\theta+\frac{\pi}{2}}$, $\psi(x) = \|\psi(x)\| e^{i(-\theta+\frac{\pi}{2})} = \|\psi(x)\| i e^{-i\theta}$. Se $\psi(x) = 0$, então já temos $x \in M$.

Se $\psi(x) \neq 0 \therefore e^{i\theta} = \frac{i\overline{\psi(x)}}{\|\psi(x)\|} = \widetilde{\phi}(x) \therefore x \in \widetilde{\phi}^{-1}(e^{i\theta}) = E_\theta \therefore M_\theta \subseteq E_\theta \cup M \cup E_{\theta+\pi}$.

Portanto, $M_\theta = E_\theta \cup M \cup E_{\theta+\pi}$

- Para mostrar (ii), observe que do resultado anterior já temos que: $M \subseteq \cap_\theta M_\theta$. Para provar a inclusão contrária vamos mostrar que para qualquer $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi)$, $\theta_1 \neq \theta_2$ temos $M_{\theta_1} \cap M_{\theta_2} = M$.

Claro que $M \subseteq M_{\theta_1} \cap M_{\theta_2}$. Como $M_{\theta_1} = E_{\theta_1} \cup M \cup E_{\theta_1+\pi}$, $M_{\theta_2} = E_{\theta_2} \cup M \cup E_{\theta_2+\pi}$ e $E_{\theta_1} = \widetilde{\phi}^{-1}(e^{i\theta_1})$, $E_{\theta_2} = \widetilde{\phi}^{-1}(e^{i\theta_2})$, temos que se $x \in E_{\theta_1} \cap E_{\theta_2} \therefore e^{i\theta_1} = \widetilde{\phi}(x) = e^{i\theta_2} \therefore \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$. Como $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi)$ temos $\theta_1 = \theta_2$. Portanto, $E_{\theta_1} = E_{\theta_2}$. Análogo nos outros casos. Ou seja, se $\theta_1 \neq \theta_2$ só podemos ter $M_{\theta_1} \cap M_{\theta_2} = M$. Podemos agora concluir que $M = \cap_\theta M_\theta$.

- $\cup_\theta (M_\theta \cap U) = U$.

Claro que $\cup_\theta (M_\theta \cap U) \subseteq U$.

Tome $x \in U$. Se $\psi(x) = 0$, não temos nada a fazer pois $x \in M \subseteq \cup_\theta (M_\theta \cap U)$.

Se $\psi(x) \neq 0 \therefore \widetilde{\phi}(x) = \frac{i\overline{\psi(x)}}{\|\psi(x)\|} = e^{i(-\theta(x)+\frac{\pi}{2})} \therefore x \in \widetilde{\phi}^{-1}(e^{i(-\theta(x)+\frac{\pi}{2})}) = E_{-\theta(x)+\frac{\pi}{2}} \subseteq \cup_\theta(M_\theta \cap U)$. $\square$

• Como ψ é uma submersão fora da origem 0, logo é uma aplicação aberta, portanto $\psi^{-1}(L_{-\theta+\frac{\pi}{2}})$ é não vazio, e $\psi_\theta^{-1}(0) = \psi^{-1}(L_{-\theta+\frac{\pi}{2}}) = \psi^{-1}(L^+_{-\theta+\frac{\pi}{2}}) \cup \psi^{-1}(0) \cup \psi^{-1}(L^-_{-\theta+\frac{\pi}{2}})$ é uma subvariedade suave em $U \setminus \{0\}$, pois $\psi_\theta \mid_{U\setminus\{0\}}$ é também submersão, e estamos considerando $L_{-\theta+\frac{\pi}{2}} = L^+_{-\theta+\frac{\pi}{2}} \cup \{0\} \cup L^-_{-\theta+\frac{\pi}{2}}$, com $L^+_{-\theta+\frac{\pi}{2}}$ o semi-eixo acima do eixo Oy, e $L^-_{-\theta+\frac{\pi}{2}}$ o semi-eixo abaixo do eixo Oy. Observe agora que, $\psi^{-1}(L^+_{-\theta+\frac{\pi}{2}}) = E_{\theta(x)}$, $\psi^{-1}(L^-_{-\theta+\frac{\pi}{2}}) = E_{\theta(x)+\pi}$ e $\psi^{-1}(0) = M$. $E_{\theta(x)}$ e $E_{\theta(x)+\pi}$ são subvariedades reais de U de codimensão 1, e $M \setminus \{0\}$ é subvariedade real de U de codimensão real 2, se for não vazio.$\square$

Podemos agora enunciar o resultado principal deste trabalho:

Teorema 4.2.2 *Seja $\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ um germe de aplicação analítica com singularidade isolada na origem, tal que a família $\psi_\theta : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ associada é $(c)-$regular para a função $\rho(x,\theta) = \sum_i x_i^2$. Então ψ é Milnor Forte.*

O leitor poderá verificar a demonstração deste resultado no pré-print intitulado "Real Milnor fibration e $(c)-$regularity", disponível em minha página: www.icmc.usp.br/ rnonato.

Exemplo 4.2.3 *A recíproca do teorema anterior não é verdadeira. Basta considerar a seguinte aplicação:*

$$\begin{cases} P = x \\ Q = y(x^2 + y^2) \end{cases} \tag{4.1}$$

veremos abaixo que $f := (P, Q)$ é Milnor forte, mas a correspondente família não é $(a)-$regular.

É fácil verificar que a aplicação ψ tem singularidade isolada, e o link K_ϵ é vazio. Por um cálculo simples temos que $\frac{\psi}{\|\psi\|}$ é sempre regular para toda esfera S_ϵ, e usando técnicas de cálculo diferencial, podemos verificar que a aplicação $\frac{\psi}{\|\psi\|}$ é sobrejetora. Também é fácil mostrar que a família $\psi_\theta := \psi(x, y, \theta)$ associada a ψ tem raio de Milnor infinito. Ou seja, satisfaz a condição (m). Vamos considerar abaixo uma sequência especial de pontos p_i em $\psi^{-1}(0)$ e mostrar que a família não é $(a)-$regular.

Para isso considere $p_i = (x_i, y_i, \theta_i)$, onde $x_i \to 0$, $y_i = 0$, $\theta_i = \frac{\pi}{2}$. Claramente temos que $\psi_\theta(p_i) = 0$, ou seja, p_i pertence a $X := \psi_\theta^{-1}(0)$. Temos que $T_{p_i}X^\perp = \nabla\psi(x_i, y_i, \theta_i)$.

Considere $y_0 = \lim_i p_i = (0, 0, \frac{\pi}{2})$. *Porém,* $\lim_i T_{p_i}X \supseteq T_{y_0}Y \therefore (\lim_i T_{p_i}X)^{\perp} \subseteq (T_{y_0}Y)^{\perp}$. *Como* $(T_{y_0}Y)^{\perp} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ *e* $(\lim_i T_{p_i}X)^{\perp} = \lim_i (T_{p_i}X)^{\perp}$, *temos:*

$T_{p_i}X^{\perp} = \nabla\psi(x_i, y_i, \theta_i) = (cos\theta_i - 2x_iy_isin\theta_i, -sin\theta_i(x_i^2 + 3y_i^2), -sin\theta_ix_i - cos\theta_iy_i(x_i^2 + y_i^2)) = (0, -x_i^2, -x_i)$. *Analisando no projetivo temos,* $(0 : x_i^2 : x_i) = (0 : x_i : 1)$ *que é uma sequência que converge para* $(0 : 0 : 1)$. *Porém, a direção* $(0, 0, 1) \nsubseteq (T_{y_0}Y)^{\perp} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. *Ou seja, a família* ψ_θ *não é* $(c)-$*regular.*

Com o **Teorema 4.2.2** obtemos uma generalização do **Teorema 4.0.11** :

Corolário 4.2.4 *Se* $\psi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *é quase-homogênea do tipo* $(w_1, ..., w_n : d)$ *com singularidade isolada, então* ψ *é Milnor Forte .*

Demonstração. Como é ψ quase homogênea, já sabemos que a família ψ_θ é $(c)-$regular, conforme [KB]. □

4.3 Relação com os Resultados de Jacquemard

Considere a família

$$\begin{aligned} \psi_\theta \quad : \quad & (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}, 0) \\ & x \longmapsto Re(e^{i\theta}(P(x) + iQ(x))) = cos(\theta)P(x) - sin(\theta)Q(x). \end{aligned}$$

O resultado abaixo relaciona as condições de fecho integral para a família ψ_θ e as condições (A) e $(B_{\mathbb{R}})$.

Teorema 4.3.1 *Seja* $\psi = (P, Q) : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$. *Então,* $P(x)$*e* $Q(x)$ *satisfazem as condições* (A) *e* $(B_{\mathbb{R}})$ *se, e somente se* $\overline{\langle \nabla\psi_\theta(x) \rangle}_{\mathbb{R}} = \overline{\langle \nabla\psi_0 \rangle}_{\mathbb{R}}$, *no anel* $\mathcal{A}_m$, $\forall\ \theta \in [0, \pi)$.

Demonstração.
Seja $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ uma curva analítica real não constante.

A restrição de $\nabla\psi_\theta(x) = cos(\theta)\nabla P(x) - sin(\theta)\nabla Q(x)$ à curva analítica real γ é dada por:

$\nabla\psi_\theta(\gamma(t)) = cos(\theta)\nabla P(\gamma(t)) - sin(\theta)\nabla Q(\gamma(t))$

Considere os seguintes desenvolvimentos de Taylor :

$\nabla P(\gamma(t)) = a_1 t^{n_1} + \dots.. \, , \, a_1 \in \mathbb{R}^m - 0 \, , \, n_1 \in N.$

$\nabla Q(\gamma(t)) = b_1 t^{m_1} + \dots.. \, , \, b_1 \in \mathbb{R}^m - 0 \, , \, m_1 \in N.$

Como $\overline{\langle \nabla P(x) \rangle} = \overline{\langle \nabla Q(x) \rangle}$, então $n_1 = m_1$. Logo temos

$\nabla \psi_\theta(\gamma(t)) = (cos(\theta)a_1 - sin(\theta)b_1)t^{n_1} + \dots.$

Por hipótese,

$\frac{|\langle \nabla P(x), \nabla Q(x) \rangle|}{|\nabla P(x)||\nabla Q(x)|} \leq 1 - \rho$, para algum $0 < \rho \leq 1$ então, para cada $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ analítica real temos que a parte principal satisfaz $\frac{|\langle a_1, b_1 \rangle|}{|a_1||b_1|} < 1$, ou seja, a_1 e b_1 são linearmente independentes.

Portanto, $cos(\theta)a_1 - sin(\theta)b_1 \neq 0, \; \forall \; \theta \Longrightarrow v(\nabla \psi_\theta) = n_1 = v(\nabla \psi_0)$, onde v é a valoração canônica dada na **Definição 1.1.2**. Como γ é uma curva arbitrária, segue que $\overline{\langle \nabla \psi_\theta \rangle} = \overline{\langle \nabla P \rangle}$ $\diamond$

Reciprocamente, se $\overline{\langle \nabla \psi_\theta \rangle} = \overline{\langle \nabla \psi_0 \rangle} = \overline{\langle \nabla P \rangle}$ então considerando $\theta = \frac{\pi}{2}$ temos a condição $(B_{\mathbb{R}})$ e consequentemente para toda curva $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ analítica real não constante temos,

$\nabla \psi_\theta(\gamma(t)) = (cos(\theta)a_1 - sin(\theta)b_1)t^{n_1} + \dots..$

Observe que $\forall \; \theta$, $cos(\theta)a_1 - sin(\theta)b_1 \neq 0$, caso contrário existirá algum θ_0 tal que $cos(\theta_0)a_1 - sin(\theta_0)b_1 = 0$, e $v(\nabla \psi_{\theta_0}) > v(\nabla P)$ (absurdo!)

Se $cos(\theta) \neq 0 \therefore a_1 - \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)} b_1 = a_1 - \tan(\theta) b_1 \neq 0$.

De $cos(\theta) \neq 0 \Longrightarrow \theta \neq (\frac{2k+1}{2})\pi$, k inteiro, como para $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\tan(\theta)$ atinge todos os valores reais e ainda temos $a_1 - \tan(\theta)b_1 \neq 0$ portanto a_1 e b_1 são linearmente independentes. Como a curva γ foi arbitrária, $\frac{|\langle \nabla P(x), \nabla Q(x) \rangle|}{|\nabla P(x)||\nabla Q(x)|} \leq 1 - \rho$, para algum $0 < \rho \leq 1$, e para $\forall \; x$ suficientemente próximo da origem. $\square$

Vamos mostrar agora que, de fato, nossa condição de $(c)-$regularidade é mais fraca que as hipóteses de Jacquemard. Nesta direção, vamos mostrar que as condições (A) e $(B_{\mathbb{R}})$ implicam a $(c)-$regularidade para a nossa família. Exibiremos um exemplo de singularidade isolada real, tal que a correspondente família ψ_θ associada é $(c)-$regular, mas a singularidade não satisfaz as hipóteses do Teorema de Jacquemard. Começaremos com uma definição de $w-$regularidade que pode ser encontrada em [FP].

Definição 4.3.1 *Seja $F_z : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$, $z \in \mathbb{R}$ uma família de funções. Dizemos que a família é $w-$regular se, existe uma constante $K > 0$ tal que, $|\frac{\partial F(x,z)}{\partial z}| \leq K\|x\|.\|\frac{\partial F_z}{\partial x}\|$, onde $\frac{\partial F_z}{\partial x}$ denota o gradiente da função F_z.*

Lema 4.3.2 *Para a família $\psi(x,t) = \cos(t)P(x) - \sin(t)Q(x)$, se $\overline{\langle \nabla_x \psi(x,t) \rangle}_{\mathcal{A}_n} = \overline{\langle \nabla P(x) \rangle}_{\mathcal{A}_n}$, para cada $t \in \mathbb{R}$, então $\overline{\langle \nabla_x \psi(x,t) \rangle}_{\mathcal{A}_{n+1}} = \overline{\langle \nabla P(x) \rangle}_{\mathcal{A}_{n+1}}$*

Demonstração. Dado um elemento $\alpha(x,t) \in \overline{\langle \nabla_x \psi(x,t) \rangle}_{\mathcal{A}_{n+1}}$, sabemos que para toda curva analítica real não constante $\gamma(s) = (x(s), t(s))$, com $\gamma(0) = (0,0)$, temos que,

$$\begin{aligned}
\nu(\alpha \circ \gamma(s)) &\geq \nu(\cos(t(s))\frac{\partial P}{\partial x_j}(x(s)) - \sin(t(s))\frac{\partial Q}{\partial x_j}(x(s))) \\
&\geq \min\{\nu(\cos(t(s))\frac{\partial P}{\partial x_j}(x(s))), \nu(\sin(t(s))\frac{\partial Q}{\partial x_j}(x(s))) \\
&= \nu(\cos(t(s))\frac{\partial P}{\partial x_j}(x(s)) \geq \nu(\frac{\partial P}{\partial x_j}(x(s)) \therefore \overline{\langle \nabla_x \psi(x,t) \rangle}_{\mathcal{A}_{n+1}} \subseteq \overline{\langle \nabla P(x) \rangle}_{\mathcal{A}_{n+1}},
\end{aligned}$$

ou podemos ter,

$$\begin{aligned}
\nu(\alpha \circ \gamma(s)) &\geq \min\{\nu(\cos(t(s))\frac{\partial P}{\partial x_j}(x(s)), \nu(\sin(t(s))\frac{\partial Q}{\partial x_j}(x(s)) \\
&= \nu(\cos(t(s))\frac{\partial Q}{\partial x_j}(x(s)) \therefore \overline{\langle \nabla_x \psi(x,t) \rangle}_{\mathcal{A}_{n+1}} \subseteq \overline{\langle \nabla Q(x) \rangle}_{\mathcal{A}_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Mas, já sabemos que $\overline{\langle \nabla P(x) \rangle}_{\mathcal{A}_{n+1}} = \overline{\langle \nabla Q(x) \rangle}_{\mathcal{A}_{n+1}}$ e com isso provamos uma inclusão.

Para verificarmos que $\overline{\langle \nabla P(x) \rangle}_{\mathcal{A}_{n+1}} \subseteq \overline{\langle \nabla_x \psi(x,t) \rangle}_{\mathcal{A}_{n+1}}$ é suficiente verificar que para toda curva analítica real não constante $\gamma(s) = (x(s), t(s))$, em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0$, $\gamma(0) = (0,0)$, temos,

$$\begin{aligned}
\nu(\frac{\partial P}{\partial x_i}(x(s))) &\geq \min_j\{\nu(\frac{\partial P}{\partial x_j}(x(s)))\} = \min_j\{\nu(\frac{\partial Q}{\partial x_j}(x(s)))\} \\
&= \min_j\{\nu(\frac{\partial P}{\partial x_j} + f_1(t)\frac{\partial P}{\partial x_j} + f_2(t)\frac{\partial Q}{\partial x_j})(x(s), t(s))\} \text{ i,j=1,...,n,}
\end{aligned}$$

onde $f_1(t) = \cos(t) - 1$ e $f_2(t) = \sin(t)$. □

Lema 4.3.3 *Considere a família $\psi(x,t) = cos(t)P(x) - sin(t)Q(x)$ como acima. Suponha que $\overline{\langle \nabla_x \psi(x,t) \rangle}_{\mathcal{A}_n} = \overline{\langle \nabla P(x) \rangle}_{\mathcal{A}_n}$, para todo t. Então, a família é $w-$regular.*

Demonstração. Como $\overline{\langle \nabla_x \psi(x,t) \rangle}_{\mathcal{A}_n} = \overline{\langle \nabla P(x) \rangle}_{\mathcal{A}_n}$, pelo Lema anterior, existem constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$ e $c_4 > 0$, que não dependem de t, tais que,

(1) $c_1 \|\nabla P(x)\| \leq \|\nabla_x \psi(x,t)\| \leq c_2 \|\nabla P(x)\|$, e

(2) $c_3 \|\nabla Q(x)\| \leq \|\nabla_x \psi(x,t)\| \leq c_4 \|\nabla Q(x)\|$.

Logo,

$$\begin{aligned}
|\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}| &= |-\sin(t)P(x) - \cos(t)Q(x)| \\
&\leq |\sin(t)P(x)| + |\cos(t)Q(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)| \text{ (desigualdade triangular)} \\
&\leq k_1 \|x\|.\|\nabla P(x)\| + k_2 \|x\|.\|\nabla Q(x)\| \text{ (Bochnak-Lojasiewcz)} \\
&\leq k_1 \|x\|.\|\nabla P(x)\| + k_3 \|x\|.\|\nabla P(x)\| \leq K_1 \|x\|.\|\nabla P(x)\| \text{ ((1) e (2))} \\
&\leq K \|x\|.\|\nabla_x \psi(x,t)\| \text{ (1).}
\end{aligned}$$

Portanto, a família $\psi(x,t)$ é $w-$regular. □

Teorema 4.3.4 *: Seja $\psi = (P, Q) : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$, tal que $P(x)$e $Q(x)$ satisfazem as condições (A) e $(B_{\mathbb{R}})$, então a família ψ_θ é $(c)-$regular.*

Demonstração. Para o caso real e complexo, a seguinte implicação sempre se verifica: $w-$regularidade $\Rightarrow$ $(c)-$regularidade [KB]. O resultado segue portanto do lema anterior. □

Exemplo 4.3.5 *A recíproca do Teorema anterior não é verdadeira. Com efeito, basta considerar a seguinte família de exemplos, para k qualquer natural fixo, não nulo:*

$$\begin{cases} P = xy \\ Q = -x^2 + y^{2k} \end{cases} \tag{4.2}$$

Que $f(x,y) := (P(x,y), Q(x,y))$ acima tem singularidade isolada, verifica-se facilmente. Além disso, o exemplo não satisfaz a condição $(B_{\mathbb{R}})$.

Faremos o caso $k = 2$, mas a prova no caso geral é totalmente análoga.

Considere a família $\psi(x,y,t) = \cos(t)xy - \sin(t)(-x^2 + y^4)$, temos que o raio de Milnor é infinito. Vamos verificar a $(a)-$regularidade.

Considere $X = \psi^{-1}(0) \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$, e $Y = \{0\} \times \mathbb{R}$. Seja $p_i = (x_i, y_i, \theta_i)$ uma sequência qualquer em X com $p_i \to p_0$, onde $p_0 \in \{0\} \times \mathbb{R}$. Verificar a condição (a) para o par (X, Y) em p_0, é o mesmo que verificar se:

$\lim_i \frac{|\partial_t \psi(p_i)|}{|\nabla_x \psi_t(p_i)|} \longrightarrow 0$, onde $\partial_t \psi$ é a derivada de ψ com relação ao espaço de parâmetros, e $\nabla_x \psi_t$ são as derivadas parciais de ψ_t com respeito as variáveis x_i, $i = 1, 2$.

Como $\nabla_x \psi_t = (ycos(t) + 2xsin(t), xcos(t) - 4y^3 sin(t))$ e $\partial_t \psi = -sin(t)xy - cos(t)(x^2 + y^4)$, podemos usar [[RS], lema 1] para obter uma constante positiva C_1 tal que, $|\nabla_x \psi_t| \geq C_1 |(x, y)|$. Aplicando o mesmo resultado para $\partial_t \psi$, obtemos $|\partial_t \psi| \leq C_2 |(x, y)|^2$, onde C_2 é uma constante positiva. O que acaba a prova.

Capítulo 5

Famílias Analíticas Reais

Estaremos neste capítulo interessados em famílias de germes de aplicações analíticas reais com singularidade isolada, que são topologicamente triviais. Existe uma vasta bibliografia sobre o tema deste capítulo, destacaremos aqui os resultados mais relevantes para nosso estudo.

No caso complexo, condições equivalentes à trivialidade topológica de famílias de germes de função com singularidade isolada, foram obtidas por vários autores, como [Te], [DG]. O seguinte teorema, devido a Greuel, reúne e estende essas caracterizações:

Teorema 5.0.6 ([GR], pg.161) *Para qualquer deformação $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ de $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, $n \geq 1$, uma função holomorfa, as seguintes condições são equivalentes:*

(i_0) *F é topologicamente trivial.*

(i) *F é uma deformação $\mu-$constante de f, onde μ é o número de Milnor de f.*

(ii) *Para qualquer curva holomorfa*
$\gamma : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$, $\nu(\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma) > inf\{\nu(\frac{\partial F}{\partial x_i} \circ \gamma)/i = 1, ..., n\}$.

(iii) *A mesma afirmação de (ii), trocando $'' >''$ por $'' \geq''$.*

(iv) $\frac{\partial F}{\partial t} \in \overline{J}$, *onde* $J = (\frac{\partial F}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n})\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C},0}$ *denota o ideal jacobiano de F com respeito às coordenadas $(x_1, ..., x_n)$. E $\overline{J}$ denota o fecho integral de J em $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C},0}$.*

(v) $\frac{\partial F}{\partial t} \in \sqrt{J}$, *onde $\sqrt{J}$ denota o radical de J em $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C},0}$.*

(vi) A curva polar de F com respeito a $\{t=0\}$ não se fatora, i.e.
$\{(x,t)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C},0/\frac{\partial F}{\partial x_i}=0, i=1,...,n\}=\{0\}\times\mathbb{C}$, *próximo de* $(0,0)$.

Definição 5.0.2 *Uma família a $p-$parâmetros de germes $F:(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p,0\times\mathbb{R}^p)\longrightarrow(\mathbb{R}^k,0)$ é uma boa deformação, ou uma família sem fusão de pontos críticos, se existe uma vizinhança U de $\{0\}\times\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p$ e um representante F' de F, tal que F' restrita a $U\cap(\mathbb{R}^m-\{0\}\times z)$ é uma submersão para cada $z\in\mathbb{R}^p$. Caso contrário, dizemos que a família tem fusão de pontos críticos, ou ainda que F não é uma boa deformação.*

No caso complexo o teorema de Greuel garante que para famílias de funções holomorfas, boa deformação é suficiente para garantir a trivialidade topológica. Uma pergunta natural é: será que boa deformação de germes no caso real implica trivialidade topológica ?

A resposta é não. H.King [HK], pg. 2, apresenta um contra-exemplo para esta pergunta, e apresenta condições suficientes para que uma boa deformação seja topologicamente trivial.

Definição 5.0.3 *Seja $\psi_t:(\mathbb{R}^m,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$, $m\geq p$ uma família de aplicações analíticas com singularidade isolada, para cada $t\in\mathbb{R}$. Dizemos que a família ψ_t tem raio de Milnor constante, se existe $\epsilon_0>0$ tal que $(\psi_t^{-1}(0)-\{0\})\,\overline{\pitchfork}\,S_\epsilon^{m-1}$ para todo t e $0<\epsilon\leq\epsilon_0$. Assim, $r(\psi_t)=\epsilon_0$, $\forall t$, e dizemos que $r(\psi_t)=\infty$ se $(\psi_t^{-1}(0)-\{0\})\,\overline{\pitchfork}\,S_\epsilon^{m-1}$ para todo $\epsilon_0>0$.*

Em [HK] temos os seguintes resultados:

Teorema 5.0.7 ([HK]) *Seja $f_z:(\mathbb{R}^m,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^k,0)$, $z\in\mathbb{R}^p$ uma família contínua de germes de aplicação polinomial, sem fusão de pontos críticos. Seja $\delta>0$ tal que $r(f_z)>\delta$ para todo $z\in\mathbb{R}^p$. Então, existe uma família contínua de germes de homeomorfismos $h_z:(\mathbb{R}^m,0)\to(\mathbb{R}^m,0)$ tal que $f_0=f_z\circ h_z$.*

Teorema 5.0.8 ([HK]) *Seja $f_z:(\mathbb{R}^m,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^k,0)$, $z\in\mathbb{R}^p$, uma família de germes sem fusão de pontos críticos e suponha que exista uma família de germes de homeomorfismos $g_z:(\mathbb{R}^m,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^m,0)$, $z\in\mathbb{R}^p$ tal que o germe em 0 de cada conjunto $g_z\circ f_z^{-1}(0)$ é o germe de $f_0^{-1}(0)$. Então, existe uma família de germes de homeomorfismos $h_z:(\mathbb{R}^m,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^m,0)$, $z\in\mathbb{R}^p$ e uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}^p$ tal que o germe em 0 de $f_z\circ h_z$ é o germe de f_0 para cada $z\in V$.*

Neste capítulo estaremos preocupados com o estudo de famílias analíticas reais que são topologicamente triviais e mantém a condição Milnor forte ao longo das perturbações da família.

5.1 Trivialização da Fibração de Milnor para Famílias Analíticas Reais

No Capítulo 2 vimos que perturbações suficientemente altas de singularidades que satisfazem à condição de Milnor, também satisfazem a essa condição. Em [RSV], os autores mostram que se ψ satisfaz as condições (A) e $(B_{\mathbb{R}})$ de Jacquemard, então o mesmo acontece para perturbações suficientemente altas. Um corolário deste resultado é que as condições (A) e $(B_{\mathbb{R}})$ são determinadas por um jato de ordem finita. Entretanto, a abordagem de [RSV] não permite obter ordens precisas para o grau de determinação. Por exemplo, não podemos concluir que se ψ é quase homogêneo e tem singularidade isolada, o grau de quase homogeneidade já determina a fibração de Milnor.

Nesta seção vamos discutir este problema. Isto pode ser feito agora de uma maneira mais eficaz, usando os resultados do Capítulo 3 e os resultados de King [HK1].

Começaremos com uma simples observação.

Lema 5.1.1 *Seja* $\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, $\psi = (P, Q)$ *uma aplicação analítica com singularidade isolada, quase homogênea do tipo* $(w_1, ..., w_n; d_1, d_2)$*. Então,* $r(\phi) = \infty$*.*

Demonstração. Sabemos que $\Sigma_\psi = \{0\} \Longrightarrow (\psi^{-1}(0) \setminus \{0\})$ é subvariedade numa vizinhança V de 0. Como os vetores $\nabla P(x)$, $\nabla Q(x)$ geram o plano normal a $(\psi^{-1}(0) \setminus \{0\})$ em cada ponto, dizer que $(\psi^{-1}(0) \setminus \{0\})$ não é transversal a $S^{m-1}_{\epsilon_0}$, para algum ϵ_0, em algum ponto x significa que eles se tangenciam em x. Ou seja, existem α_1 , α_2, α_3 reais não todos nulos tais que:

$(\star) : \alpha_1 x = \alpha_2 \nabla P(x) + \alpha_3 \nabla Q(x)$. Defina $wx := (w_1x_1, ..., w_nx_n)$. Fazendo o produto escalar em $(\star)$ pelo campo wx, obtemos $\alpha_1 \langle x, wx\rangle = \alpha_2 \langle \nabla P(x), wx\rangle + \alpha_3 \langle \nabla Q(x), wx\rangle$. Como $P(x)$ é quase homogêneo (resp.$Q(x)$) do tipo $(w_1, ..., w_n; d_1)$(resp. $(w_1, ..., w_n; d_2)$) logo pela equação de Euler temos:

$\langle \nabla P(x), wx\rangle = d_1.P(x)$ e $\langle \nabla Q(x), wx\rangle = d_2.Q(x)$.

Logo, $\alpha_1 \sum_i w_i {x_i}^2 = \alpha_2 d_1.P(x) + \alpha_3 d_2.Q(x)$.

Como $x \in (\psi^{-1}(0) \setminus \{0\}) \cap S^{m-1}_\epsilon$, $P(x) = Q(x) = 0$, logo, $\alpha_1 \sum_i w_i {x_i}^2 = 0$. Mas, $\alpha_1 \neq 0$, pois $\nabla P(x)$ e $\nabla Q(x)$ são linearmente independentes fora de $x = 0$. Logo, $\sum_i w_i {x_i}^2 = 0 \therefore x = 0$.

Ou seja, vale $(\star)$ sse $x = 0$, portanto, o raio de Milnor é infinito. □

Como uma conseqüência do **Teorema 5.0.7** obtém-se outra demonstração para o caso $l = 0$ da Proposição 2.1.2.

Corolário 5.1.2 ([HK]) *Suponha que* $f_z : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$, $z \in \mathbb{R}$ *é uma família contínua de germes de aplicação polinomial quase homogênea, com singularidade isolada. Então, existe uma família contínua de germes de homeomeomorfismos* $h_z : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ *tal que* $f_0 = f_z \circ h_z$.

Demonstração. Basta observar que para qualquer família quase-homogênea, com singularidade isolada, não temos fusão de pontos críticos pois vale que $\mathrm{N}_{\mathcal{R}} f_z(x) = |df_z(x)|^2 = \sum_j \mathrm{M}_j^2 \geq |x|^{2\alpha}$, para constantes positivas C e α, numa pequena vizinhança da origem (Lema 1, [RS]). $\square$

Definição 5.1.1 *Sejam* $\pi : E \to B$, *e* $\pi_1 : E_1 \to B$ *dois fibrados. Dizemos que* π *é equivalente(resp. topologicamente equivalente) a* π_1 *se, existe um difeomorfismo(resp. homeomorfismo)*
$h : E \to E_1$, *tal que,* $\pi = \pi_1 \circ h$. *Isto é, o diagrama abaixo é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] & E_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}$$

Em [HK1], King mostra que a classe do fibrado de Milnor de um germe f_0, é determinada pela classe de $\mathcal{C}^0 - \mathcal{R}-$equivalência deste germe no conjunto dos germes $f : \mathbb{R}^m, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ tais que, $f\mid_{U\setminus\{0\}}$ são topologicamente equivalentes a um germe de projeção, para alguma vizinhança suficientemente pequena U da origem. O resultado a seguir dá condições suficientes para a equivalência dos fibrados de Milnor na família F.

Teorema 5.1.3 *Seja* $F(x,t) = (P(x,t), Q(x,t)) = (f(x) + t\theta(x), g(x) + t\alpha(x))$ *uma família de aplicações analíticas. Suponha que as seguintes condições se verifiquem:*

(A) $\frac{|\langle \nabla P_t(x), \nabla Q_t(x) \rangle|}{|\nabla P_t(x)||\nabla Q_t(x)|} \leq 1 - \rho$, *numa vizinhança* V *de* 0 *em* $\mathbb{R}^n$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *e* $0 \leq \rho < 1$.

(B) $\overline{\langle \nabla P_t(x) \rangle}_{\mathcal{A}_m} = \overline{\langle \nabla P_0(x) \rangle}_{\mathcal{A}_m}$ *e*
$\overline{\langle \nabla Q_t(x) \rangle}_{\mathcal{A}_m} = \overline{\langle \nabla Q_0(x) \rangle}_{\mathcal{A}_m}$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Então, a família F_t é topologicamente trivial

Demonstração.

A idéia da prova é construir um campo de vetores

$V(x,t) = a(x,t)\partial_x P(x,t) + b(x,t)\partial_x Q(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}$ (onde $\frac{\partial}{\partial t}$ é a direção unitária do eixo Ot) com

$$\begin{cases} \langle \partial P(x,t), V(x,t)\rangle = 0 \\ \langle \partial Q(x,t), V(x,t)\rangle = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Ou seja, o campo V é tangente aos níveis $X = F^{-1}(c) = P^{-1}(c_1) \cap Q^{-1}(c_2)$; onde $c = (c_1, c_2)$. Em particular para $c = 0$, temos que o campo V é tangente a variedade $F^{-1}(0) = P^{-1}(0) \cap Q^{-1}(0)$.

Dado o fluxo $\phi(x,t)$ tal que $\phi(x,0) = x$, temos que

$$\frac{\partial P(\phi(x,t))}{\partial t} = \langle \partial P, V\rangle = 0 \therefore P(\phi(x,t)) = cte = P(\phi(x,0) = f(x) \tag{5.2}$$

Análogo para $Q(\phi(x,t)$, portanto $F(\phi(x,t)) = F(\phi(x,0)) = (f(x), g(x))$.

Por (5.1) temos:

$$\begin{cases} \langle \partial P, V\rangle = \langle (\partial_x P, \frac{\partial P}{\partial t}), (a\partial_x P + b\partial_x Q, 1)\rangle = a\|\partial_x P\|^2 + b\langle \partial_x P, \partial_x Q\rangle + \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \\ \langle \partial Q, V\rangle = \langle (\partial_x Q, \frac{\partial Q}{\partial t}), (a\partial_x P + b\partial_x Q, 1)\rangle = a\langle \partial_x P, \partial_x Q\rangle + b\|\partial_x Q\|^2 + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

A matriz associada ao sistema acima é:

$$\begin{pmatrix} \|\partial_x P\|^2 & \langle \partial_x P, \partial_x Q\rangle \\ \langle \partial_x P, \partial_x Q\rangle & \|\partial_x Q\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \theta(x) \\ \alpha(x) \end{pmatrix}$$

Seu determinante

$$\Delta(x,t) := \|\partial_x P(x,t)\|^2 \|\partial_x Q(x,t)\|^2 - \langle \partial_x P(x,t), \partial_x Q(x,t)\rangle^2 \tag{5.4}$$

satisfaz à condição $\Delta(x,t) \neq 0$ para todo $x \in V$, numa vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^m$, $\forall t$, pela hipótese (A) do teorema. Logo, aplicando a inversa nos dois lados do sistema acima temos:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \|\partial_x Q\|^2 & -\langle \partial_x P, \partial_x Q\rangle \\ -\langle \partial_x P, \partial_x Q\rangle & \|\partial_x P\|^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta(x) \\ \alpha(x) \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{\Delta}(\|\partial_x Q\|^2\theta(x) - \langle \partial_x P, \partial_x Q\rangle \alpha(x)) \\ b = -\frac{1}{\Delta}(\|\partial_x P\|^2\alpha(x) - \langle \partial_x P, \partial_x Q\rangle \theta(x)) \end{cases} \tag{5.5}$$

Este campo está bem definido e é suave numa vizinhança aberta $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \backslash (\{0\} \times \mathbb{R})$. Nos pontos $(0,t)$, temos $\Delta(0,t) = 0$, para garantir que o campo está bem definido no eixo Ot, e também a unicidade do fluxo, é suficiente garantir que existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$\|V(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}\| \leq C\|x\| \tag{5.6}$$

Nesta direção provaremos o seguinte resultado.

Lema 5.1.4 *(a)* $|\theta(x)| \leq c_1\|x\|\|\partial_x P\|$, *para alguma constante* $c_1 > 0$.

(b) $|\alpha(x)| \leq c_2\|x\|\|\partial_x Q\|$, *para alguma constante* $c_2 > 0$.

Demonstração.

(a) : Como a função $\theta(x)$ é analítica e $\theta(0) = 0$, temos pela desigualdade de Bochnak-Lojasiewicz [KB],

$$|\theta(x)| \leq c_0\|x\|\|\partial_x \theta(x)\| \tag{5.7}$$

Por outro lado, usando a desigualdade triangular temos:

$|t|\|\partial_x \theta\| - \|\partial_x f(x)\| \leq |\partial_x f(x) + \partial_x \theta(x)\| = \|\partial_x P\| \leq c_1\|\partial_x f(x)\|$, onde na última desigualdade usamos a condição (B), da igualdade do fecho integral.

Agora temos,

$|t|\|\partial_x \theta\| \leq (1 + c_1)\|\partial_x f(x)\| \leq c_2\|\partial_x P(x,t)\|$, onde novamente usamos a condição (B) na última desigualdade.

Como vale a desigualdade para todo t, em particular para $t = 1$ temos,

$$\|\partial_x \theta(x)\| \leq c_2 \|\partial_x P(x,t)\| \tag{5.8}$$

De (5.7) e (5.8) temos:

$\|\theta(x)\| \leq c_0 \|x\| \|\partial_x \theta(x)\| \leq c\|x\| \|\partial_x P(x)\|$.

Da mesma forma consegue-se mostrar a parte (b). $\square$

Proposição 5.1.5 $\|V(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}\| \leq c\|x\|$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|V(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}\| &= \|a(x,t)\partial_x P(x,t) + b(x,t)\partial_x Q(x,t)\| \\ &\leq \|a(x,t)\partial_x P(x,t)\| + \|b(x,t)\partial_x Q(x,t)\| \end{aligned}$$

Vamos tentar estimar a parcela

$$\|a(x,t)\partial_x P(x,t)\| \tag{5.9}$$

Como

$\|a(x,t)\partial_x P(x,t) = |a(x,t)|.\|\partial_x P(x,t)\|$.

Por (5.5) temos,

$$\begin{aligned} &|\frac{1}{\Delta}(\|\partial_x Q\|^2 \theta(x) - \langle \partial_x P, \partial_x Q \rangle \alpha(x))|.\|\partial_x P(x,t)\| \leq \\ &\frac{1}{|\Delta|}\|\partial_x Q\|^2 |\theta(x)| \|\partial_x P\| + \frac{1}{|\Delta|}|\langle \partial_x P, \partial_x Q \rangle|.|\alpha(x)| \|\partial_x P\| \end{aligned} \tag{5.10}$$

Mas,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|\Delta|}\|\partial_x Q\|^2 |\theta(x)|.\|\partial_x P\|.(\frac{\|\partial_x P\|^2 \|\partial_x Q\|^2}{\|\partial_x P\|^2 \|\partial_x Q\|^2}) = \\ = \quad &\frac{|\theta(x)|}{\|\partial_x P\|}(\frac{\|\partial_x P(x,t)\|^2 \|\partial_x Q(x,t)\|^2 - \langle \partial_x P(x,t), \partial_x Q(x,t) \rangle^2}{\|\partial_x P\|^2 \|\partial_x Q\|^2})^{-1} = \\ = \quad &\frac{|\theta(x)|}{\|\partial_x P\|}(1 - \frac{\langle \partial_x P(x,t), \partial_x Q(x,t) \rangle^2}{\|\partial_x P\|^2 \|\partial_x Q\|^2})^{-1} \end{aligned}$$

Pela condição (A), temos que existe δ, $0 < \delta < 1$ tal que
$\frac{|\langle \nabla P_t(x), \nabla Q_t(x)\rangle|^2}{|\nabla P_t(x)|^2|\nabla Q_t(x)|^2} \leq \delta \therefore$

$$1 - \frac{|\langle \nabla P_t(x), \nabla Q_t(x)\rangle|^2}{|\nabla P_t(x)|^2|\nabla Q_t(x)|^2} \geq 1 - \delta \tag{5.11}$$

Do **Lema 5.1.4(a)**, temos,

$$\frac{|\theta(x)|}{\|\partial_x P\|} \leq c_3\|x\| \tag{5.12}$$

De (5.11) e (5.12) temos:

$$\frac{1}{|\Delta|}\|\partial_x Q\|^2|\theta(x)|\|\partial_x P\| \leq c_4\|x\| \tag{5.13}$$

Analogamente para a parcela
$\frac{1}{|\Delta|}|\langle \partial_x P, \partial_x Q\rangle|.|\alpha(x)|.\|\partial_x P\|$ temos,

$$\frac{1}{|\Delta|}|\langle \partial_x P, \partial_x Q\rangle|.|\alpha(x)|.\|\partial_x P\|.(\frac{\|\partial_x P\|^2\|\partial_x Q\|^2}{\|\partial_x P\|^2\|\partial_x Q\|^2}) \tag{5.14}$$

$$= \frac{|\langle \partial_x P, \partial_x Q\rangle||\alpha(x)|}{\|\partial_x P\|\|\partial_x Q\|\|\partial_x Q\|}(\frac{\|\partial_x P(x,t)\|^2\|\partial_x Q(x,t)\|^2 - \langle \partial_x P(x,t), \partial_x Q(x,t)\rangle^2}{\|\partial_x P\|^2\|\partial_x Q\|^2})^{-1}$$

$$= \frac{|\langle \partial_x P, \partial_x Q\rangle||\alpha(x)|}{\|\partial_x P\|\|\partial_x Q\|\|\partial_x Q\|}(1 - \frac{\langle \partial_x P(x,t), \partial_x Q(x,t)\rangle^2}{\|\partial_x P\|^2\|\partial_x Q\|^2})^{-1}$$

Mas,

$$1 - \frac{|\langle \nabla P_t(x), \nabla Q_t(x)\rangle|^2}{|\nabla P_t(x)|^2|\nabla Q_t(x)|^2} \geq 1 - \delta \tag{5.15}$$

e, pelo **Lema 5.1.4(b)** e a condição (A):

$$\frac{|\langle \partial_x P, \partial_x Q\rangle||\alpha(x)|}{\|\partial_x P\|\|\partial_x Q\|\|\partial_x Q\|} < c_4\|x\| \tag{5.16}$$

Portanto de (5.13) e (5.16) temos a seguinte estimativa para (5.9),

$$\|a(x,t)\partial_x P(x,t)\| < c_5\|x\| \tag{5.17}$$

Analogamente mostra-se que

$$\|b(x,t)\partial_x Q(x,t)\| < c_6\|x\| \tag{5.18}$$

Considerando $\frac{c}{2} := \max\{c_5, c_6\}$, segue o resultado. □

□

Corolário 5.1.6 *Considere uma família $F(x,t)$, como no teorema anterior. Se a aplicação $F_0(x) = (f(x), g(x))$ é tal que $\overline{\langle \nabla f(x) \rangle}_{\mathcal{A}_m} = \overline{\langle \nabla g(x) \rangle}_{\mathcal{A}_m}$, então $F_t(x)$ é Milnor Forte, para cada t fixo, e todos os fibrados são equivalentes.*

Corolário 5.1.7 *Considere $f_0 = (P_0, Q_0)$ com singularidade isolada, P_0 e Q_0 satisfazendo as condições (A) e $(B_{\mathbb{R}})$. Suponha que $\Gamma_+(\nabla P_0(x))$ e $\Gamma_+(\nabla Q_0(x))$ são Newton não degenerados. Seja $F(x,t) = (P_0(x) + t\theta(x), Q_0(x) + t\alpha(x))$uma deformação com $\Gamma_+(\nabla\theta(x)) \subset \Gamma_+(\nabla P_0(x))$ e $\Gamma_+(\nabla\alpha(x)) \subset \Gamma_+(\nabla Q_0(x))$. Então, F é topologicamente trivial e os fibrados são equivalentes.*

Demonstração. Que F é topologicamente trivial já segue do resultado anterior. De fato, como os poliedros de Newton $\Gamma_+(\nabla P_0(x))$ e $\Gamma_+(\nabla Q_0(x))$ são não-degenerados, e as deformações são acima do poliedro de Newton, segue do **Teorema 1.2.2** [Ma] capítulo 1, que $\overline{\langle \nabla P_t(x) \rangle}_{\mathcal{A}_m} = \overline{\langle \nabla P_0(x) \rangle}_{\mathcal{A}_m}$ e $\overline{\langle \nabla Q_t(x) \rangle}_{\mathcal{A}_m} = \overline{\langle \nabla Q_0(x) \rangle}_{\mathcal{A}_m}$.

Vamos verificar que para cada t, fixo, F_t é Milnor Forte.

Para isso, considere $r : \mathbb{R}, 0 \to \mathbb{R}^m, 0$ uma curva analítica real, com $\alpha(0) = 0$, não constante.

Logo, para cada t, fixo, temos:

$\nabla_x P_t(r(s)) = \nabla_x P_0(r(s)) + \nabla_x R(r(s))$

$\nabla_x Q_t(r(s)) = \nabla_x Q_0(r(s)) + \nabla_x S(r(s))$

Tomando o desenvolvimento em Taylor obtemos,

$\nabla_x P_t(r(s)) = \alpha_1 s^{a_1} + ... + \alpha_2 s^{n_1} + ...$

$\nabla_x Q_t(r(s)) = \beta_1 s^{a_1} + ... + \beta_2 s^{n_2} + ...$

Como $\Gamma_+(\nabla P_0(x))$ e $\Gamma_+(\nabla Q_0(x))$ são Newton não -degenerados, então $a_1 \leq n_1$ e $a_1 \leq n_2$, para toda curva analítica real.

Logo,

$$\frac{|\langle \nabla P_t(r(s)), \nabla Q_t(r(s))\rangle|}{|\nabla P_t(r(s))|\ |\nabla Q_t(r(s))|} = \frac{|\langle \alpha_1 s^{a_1} + ..., \beta_1 s^{a_1} + ...\rangle|}{|\alpha_1 s^{a_1} + ...|\ |\beta_1 s^{a_1} + ...|} = \frac{|\langle \alpha_1, \beta_1\rangle| s^{2a_1} + ...}{s^{2a_1}|\alpha_1|(1+...)|\beta_1|(1+...)}$$

$$= \frac{|\langle \alpha_1, \beta_1\rangle| s^{2a_1}(1+....)}{|\alpha_1||\beta_1| s^{2a_1}(1+...)} = \frac{|\langle \alpha_1, \beta_1\rangle|}{|\alpha_1||\beta_1|} + s(...) = \frac{|\langle \alpha_1, \beta_1\rangle|}{|\alpha_1||\beta_1|} + u(s)$$

Como $\frac{|\langle \alpha_1,\beta_1\rangle|}{|\alpha_1||\beta_1|} < 1$ e $\lim_{s \quad 0} u(s) = 0$, logo para s suficientemente pequeno temos: $\frac{|\langle \nabla P_t(r(s)), \nabla Q_t(r(s))\rangle|}{|\nabla P_t(r(s))|\ |\nabla Q_t(r(s))|} \leq 1 - \rho(t)$ onde $0 < \rho(t) \leq 1$ para $t \in \mathbb{R}$ fixo. Logo, existe uma vizinhança $V_t \subsetneq \mathbb{R}^m$, $0 \in V_t$ tal que

$$\forall\ x \in V_t - \{0\}\ :\ \frac{|\langle \nabla P_t(x)), \nabla Q_t(x)\rangle|}{|\nabla P_t(x)||\nabla Q_t(x)|} \leq 1 - \rho(t);\ 0 < \rho(t) \leq 1.$$

Conseqüentemente o resultado. □

Corolário 5.1.8 *Sejam $f_0(x) = (P_0(x), Q_0(x))$ e $F(x,t) = (P_0(x) + t\theta(x), Q_0(x) + t\beta(x))$ uma deformação de f_0, e suponha que $\Gamma_+(\nabla P_0(x))$ e $\Gamma_+(\nabla Q_0(x))$ são Newton não-degenerados.*

(1) *Se f_0 satisfaz à condição (A) de Jaquemard, então F é topologicamente trivial.*

(2) *Se além disso, f_0 satisfaz às condições (A) e $(B_{\mathbb{R}})$, então F_t é Milnor forte para cada t e as fibrações associadas são equivalentes.*

Observamos que o resultado acima pode ser estendido para deformações mais gerais do tipo $F(x,t) = (P_0(x) + t\theta(x,t), Q_0(x) + t\alpha(x,t))$ com as mesmas hipóteses, isto é:

(A) $\frac{|\langle \nabla P_t(x), \nabla Q_t(x)\rangle|}{|\nabla P_t(x)||\nabla Q_t(x)|} \leq 1 - \rho$, numa vizinhança $0 \in V \subset \mathbb{R}^m$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \rho < 1$.

(B) $\overline{\langle \nabla P_0(x)\rangle}_{\mathcal{A}_m} = \overline{\langle \nabla Q_0(x)\rangle}_{\mathcal{A}_m}$

(C) $\Gamma_+(\nabla P_0(x))$ e $\Gamma_+(\nabla Q_0(x))$ são Newton não -degenerados

A trivialidade topológica da família segue do **Teorema 4.9** [JD] de Damon ou do **Teorema 4.6** [Ga] de Gaffney. Ambos garantem que se o diagrama de Newton do gradiente de P_0 e Q_0 são Newton não-degenerados, no sentido de Khovanskii [KH], então F é $\mathcal{C}^0 - \mathcal{K}-$ topologicamente trivial.

Portanto os conjuntos dos zeros $F_t^{-1}(0)$ são homeomorfos. Por outro lado, é fácil mostrar que as hipóteses acima implicam que F é uma boa deformação. Desta forma podemos usar o Teorema do King para obter a trivialidade topológica.

O resto da demonstração, isto é, a prova de que P_t e Q_t satisfazem (A) e $(B_{\mathbb{R}})$, para todo t, segue análogo à prova que fizemos no **Corolário 5.1.7** .

Proposição 5.1.9 *Seja $F(x,u) = (P_0(x)+G(x,u), Q_0(x)+H(x,u))$ uma deformação de um germe quase-homogêneo $f(x) = (P_0(x), Q_0(x))$, do tipo $(w_1, ..., w_n; d)$ com singularidade isolada, se $fil(G_u) \geq fil(P_0)$, $fil(H_u) \geq fil(Q_0)$, então F_u é Milnor forte para todo u suficientemente pequeno e as fibrações associadas são equivalentes. Se $fil(G_u) > fil(P_0)$, $fil(H_u) > fil(Q_0)$, o mesmo se verifica para todo $u \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Como já vimos $\psi_u(x,\theta) = cos(\theta)(P_0(x) + G(x,u)) + sin(\theta)(Q_0(x) + H(x,u))$ é $(c)-$regular em θ. Portanto as aplicações F_u são Milnor Forte para cada u. Além disso, a perturbação é topologicamente trivial e portanto os fibrados são equivalentes. □

5.2 Observações finais

Um problema importante não considerado neste trabalho é o estudo da topologia das singularidades definidas por um germe ψ com singularidade isolada que satisfaz a uma condição Milnor forte. Aparentemente ainda não existe um método para tratar desta questão em geral. Um problema importante, neste contexto, é determinar se estas singularidades são, ou não, topologicamente equivalentes a uma singularidade isolada de uma função holomorfa. Um primeiro exemplo de uma singularidade isolada não equivalente a uma holomorfa foi apresentado por A' Campo [C].

Exemplo 5.2.1 *$f : \mathbb{C}^{m+2} \to \mathbb{C}$, dada por $f(u,v,z_1,...,z_m) = uv(\overline{u}+\overline{v}) + z_1^2 + ... + z_m^2$*

Sejam $f : \mathbb{C}^{m+1}, 0 \to \mathbb{C}, 0$ um germe de função holomorfa, $\phi = \frac{f}{\|f\|} : S_\epsilon \to S^1$ a fibração de Milnor associada, $F_\theta = \phi^{-1}(\exp(i\theta))$ uma fibra desta fibração e $h : F_\theta \to F_\theta$, o homeomorfismo característico da fibração ϕ.

O automorfismo induzido $h_* = (h^q)_{q\geq 0} : H^q(F_\theta, \mathbb{C}) \to H^q(F_\theta, \mathbb{C})$ é a monodromia (a coeficientes complexos) de $f^{-1}(0)$ em 0.

O resultado principal de A'Campo em [C] é o seguinte,

Teorema 5.2.2 *Se* 0 *é ponto singular de* f*, então o número de Lefschetz de* h*,* $\bigwedge(f) = \sum_i (-1)^i tr(h_i) = 0$.

Quando 0 é um ponto singular isolado de f, sabemos (ver [Mi]) que:

$$H^q(F_\theta, \mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{C}, q = 0; \\ 0, q \neq 0, q \neq m; \\ \mathbb{C}^\mu, q = m. \end{cases}$$

onde $\mu = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{m+1}}{\langle Jf \rangle}$, e Jf é o ideal jacobiano de f. Neste caso, o teorema acima diz que $tr(h^m) = (-1)^{m+1}$. Para o exemplo acima, A'Campo mostra que $tr(h^{m+1}) = 2.(-1)^{m+2} \neq (-1)^{m+2}$ e portanto, $\bigwedge(f) \neq 0$ e f não pode ser topologicamente equivalente a um germe holomorfo.

O cálculo da monodromia para as famílias estudadas em [RSV] é um problema ainda não abordado

Quando $\psi : \mathbb{R}^m, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ é dada por $\psi_{F,X}$, com F, X campos holomorfos dados por $F(z) = (z_1^{a_1}, ..., z_m^{a_m})$, $X(z) = (z_1^{b_1}, ..., z_m^{b_m})$, $a_i > b_i \geq 1$, para todo i, em [RSV] os autores provam o seguinte:

Teorema 5.2.3 ([RSV], pag 211) *A variedade singular* $\widehat{V} = \psi^{-1}(0)$ *é homeomorfa a variedade de Brieskorn* $V_{c_1,...,c_m}$*, e as correspondentes fibrações de Milnor são topologicamente equivalentes. Mais precisamente, existe um homeomorfismo* $h : \mathbb{C}^m, 0 \to \mathbb{C}^m, 0$ *tal que* $\psi = f \circ h$*, onde* f *é o polinômio de Pham-Brieskorn :* $f(z_1, ..., z_m) = z_1^{c_1} + ... + z_m^{c_m}$.

A prova é direta. Basta considerar $E \subset \mathbb{C}^m$ o divisor $\{z_1 z_2 ... z_m = 0\}$, e $h : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$, $h(z_1, ... z_m) = (w_1, ... w_m)$, onde $w_i = \|z_i\|^{\frac{2b_i}{c_i}} z_i$. Então, h é claramente um difeomorfismo analítico real que se estende a um homeomorfismo de $\mathbb{C}^m$ sobre si mesmo. Além disso, para cada $i = 1, ..., m$ temos: $z_i^{a_i} \overline{z_i}^{b_i} = z_i^{c_i} \|z_i\|^{2b_i} = (\|z_i\|^{\frac{2b_i}{c_i}} z_i)^{c_i} = w_i^{c_i}$. Portanto o teorema.

A continuidade deste estudo para as demais famílias estudadas em [RSV] está sendo feita por Seade e Pichon em [PS], em preparação.

O projeto para estudar a topologia de fibração de Milnor de singularidades reais, é um projeto interessante e pode levar à caracterização de uma classe de singularidades cuja topologia esteja relacionada, de alguma forma, ao caso holomorfo. Este é um problema que pretendo estudar na continuidade deste trabalho.

Os resultados obtidos no capítulo 4 podem ser úteis para associar invariantes das variedades M_θ à topologia de ψ, que poderiam distinguir as fibrações que são topologicamente equivalentes às fibrações holomorfas.

Uma outra direção para futuros estudos, é o caso de singularidades não isoladas. A obtenção de condição suficiente para a trivialidade topológica de famílias, neste caso, é um problema difícil e importante na teoria de Singularidades [Ja2], [Ga1].

Referências Bibliográficas

[BL] J. Bochnak and S. Lojasiewicz, *A Converse of the Kuiper-Kuo Theorem*, Lecture Notes in Mathematics 192, Springer, Berlin, 1971, 254–261 .

[BK] K. Bekka and S. Koike, *The Kuo Condition, an Inequality of Thom's Type and (c)-Regularity*, Topology, vol.37 , 1, pp.45–62, 1998.

[C] N. A'Campo, *Le Nombre de Lefschetz d'une Monodromie*, Indag. Math., 35, 1973, 113–118.

[CA] C. Bivià-Ausina, *Singularidades de Thom-Boardman en Deformaciones Genéricas de Gérmes de Aplicaciones y Métodos para el Cálculo de Clausuras Integrales de Ideales*, Tese de doutorado, Universitat de València, 2000.

[CR] C. R. L. Fernandes, *Fecho Integral de Ideais e Whitney-Equisingularidades*, Dissertação de Mestrado apresentada ao ICMC-USP-São Carlos, 2001.

[DG] J. Damon, e T. Gaffney, *Topological Triviality of Deformations of Functions and Newton Filtrations*, Inv. Math.72, pp.335-358, 1983.

[FP] T. Fukui and Laurentiu Paunescu, *Stratification Theory from the Weighted Point of View*, Canadian Journal of Mathematics, 53(2001), 73-97.

[Ga] T. Gaffney, *The Integral Closure of Modules and Whitney equisingularity*, Inv. Math.102, pp.301–322, 1992.

[Ga1] T. Gaffney, *Polar Multiplicities and Equisingularity of Map Germs*, Topology Vol. 32, No. 1, pp.185–223, 1993.

[GR] G.-Martin Greuel, *Constant Milnor Number Implies Constant Multiplicity For Quasihomogeneous Singularities*, Manuscripta Math.56, pp.159–166, 1986.

[HK] H. C. King, *Topological Type in Families of Germs*, Inventiones Matematicae, 62 , pp.1–13, 1980.

[HK1] H. King, *Topological Type of Isolated Critical Points*, Annals of Mathematics, 107, 1978,385-397.

[Ja] A. Jacquemard, *Fibrations de Milnor Pour des Applications Réelles*, Boll. Un. Mat. Ital., vol.37 , 1, pp.45–62, 3-B,1989.

[Ja1] A. Jacquemard, *Thèse 3ème cycle Université de Dijon*, 1982.

[Ja2] A. Jacquemard, *On the Fiber of the Compound of a Real Analytic Function by a Projection*, Boll. Un. Mat. Ital., 8, 2-B, pp.263–278, 3-B,1999.

[JD] J. Damon, *Topological Triviality of Versal Unfoldings of Complete Intersections*, Annales Inst. Fourier 34 (4)(1984),pp.225-251.

[K] T.-C. Kuo, *On* $\mathcal{C}^0-$*Sufficiency of Jets of Potential Functions*, Topology, 8, 1969, 167–171.

[Ku] N. H. Kuiper, $\mathcal{C}^1-$*Equivalence of Functions Near Isolated Critical Points*, Proc. Symp. in Infinite Dimensional Topology (Baton Rouge, 1967), Annals of Mathematics Studies 69 (Princeton, 1968), 199–218.

[KB] K. Bekka, *Regular Quasi-Homogeneous Stratifications*, "Stratification, singularities and diferential equations II Stratifications and Topology of Singular Space“ Travaux en cours 55, Hermann,1997, 1–14.

[KB1] K. Bekka, *(c)-Regularité et Trivialité Topologique*, Singularity theory and its applications,Warwick 1989, Part I, D.Mond and J. Montaldi, Eds., SLNM 1462, Springer, (1991), pp.42-62.

[KH] A. G. Khovanskii, *Newton Polyhedra and Toroidal Varieties*, Funct. Anal. and Appl.11 (1977),pp.289-295.

[Ma1] M. J. Saia, *The Integral Closure of Ideals and Whitney Equisingularity of Germs of Hypersurfaces*, Matemática Comtemporânea, S. B.M. "4th Workshop on Real and Complex Singularities ", Ed. M. A. S. Ruas, S. Carlos - USP, Brasil. Vol. 12, 183-198, (1997).

[Mi] J. Milnor , *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies 61, Princeton Univ. Press, 1968.

[Ma] M. J. Saia, *The Integral Closure of Ideals and the Newton Filtration*, Algebraic Geometry 5, 1-11, 1996.

[NR] R. Nonato e M. A. S. Ruas, *Real Milnor Fibrations and* $(c)-$*Regularity*, será submetido para uma revista especializada.

[PS] A. Pichon and Seade, *Real Singularities and Open-book Decomposition of the* $3-$*sphere*, em preparação.

[R] M. A. S. Ruas, *On de Degree of* C^l-*Determinacy*, Math. Scand.59, 1986, pp.59–70.

[RS] M. A. S. Ruas e M. J. Saia, C^l-*Determinacy of Weighted Homogeneous Germs*, Hokkaido Math. Journal XXVI, no.1, 1997, pp.89–99.

[RSV] M. A. S. Ruas, J.Seade and Verjovsky *On Real Singularities with a Milnor Fibration*, Trends in Mathematics: trends in Singularities, © 2002 Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, pp.191–213.

[S1] J. Seade, *Fibred Links and a Construction of Real Singularities via Complex Geometry*, Topology, vol.37, 1, pp.45–62, 1998.

[S2] J. Seade, *Open Book Decomposition Associated to Holomorphic Vector Fields*, Bol. Soc. Mat. Mexicana(3), vol.3 , pp.323–336, 1997.

[Te] B. Teissier, *Introduction to Equisingularity Problems*, AMS Proc. Symp. Pure Maths 29, pp.539–632, 1975.

[Ve] A. Verona, *Stratified Mappings-structures and Triangulability*, Lecture Notes in Math.1102, Springer Verlag(1983).

[W] C. T. C. Wall, *Finite Determinacy of Smooth Map-germs*, Bull. London. Math. Soc.13, pp.481–539, 1981.