

Roberto F. Ausas

ICMC - Ramal 736628, rfausas@gmail.com

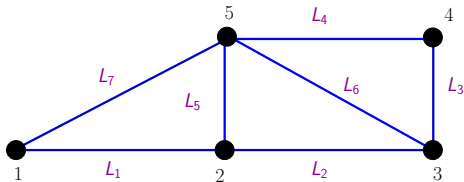
O sistema linear de uma rede hidráulica

Objetivos:

- Entender a modelagem de distintos sistemas físicos tais como redes hidráulicas ou elétricas do ponto de vista da Álgebra Linear;
- Aprender como resolver tais problemas de maneira sistemática no computador;

O que temos estudado até agora ...

Consideramos por exemplo redes do tipo mostrado na figura



Nesta rede temos:

- n_c canos ou arestas e n_v nós ou vértices

A **conservação da massa** diz que:

$$\sum_{\forall r \text{ que tem o nó } i} Q_r^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_p$$

Teremos **uma** equação por cada nó:

$$\text{Nó 1: } \sum Q_r^{(1)} = C_1(p_1 - p_2) + C_7(p_1 - p_5) = 0$$

$$\text{Nó 2: } \sum Q_r^{(2)} = C_1(p_2 - p_1) + C_5(p_2 - p_5) + C_2(p_2 - p_3) = 0$$

$$\text{Nó 3: } \sum Q_r^{(3)} = C_2(p_3 - p_2) + C_6(p_3 - p_5) + C_3(p_3 - p_4) = 0$$

$$\text{Nó 4: } \sum Q_r^{(4)} = C_3(p_4 - p_3) + C_4(p_4 - p_5) = 0$$

$$\text{Nó 5: } \sum Q_r^{(5)} = C_7(p_5 - p_1) + C_5(p_5 - p_2) + C_6(p_5 - p_3) + C_4(p_5 - p_4) = 0$$

O sistema de equações em forma matricial

$$\begin{pmatrix} C_1 + C_7 & -C_1 & 0 & 0 & -C_7 \\ -C_1 & C_1 + C_2 + C_5 & -C_2 & 0 & -C_5 \\ 0 & -C_2 & C_2 + C_3 + C_6 & -C_3 & -C_6 \\ 0 & 0 & -C_3 & C_3 + C_4 & -C_4 \\ -C_7 & -C_5 & -C_6 & -C_4 & C_4 + C_5 + C_6 + C_7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- A matriz é simétrica
- A soma dos elementos de qualquer linha/coluna é zero
- A matriz **é singular**

A matriz da rede (sem conexões por enquanto) de maneira geral se descreve como

$$A_{ij} = \begin{cases} \sum_{k \text{ conectados com } i} C_k^{(i)} & \text{se } i = j \\ -C_r & \text{se } i \neq j, \text{ com } i \text{ conectado a } j \text{ por } C_r \\ 0 & \text{se não há conexão entre } i \text{ e } j \end{cases}$$

Observação: *Em geral, um nó estará conectado a um número relativamente pequeno de nós. Isto fará com que a matriz A possua muitos zeros, o que pode ser explorado para salvar memória e tempo de cálculo!!*

Matriz de conectividades

Uma forma “inteligente” de armar a matriz A , utiliza a chamada matriz de conectividades $\text{conec} \in \mathbb{N}^{n_c \times 2}$. Esta é uma estrutura muito conveniente para descrever a rede

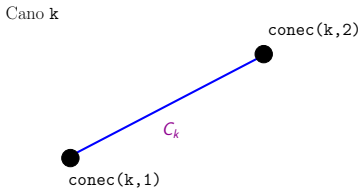
$$\text{conec} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 2 \\ 5 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Isto é um ingrediente chave no método dos **Elementos Finitos!**

Olhando para a matriz **global** da rede, a ideia é ir **acumulando** nela, a matriz **local** associada a cada cano. Para o cano k , de condutividade C_k , teremos uma matriz de 2×2

$$\begin{pmatrix} C_k & -C_k \\ -C_k & C_k \end{pmatrix}$$

Para saber em que posições da matriz global acumular, olhamos para as conectividades



Por exemplo para nossa rede

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Cano 1}} \begin{pmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Cano 2}}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Cano 3}} \begin{pmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\text{Cano 7}} \begin{pmatrix} c_1 + c_7 & -c_1 & 0 & 0 & -c_7 \\ -c_1 & c_1 + c_2 + c_5 & -c_2 & 0 & -c_5 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 + c_6 & -c_3 & -c_6 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 \\ -c_7 & -c_5 & -c_6 & -c_4 & c_4 + c_5 + c_6 + c_7 \end{pmatrix}$$

Montagem da matriz: Algoritmo

O algoritmo para fazer a montagem empregando `conec` é:

```
function A = Assembly(nv, nc, conec, C)

    A = zeros(nv);
    for k=1:nc
        p = conec(k,1);
        q = conec(k,2);
        A(p,p) = A(p,p) + C(k);
        A(q,q) = A(q,q) + C(k);
        A(p,q) = A(p,q) - C(k);
        A(q,p) = A(q,p) - C(k);
    end
end
```

(arquivo Assembly.m)

Na lista, a ideia é resolver redes mais complexas, por exemplo de um **bairro ou uma cidade completa!**

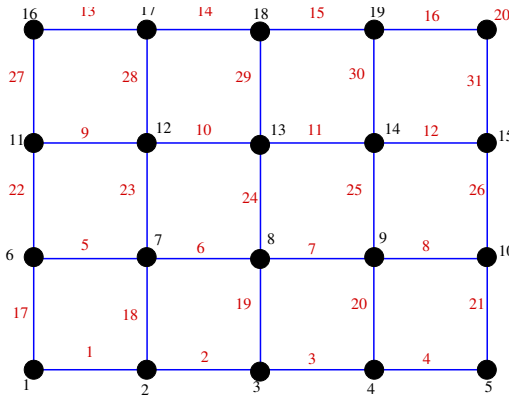
Vamos fornecer a função `RedeHidraBairro` que gera uma rede quadrada com n nós na horizontal por m nós na vertical.

```
> [nv, nc, conec, C, coords] = RedeHidraBairro (n, m,  
CH, CV)
```

Por exemplo, com $n = 5$ e $m = 4$, geramos a matriz de conectividades

$$\text{conec} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 19 & 20 \\ 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$$

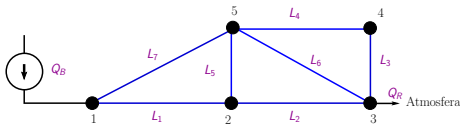
como mostrado na figura:



Conectando a rede

Vamos continuar com o exemplo simples por simplicidade. Agora precisamos remover a singularidade da matriz A conectando um nó à atmosfera, p.e. o nó n_{atm} , fixando a sua pressão ao valor $P_{ref} = 0$.

Também vamos conectar uma bomba que injeta Q_B no nó n_B



⇒ Vamos resolver um novo sistema de equações

$$\tilde{A} \mathbf{p} = \mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} C_1 + C_7 & -C_1 & 0 & 0 & -C_7 \\ -C_1 & C_1 + C_2 + C_5 & -C_2 & 0 & -C_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_3 & C_3 + C_4 & -C_4 \\ -C_7 & -C_5 & -C_6 & -C_4 & C_4 + C_5 + C_6 + C_7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_B \\ 0 \\ Pref \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuja matriz não é singular!

De maneira geral podemos descrever a matriz \tilde{A} e o vetor \mathbf{b} como:

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{se } i \neq n_{atm} \\ 0 & \text{se } i = n_{atm} \text{ e } j \neq n_{atm} \\ 1 & \text{se } i = j = n_{atm} \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq n_{atm} \\ Q_B & \text{se } i = n_B \\ Pref & \text{se } i = n_{atm} \end{cases}$$

i.e., ignoramos a equação do nó conectado à atmosfera e a substituímos por uma equação que diz: $p_{n_{atm}} = Pref$. Para n_v arbitrário

$$\begin{pmatrix}
 A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n_{atm}} & \dots & A_{1n_B} & \dots & A_{1n_V} \\
 A_{21} & A_{22} & \dots & A_{1n_{atm}} & \dots & A_{1n_B} & \dots & A_{2n_V} \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
 A_{n_B 1} & A_{n_B 2} & \dots & A_{n_B n_{atm}} & \dots & A_{n_B n_B} & \dots & A_{n_B n_V} \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
 A_{n_V 1} & A_{n_V 2} & \dots & A_{n_V n_{atm}} & \dots & A_{n_V n_B} & \dots & A_{n_V n_V}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 p_1 \\
 p_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 p_{n_{atm}} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 p_{n_B} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 p_{n_V}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 Pref \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 Q_B \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 0
 \end{pmatrix}$$

Conectando a rede em Octave

A função de Octave que arma o sistema linear de equações a ser resolvido é:

```
function [Atilde b] = BuildSystem(nv, A, QB, nB, Pref, natm)

Atilde = A;
Atilde(natm, :) = 0.0;
Atilde(natm, natm) = 1.0;
b = zeros(nv, 1);
b(nB) = QB;
b(natm) = Pref;

end
```

(arquivo BuildSystem.m)

Agora podemos resolver o sistema e achar as pressões em cada nó

$$\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{b}$$

que em Octave se faz usando a “**barra**” \:

```
> p = Atilde \ b
```

Que acontece se eu pegar essa pressão e multiplicar pela matriz A original?, i.e.

```
> desbal = A * p
```

Post-processos da solução

- **Gráfico das pressões sobre a rede:**

Um passo importante após ter resolvido um problema é o de visualizar os resultados. Na lista 3 se pede utilizar várias funções de Octave que permitirão visualizar as pressões, as vazões e as linhas de pressão constante.

- **Cálculo da conductância equivalente:**

Pode ser de utilidade calcular qual é a conductância equivalente entre dois pontos da rede. Se consideramos a diferença de pressão entre o ponto em que foi conectada a bomba e o ponto conectado à atmosfera, a conductância seria

$$> C_{eq} = Q_B / (p(nB) - P_{ref})$$

- **Vazão em cada cano:**

Definindo a matriz de conductancias $K \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$ (que é diagonal) e uma outra matriz auxiliar $D \in \mathbb{R}^{n_c \times n_v}$:

$$K_{ij} = \begin{cases} C_{r_i} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{no resto} \end{cases}, \quad D_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = \text{conec}(k, 1) \\ -1 & \text{se } j = \text{conec}(k, 2) \\ 0 & \text{no resto} \end{cases}$$

Podemos calcular o vetor de vazões nos canos $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n_c}$

$$\mathbf{J} = K (D \mathbf{p}) = K \mathbf{d}$$

> vazao = K * D * p

- **Potência dissipada na rede:**

Em cada cano da rede: $\Phi_r = J_r \Delta p_r$ (=vazão no cano \times diferença de pressão no cano). Então, somando sobre todos os canos, a potência total perdida será:

$$\Phi_T = \sum_{r=1}^{n_c} J_r d_r = \mathbf{d}^T \mathbf{J}$$

$$\Rightarrow \Phi_T = (D\mathbf{p})^T (KD\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T (D^T KD)\mathbf{p}$$

> potencia = $\mathbf{p}' * (D' * K * D) * \mathbf{p}$

Comentários finais

No estudo das redes hidráulicas estamos fazendo uma suposição muito forte:

O sistema tem um comportamento linear

mas, lembremos que **é uma aproximação de modelagem**, já que boa parte dos escoamentos relevantes na engenharia são turbulentos e por tanto não lineares.

A resolução de circuitos elétricos é totalmente análoga à das redes hidráulicas, e de fato neste caso a aproximação de linearidade é muito boa.

A linearidade, nos permitirá desenvolver alguns conceitos de álgebra linear, o que será estudado em próximas aulas.