Capítulo 10

INTEGRAÇÃO TRIPLA

10.1 Integração Tripla sobre Paralelepípedos

Este capítulo é totalmente análogo ao anterior.

Sejam $R \subset \mathbb{R}^3$ o paralelepípedo retangular definido por $R = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$ e a função limitada $w = f(x,y,z)$ definida em R. Consideremos as seguintes partições de ordem n dos intervalos: $[a,b]$, $[c,d]$ e $[p,q]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots\ldots\ldots < x_n = b$$
$$c = y_0 < y_1 < \ldots\ldots\ldots\ldots < y_n = d$$
$$p = z_0 < z_1 < \ldots\ldots\ldots\ldots < z_n = q.$$

Subdividamos R em n^3 sub-paralelepípedos $R_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$.

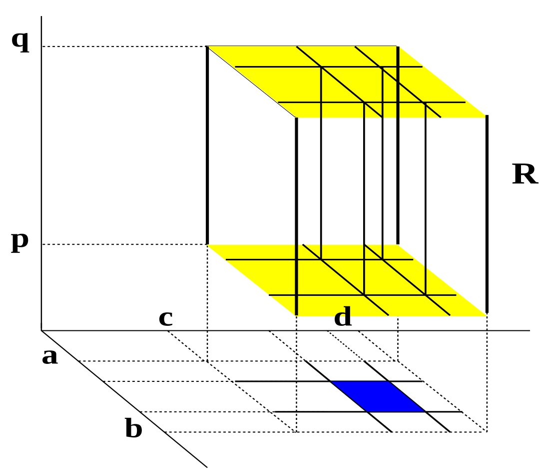


Figura 10.1: Subdivisão de R.

Denotemos por $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $\Delta y = \dfrac{d-c}{n}$, $\Delta z = \dfrac{q-p}{n}$. Escolhamos $c_{ijk} \in R_{ijk}$ e formemos a seguinte soma de Riemann:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{ijk}) \Delta x \, \Delta y \, \Delta z.$$

Definição 10.1. *Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ *existe e é independente da escolha dos* $c_{ijk} \in R_{ijk}$ *e da partição, denominamos este limite de integral tripla de* f *sobre* R *e a denotamos por:*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

Em tal caso f *é dita* **integrável sobre** R.

Teorema 10.1. *Se* f *é contínua em* R*, então* f *é integrável sobre* R.

Para a prova do teorema veja **[EL]**.

No capítulo anterior vimos que se:

$$f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$f(x,y) \geq 0$ e contínua para todo $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$, a integral dupla:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

representa o volume do sólido:

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x,y) \in [a,b] \times [c,d],\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}.$$

Para integrais triplas esta interpretação geométrica não é conveniente, pois o gráfico de f é um subconjunto de $\mathbb{R}^4$ o qual não é possível visualizar.

Mas se $f(x,y,z) = 1$ para todo $(x,y,z) \in R$:

$$\iiint_R dx\,dy\,dz$$

representa o volume de R (veja o exemplo 1). Isto se justifica, pois a soma de Riemann correspondente:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

é a soma dos volumes dos n^3 sub-paralelepípedos formado pela partição; então, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ é exatamente o volume de R.

A integral tripla tem propriedades análogas às das integrais duplas.

Proposição 10.1. *Seja* $\mathbf{x} = (x,y,z) \in R$.

1. **Linearidade da integral tripla.** *Se* f *e* g *são funções integráveis sobre* R*, então para todo* α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\,f + \beta\,g$ *é integrável sobre* R*, e:*

$$\boxed{\iiint_R \big(\alpha\,f(\mathbf{x}) + \beta\,g(\mathbf{x})\big)\,dx\,dy\,dz = \alpha \iiint_R f(\mathbf{x})\,dx\,dy\,dz + \beta \iiint_R g(\mathbf{x})\,dx\,dy\,dz}$$

onde $\mathbf{x} = (x,y,z)$.

2. *Se f e g são integráveis sobre R e $g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$, para todo $\mathbf{x} \in R$, então:*

$$\boxed{\iiint_R g(\mathbf{x})\,dx\,dy\,dz \leq \iiint_R f(\mathbf{x})\,dx\,dy\,dz}$$

3. *Se R é subdividido em k paralelepípedos e f é integrável sobre cada R_i, $i = 1, ..., k$ então f é integrável sobre R e,*

$$\boxed{\iiint_R f(\mathbf{x})\,dx\,dy\,dz = \sum_{i=1}^{k} \iiint_{R_i} f(\mathbf{x})\,dx\,dy\,dz}$$

A prova segue diretamente das definições.

A noção de conteúdo nulo poder ser estendida ao paralelepípedo R de forma completamente análoga ao caso do retângulo; mudando sub-retângulos por sub-paralelepípedos e área por volume. Como antes, o teorema é válido se o conjunto de descontinuidades de f é de conteúdo nulo. Para integrais triplas continua valendo o teorema de Fubini. Agora temos $3\,! = 6$ possíveis integrais iteradas.

Teorema 10.2. (Fubini) *Seja $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em R. Então:*

$$\begin{aligned}
\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_p^q f(x,y,z)\,dz\right] dy\right] dx \\
&= \int_p^q \left[\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y,z)\,dx\right] dy\right] dz \\
&= \int_c^d \left[\int_a^b \left[\int_p^q f(x,y,z)\,dz\right] dx\right] dy \\
&= \int_a^b \left[\int_p^q \left[\int_c^d f(x,y,z)\,dy\right] dz\right] dx \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

A prova do teorema de Fubini para integrais triplas é completamente análoga à das integrais duplas, que pode ser vista no apêndice.

Exemplo 10.1.

[1] Calcule $\iiint_R dx\,dy\,dz$, onde $R = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$.

$$\iiint_R dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\int_p^q \left[\int_c^d dy\right] dz\right] dx = (d-c)\,(q-p)\,(b-a),$$

que é o volume de R.

[2] Calcule $\iiint_R xyz\,dx\,dy\,dz$, onde $R = [0,1] \times [1,2] \times [0,3]$.

$$\iiint_R xyz\,dx\,dy\,dz = \int_1^2 \left[\int_0^1 \left[\int_0^3 xyz\,dz\right) dx\right] dy = \frac{9}{2}\int_1^2 \left[\int_0^1 x\,y\,dx\right] dy = \frac{27}{8}.$$

[3] Calcule $\iiint_R sen(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, onde $R = [0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,\pi]$.

$$\iiint_R sen(x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^\pi \left[\int_0^\pi \left[\int_0^\pi sen(x+y+z)\,dz\right] dx\right] dy = -8.$$

[4] Calcule $\iiint_R (x^2+y^2+z^2+x\,y\,z)\,dx\,dy\,dz$, onde $R = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

$$\begin{aligned}\iiint_R (x^2+y^2+z^2+x\,y\,z)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2+y^2+z^2+xyz)\,dz\right] dx\right] dy\\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2+y^2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\,x\,y))\,dx\right] dy\\ &= \int_0^1 (\frac{2}{3}+\frac{y}{4}+y^2)\,dy = \frac{9}{8}.\end{aligned}$$

10.2 Integrais Triplas sobre Regiões mais Gerais

10.2.1 7.2.1 Regiões Elementares no Espaço

De forma análoga ao estudado no capítulo das integrais duplas definidas em regiões mais gerais. Consideremos $W \subset \mathbb{R}^3$.

Regiões de tipo I

A região W é do tipo I se pode ser descrita por:

$$\boxed{W = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(x,y)\in D,\ f_1(x,y)\le z\le f_2(x,y)\}}$$

onde D é a região elementar do plano, projeção de W no plano xy e $f_1,\ f_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas, sendo $f_1 \le f_2$.

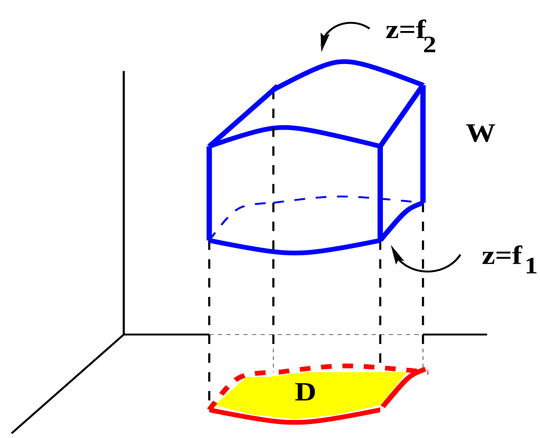


Figura 10.2: Região de tipo I.

Regiões de tipo II

W é do tipo II se pode ser descrita por:

$$\boxed{W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, z) \in D,\ g_1(x, z) \leq y \leq g_2(x, z)\}}$$

onde D é a região elementar do plano, projeção de W no plano xz e $g_1,\ g_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas, sendo $g_1 \leq g_2$.

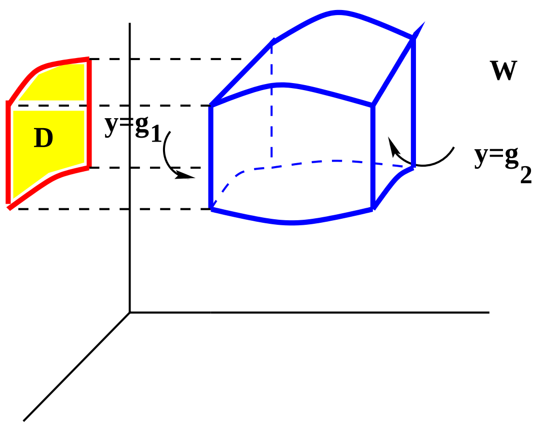


Figura 10.3: Região de tipo II.

Regiões de tipo III

W é do tipo III se pode ser descrita por:

$$\boxed{W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (y, z) \in D,\ h_1(y, z) \leq x \leq h_2(y, z)\}}$$

onde D é a região elementar do plano, projeção de W no plano yz e $h_1,\ h_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas, sendo $h_1 \leq h_2$.

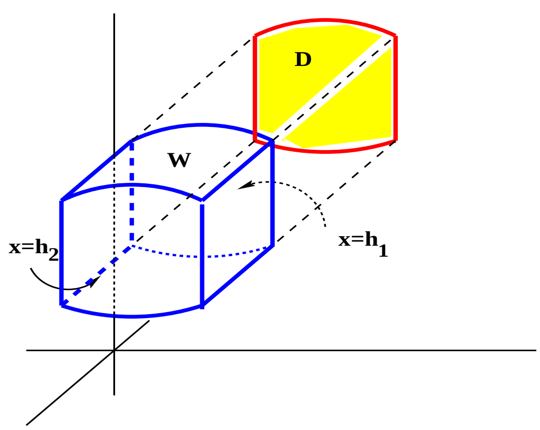


Figura 10.4: Região de tipo III.

A região W é de tipo IV se é do tipo I, ou tipo II, ou tipo III, como por exemplo região limitada por uma esfera, ou por um elipsóide.

Em qualquer dos casos anteriores, W é chamada **região elementar do espaço**. As regiões W são conjuntos fechados e limitados em $\mathbb{R}^3$. Alguns exemplos de regiões elementares:

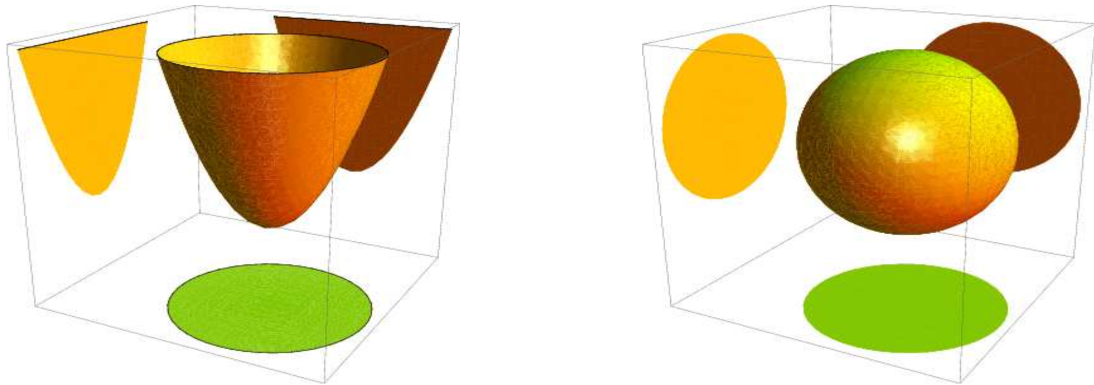


Figura 10.5: Regiões elementares.

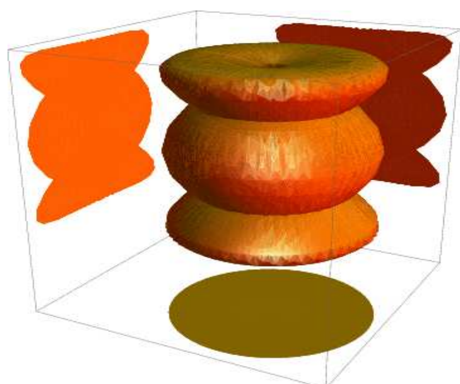


Figura 10.6: Região elementar.

10.3 Extensão da Integral Tripla

Seja W uma região elementar em $\mathbb{R}^3$ tal que $W \subset R$, R um paralelepípedo como antes. Se $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, definamos $f^* : R \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f^*(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{se } (x,y,z) \in W \\ 0 & \text{se } (x,y,z) \in R - W. \end{cases}$$

Se ∂W tem conteúdo nulo, então, f^* é integrável sobre R e definimos a integral tripla de f sobre W como:

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_R f^*(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Em tal caso dizemos que f é integrável sobre W. A integral não depende da escolha do paralelepípedo R.

Proposição 10.2. *Seja $f : W \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua.*

1. *Se W é do tipo I:*

$$\boxed{\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dx\,dy}$$

2. *Se W é do tipo II:*

$$\boxed{\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dx\,dz}$$

3. *Se W é do tipo III:*

$$\boxed{\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left[\int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dy\,dz}$$

Observe que em todos os casos anteriores D é uma região elementar do plano e, portanto, pode ser do tipo I, II ou III; dependendo do tipo continuamos com a integral dupla.

Volume : Em particular, se $f(x,y,z) = 1$ para todo $(x,y,z) \in W$, então:

$$\boxed{\iiint_W dx\,dy\,dz = V(W)}$$

onde $V(W)$ é o volume de W.

Exemplo 10.2.

[1] Calcule $\mathbf{I} = \displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{sen(2\,z)}{4-z}\,dy\,dz\,dx$.

Note que $\mathbf{I} = \displaystyle\iint_D \left[\int_0^x \frac{sen(2\,z)}{4-z}\,dy\right] dz\,dx$, onde

$$D = \{(x,z)\,/\,0 \le x \le 2,\ 0 \le z \le 4-x^2\}.$$

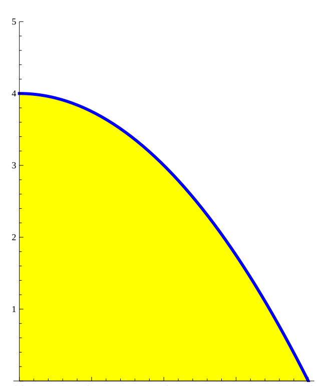


Figura 10.7:

Calculamos primeiro $\displaystyle\int_0^x \frac{sen(2\,z)}{4-z}\,dy = \frac{x\,sen(2\,z)}{4-z}$; a seguir, precisamos calcular:

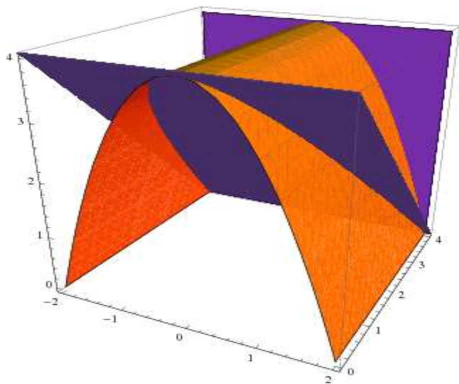
$$\iint_D \frac{x\,sen(2\,z)}{4-z}\,dz\,dx,$$

onde consideramos $D = \{(x,z)\,/\,0 \le x \le \sqrt{4-z},\,0 \le z \le 4\}$ como uma região de tipo III; logo,

$$\mathbf{I} = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-z}} \frac{x\,sen(2\,z)}{4-z}\,dx\,dz = \int_0^4 \frac{sin(2\,z)}{2}\,dz = \frac{1-cos(8)}{4}.$$

[2] Calcule o volume do sólido limitado por $z + x^2 = 9$, $z + y = 4$, $y = 0$ e $y = 4$.

O sólido é limitado superiormente por $z = 9 - x^2$ e inferiormente por $z = 4 - y$. O sólido W é do tipo I.



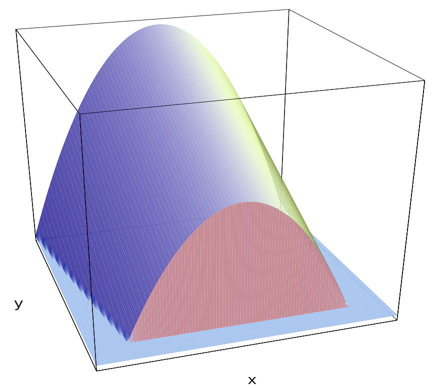


Figura 10.8: Sólido do exemplo [2].

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/(x,y) \in D,\, 4-y \le z \le 9-x^2\},$$

Determinação de D: A região D é a projeção de W no plano xy; para determinar D basta eliminarmos z das equações ou, equivalentemente achar a interseção de ambas as superfícies:

$$\begin{cases} z = & 9 - x^2 \\ z = & 4 - y; \end{cases}$$

obtemos $x^2 = y + 5$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/-\sqrt{y+5} \le x \le \sqrt{y+5},\, 0 \le y \le 4\}$.

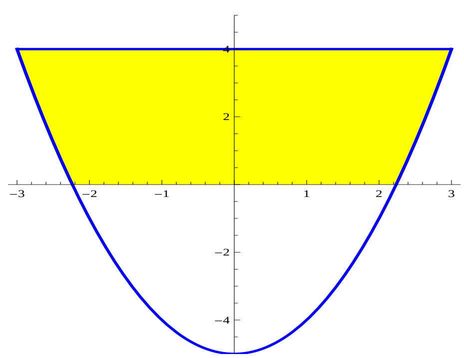


Figura 10.9: A região D.

Logo, $V(W) = \iiint_W dx\,dy\,dz = \int_0^4 \left[\int_{-\sqrt{y+5}}^{\sqrt{y+5}} \left[\int_{4-y}^{9-x^2} dz\right] dx\right] dy$; então:

$$\begin{aligned} V(W) &= \int_0^4 \left[\int_{-\sqrt{y+5}}^{\sqrt{y+5}} (5 - x^2 + y)\,dx\right] dy = \int_0^4 \left(5x - \frac{x^3}{3} + x\,y\right)\Bigg|_{-\sqrt{y+5}}^{\sqrt{y+5}} dy \\ &= \frac{4}{3}\int_0^4 (y+5)^{\frac{3}{2}} dy = \frac{8}{15}\,(y+5)^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^3 \\ &= \frac{648}{5} - \frac{40\sqrt{5}}{3}\,u.v. \end{aligned}$$

[3] Calcule $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$ onde W é limitado por $z = x^2 + y^2$, $z = 2$, no primeiro octante.

Se considerarmos W como região de tipo II, W é definida por $0 \le y \le \sqrt{z - x^2}$ e D é a projeção de W no plano xz; fazendo $y = 0$ obtemos a parábola $z = x^2$ e $z = 2$; logo, D é definida por $0 \le x \le \sqrt{z}$ e $0 \le z \le 2$.

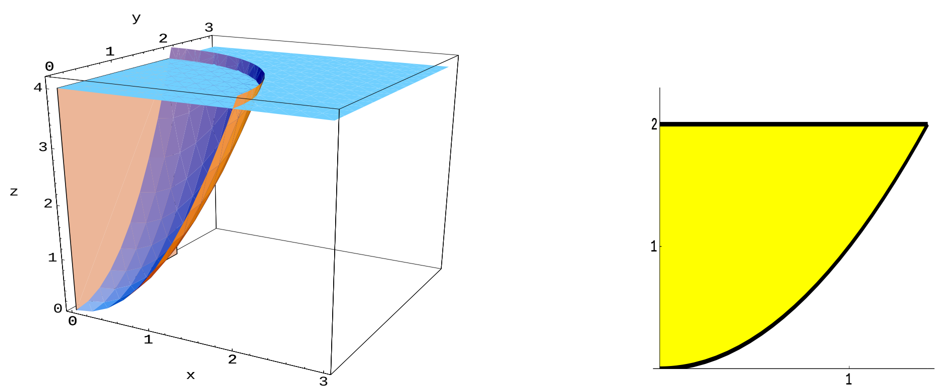


Figura 10.10: O sólido e a região do exemplo [2].

$$\begin{aligned} \iiint_W x\,dx\,dy\,dz &= \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{z}} \Big(\int_0^{\sqrt{z-x^2}} x\,dy\Big)\,dx\right] dz \\ &= \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{z}} \big(x\sqrt{z - x^2}\big)\,dx\right] dz \\ &= \frac{1}{3}\int_0^2 z^{\frac{3}{2}}\,dz \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

10.4 Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2\,y^2\,z^2\,dx\,dy\,dz$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{0}^{xy} x\,dz\,dy\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1-x} x^2\,sen(y)\,dz\,dx\,dy$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{y}\int_{0}^{\frac{1}{y}} sen(y)\,dz\,dx\,dy$

(f) $\displaystyle\int_{-2}^{1}\int_{0}^{x}\int_{0}^{y} x^2\,z^4\,dz\,dy\,dx$

2. Considere o sólido limitado por $x+y+z=3$, $x+y-z=1$ e os planos coordenados. Calcule o volume do sólido, fazendo:

(a) $\displaystyle\int\left[\int\left[\int dz\right]dy\right]dx$

(b) $\displaystyle\int\left[\int\left[\int dx\right]dy\right]dz$

(c) $\displaystyle\int\left[\int\left[\int dy\right]dx\right]dz$

(d) $\displaystyle\int\left[\int\left[\int dx\right]dz\right]dy$

3. Calcule $\displaystyle\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$ se W é o paralelepípedo limitado pelos planos $x=2$, $y=3$ e $z=1$.

4. Calcule $\displaystyle\iiint_W z^2\,dx\,dy\,dz$ se W é o sólido limitado pelo cilindro $x^2+y^2=1$ e pelos planos $z=0$ e $z=4$.

5. Calcule $\displaystyle\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$ se W é o sólido limitado pelo plano $x+y+z=1$ e pelos planos coordenados.

6. Calcule $\displaystyle\iiint_W (x^3+y^3+z^3)\,dx\,dy\,dz$ se W é o sólido limitado pela esfera: $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$.

7. Calcule $\displaystyle\iiint_W z\,\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ se W é o sólido limitado pelo cilindro $x^2+y^2=2\,x$ e os planos $y=0$, $z=0$ e $z=a$.

8. Determine o volume do sólido limitado pelos planos $4\,y+2\,x+z=8$, $x=0$, $y=0$ e $z=0$.

9. Determine o volume do sólido limitado por $z=9-x^2$, $z=5-y$, $y=0$ e $y=5$.

Capítulo 11

MUDANÇA DE COORDENADAS

11.1 Introdução

Sejam W^* uma região elementar no espaço e x, y e z as seguintes funções:

$$x,\ y,\ z : W^* \longrightarrow \mathbb{R},$$

onde $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ e $z = z(u,v,w)$ são funções contínuas e com derivadas parciais contínuas num paralelepípedo aberto R tal que $W^* \subset R$, Estas três funções determinam uma transformação do espaço uvw no espaço xyz. De fato:

$$T : W^* \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

onde $T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$.
A transformação T é também denotada por:

$$\begin{cases} x = & x(u,v,w) \\ y = & y(u,v,w) \\ z = & z(u,v,w), \quad (u,v,w) \in W^* \end{cases}$$

Denotemos a imagem de W^* por T como $W = T(W^*)$, contida no espaço xyz.

Definição 11.1.

1. *T é* **injetiva** *em W^* se*

$$T((u_1,v_1,w_1)) = T((u_2,v_2,w_2))$$

para todos (u_1,v_1,w_1), $(u_2,v_2,w_2) \in W^*$ implica em $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$ e $w_1 = w_2$.

2. *O determinante* **Jacobiano** *de T é denotado e definido por:*

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix},$$

onde as derivadas parciais são calculadas no ponto $(u,v,w) \in W^*$.

Teorema 11.1. *Sejam W e W^* regiões elementares no espaço, T uma transformação de classe C^1 e injetiva em W^*. Suponha que $T(W^*) = W$. Então para toda função integrável f sobre W temos:*

$$\boxed{\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W^*} f(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw}$$

onde $f(u,v,w) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ e $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|$ é o valor absoluto do determinante Jacobiano.

Novamente, é possível mostrar que o teorema anterior é ainda válido se T não é injetiva num subconjunto de W^* que seja de conteúdo nulo.

11.2 Coordenadas Cilíndricas

Se $P = (x,y,z)$ é um ponto no espaço xyz, suas coordenadas cilíndricas são (r,θ,z), onde (r,θ) são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy e são definidas por:

$$\begin{cases} x = & r\,cos(\theta), \\ y = & r\,sen(\theta), \\ z = & z, \end{cases}$$

ou, explicitamante $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = z$ e:

$$\theta = \begin{cases} arctg(\frac{y}{x}) & \text{se} \quad x,\ y > 0, \\ \pi + arctg(\frac{y}{x}) & \text{se} \quad x < 0, \\ 2\pi + arctg(\frac{y}{x}) & \text{se} \quad x > 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Se $x = 0$, então $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ quando $y > 0$ e $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ quando $y < 0$. Se $x = y = 0$, θ não é definido.

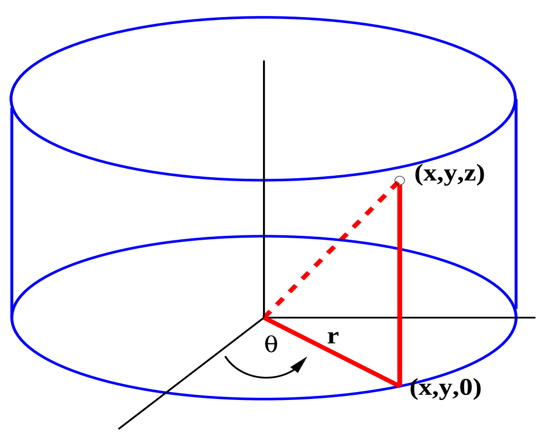


Figura 11.1: Coordenadas cilíndricas.

Esta transformação é injetiva no seguinte subconjunto:

$$\boxed{\{(r,\theta,z)/r>0,\,\theta_0<\theta<\theta_0+2\pi,\,z\in(-\infty,+\infty)\}}$$

e o jacobiano da transformação é:

$$\boxed{\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=r}$$

Exemplo 11.1.

[1] O cilindro circular reto C de raio a é dado por:

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\,x^2+y^2=a^2,\,z\in(-\infty,+\infty)\}.$$

Em coordenadas cilíndricas $x^2+y^2=r^2$; logo $r=a$, então:

$$C=\{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3/\,r=a,\,0\leq\theta\leq 2\,\pi,\,z\in(-\infty,+\infty)\}.$$

[2] O cone com base num disco D de raio 1.5 centrado na origem e altura 3.

Em coordenadas cilíndricas:

$$z=z,\quad 0\leq r\leq\frac{3}{2},\quad 0\leq\theta\leq 2\,\pi$$

logo, o cone em coordenadas cilíndricas:

$$S=\{r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3/\,0\leq r\leq\frac{3}{2},\,0\leq\theta\leq 2\,\pi,\,0<z<3\}.$$

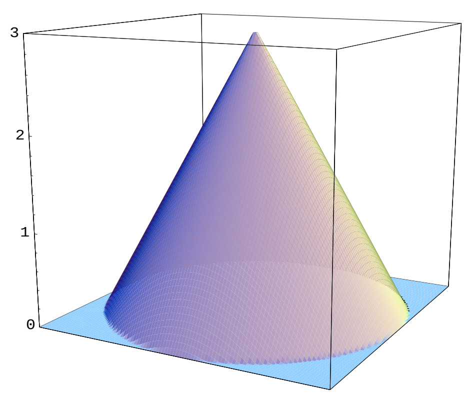


Figura 11.2: O cone do exemplo [2].

Do teorema anterior:

Corolário 11.2. *Seja* $f(r,\theta,z)=f(r\,cos(\theta),r\,sen(\theta),z)$*; então:*

$$\boxed{\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{W^*} r\,f(r,\theta,z)\,dr\,dz\,d\theta}$$

Esta igualdade ainda é válida se

$$W^* = \{(r, \theta, z)/r \geq 0,\ \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi,\ z \in (-\infty, +\infty)\}.$$

Em particular, se $f(x, y, z) = 1$ *para todo* $(x, y, z,) \in W$, *então:*

$$\boxed{V(W) = \iiint_{W^*} r\, dz\, dr\, d\theta.}$$

Exemplo 11.2.

[1] Determine o volume do sólido limitado por $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ e $z = b$; $a,\ b \neq 0$.

O sólido W é um cilindro centrado na origem, de raio a e altura z onde $0 \leq z \leq b$. Usando coordenadas cilíndricas obtemos a nova região W^* definida por:

$$W^* = \{(r, \theta, z) \,/\, 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\,\pi,\ 0 \leq z \leq b\}.$$

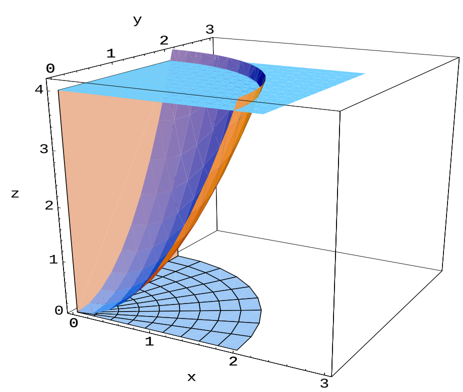
$$V(W) = \iiint_W r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^b \left[\int_0^{2\,\pi} \left[\int_0^a r\, dr\right] d\theta\right] dz = \pi\, a^2\, b\ u.v.$$

[2] Calcule $\displaystyle\iiint_W x\, dx\, dy\, dz$, onde W é limitado por $x = 0$, $y = 0$, $z = 4$ e $z = x^2 + y^2$.

O sólido W é definido por $x^2 + y^2 \leq z \leq 4$. Usando coordenadas cilíndricas obtemos a nova região W^* definida por:

$$W^* = \{(r, \theta, z) \,/\, r^2 \leq z \leq 4,\ 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\};$$

D é a projeção do parabolóide no plano xy, no primeiro quadrante:



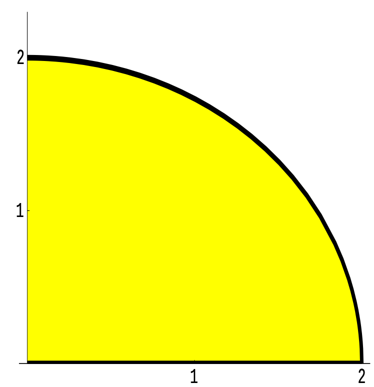


Figura 11.3: O sólido e a região do exemplo [2], respectivamente.

$$\iiint_W x\, dx\, dy\, dz = \iiint_{W^*} r^2\, cos(\theta)\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^2 \left[\int_{r^2}^4 r^2\, cos(\theta) dz\right] dr\right] d\theta$$
$$= \frac{64}{15}.$$

[3] Calcule $\iiint_W \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, onde W é o sólido limitado por $x^2+y^2=1$, $z=1-x^2-y^2$ abaixo do plano $z=4$.

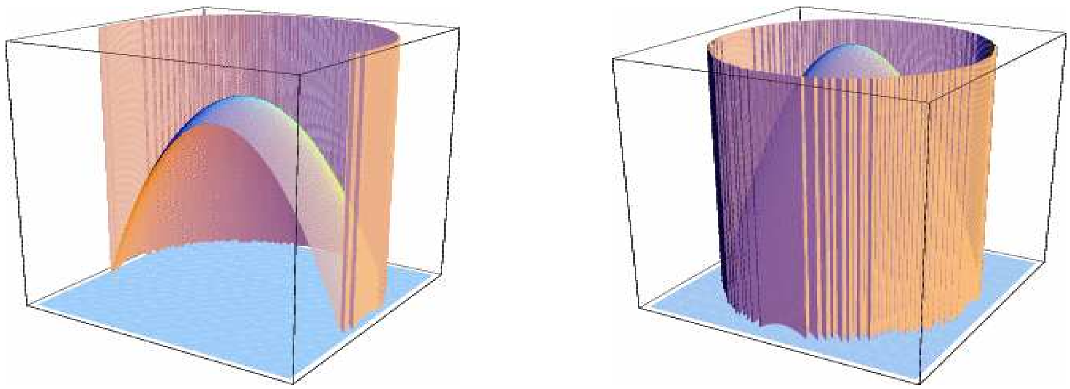


Figura 11.4: Vistas do sólido do exemplo [3].

W é determinado por $1-x^2-y^2 \le z \le 4$. A projeção no plano xy é limitada por $x^2+y^2 \le 1$.

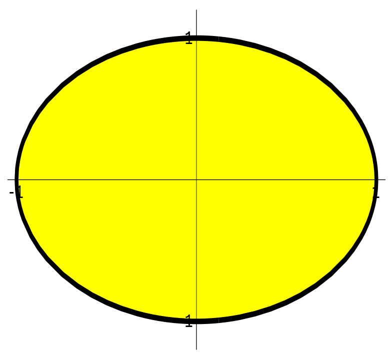


Figura 11.5: A região D.

Usando coordenadas cilíndricas obtemos a nova região W^* determinada por:

$$W^* = \{(r,\theta,z)\,/\,1-r^2 \le z \le 4,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\,\pi\};$$

logo:

$$\iiint_W \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left[\int_{1-r^2}^4 r^2\,dz\right]dr\right]d\theta = \frac{12\,\pi}{5}.$$

[4] Se W é limitado por $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$ e $z=\sqrt{x^2+y^2}$, calcule:

$$\iiint_W z\,dx\,dy\,dz.$$

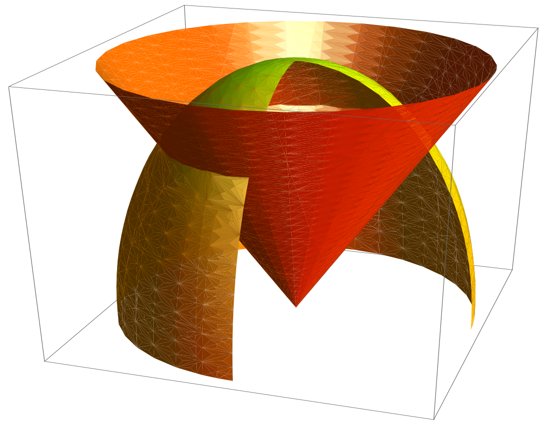


Figura 11.6: O sólido do exemplo [4].

W é determinado por $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{8-x^2-y^2}$. A projeção no plano xy é limitada por $x^2+y^2 \le 4$.
Usando coordenadas cilíndricas obtemos a nova região W^* determinada por:

$$W^* = \{(r,\theta,z)\,/\, r \le z \le \sqrt{8-r^2},\, 0 \le r \le 2,\, 0 \le \theta \le 2\,\pi\};$$

logo:

$$\iiint_W z\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_r^{\sqrt{8-r^2}} r\,z\,dz\right] d\theta\right] dr = 8\,\pi.$$

[5] Determine o volume do sólido limitado por uma esfera de raio a.

Pela simetria do sólido calculamos o volume da calota superior da esfera e multiplicamos o resultado por 2. O sólido é definido por $0 \le z \le \sqrt{a^2-x^2-y^2}$.
Usando coordenadas cilíndricas temos que o novo sólido é definido por:

$$W^* = \{(r,\theta,z)\,/\, 0 \le z \le \sqrt{a^2-r^2},\, 0 \le r \le a,\, 0 \le \theta \le 2\,\pi\};$$

logo:

$$V(W) = 2\iiint_W dx\,dy\,dz = 2\int_0^a \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r\,dz\right] d\theta\right] dr = \frac{4}{3}\pi\,a^3 u.v.$$

[6] Determine o volume do sólido limitado por:

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad \text{e} \quad z+1 = \sqrt{x^2+y^2}.$$

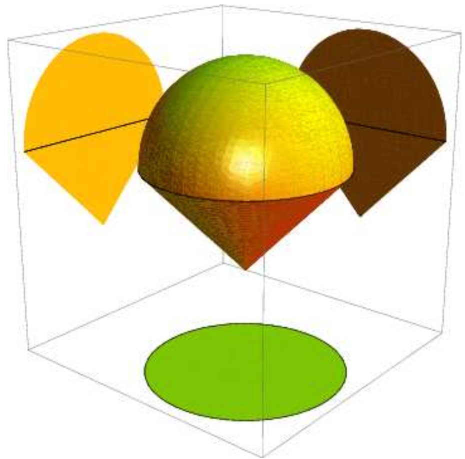


Figura 11.7: O sólido do exemplo [6].

W é definido por $\sqrt{x^2+y^2}-1 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$. Usando coordenadas cilíndricas temos que o novo sólido é definido por $r-1 \le z \le \sqrt{1-r^2}$, $0 \le r \le 1$ e $0 \le \theta \le 2\,\pi$; logo:

$$V(W) = \iiint_W dx\,dy\,dz = 2\int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_{r-1}^{\sqrt{1-r^2}} r\,dz\right] d\theta\right] dr = \pi u.v.$$

[7] Determine o volume do sólido limitado por $z = 9 - x^2 - y^2$ e $z = 1 + x^2 + y^2$.

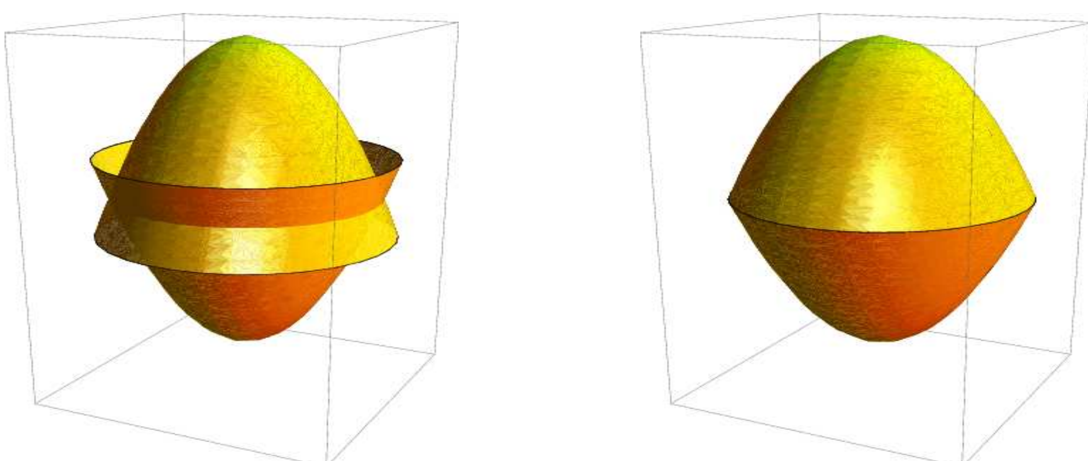


Figura 11.8: O sólido do exemplo [7].

W é definido por $1 + x^2 + y^2 \le z \le 9 - x^2 - y^2$. Usando coordenadas cilíndricas temos que o novo sólido é definido por $1 + r^2 \le z \le 9 - r^2$, $0 \le r \le 2$ e $0 \le \theta \le 2\,\pi$; logo:

$$V(W) = \iiint_W dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \left[\int_{1+r^2}^{9-r^2} r\,dz\right] dr\right] d\theta = 16\,\pi u.v.$$

11.3 Coordenadas Esféricas

Seja $P = (x, y, z)$ um ponto no espaço xyz. Suas coordenadas esféricas são (ρ, θ, ϕ) onde ρ é a distância do ponto P à origem, θ é o ângulo formado pelo eixo positivo dos x e o segmento de reta que liga $(0, 0, 0)$ a $(x, y, 0)$ e ϕ é o ângulo formado pelo eixo positivo dos z e o segmento de reta que liga P à origem:

$$\begin{cases} x = & \rho\, sen(\phi)\, cos(\theta) \\ y = & \rho\, sen(\phi)\, sen(\theta) \\ z = & \rho\, cos(\phi), \end{cases}$$

onde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$, o que define uma região no espaço $\rho\theta\phi$.

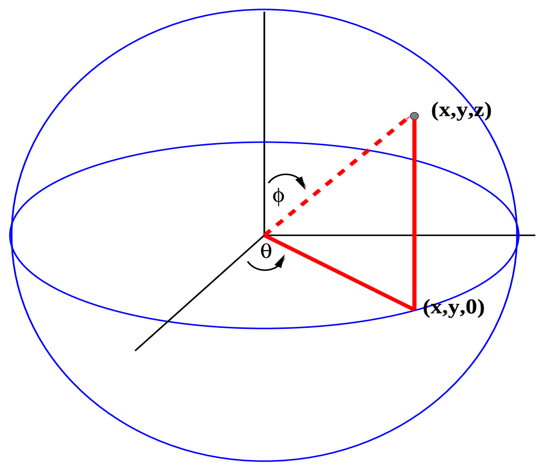


Figura 11.9: Coordenadas esféricas.

O jacobiano da transformação é:

$$\boxed{\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = -\rho^2\, sen(\phi)}$$

Exemplo 11.3.

[1] Em coordenadas esféricas uma esfera de raio a, centrada na origem é:

$$S = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 / \rho = a,\ 0 \leq \phi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

[2] Os cones circulares com eixos coincidentes com o eixo dos z são caracterizados por:

$$S = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \rho \in [0, +\infty),\ \phi = c_0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

onde $c_0 \in \mathbb{R}$.

Casos particulares:

Se $c_0 = 0$ e $\phi = 0$, S representa o semi-eixo positivo dos z.

Se $c_0 = \pi$ e $\phi = \pi$, S representa o semi-eixo negativo dos z.

Se $c_0 = \dfrac{\pi}{2}$ e $\phi = \dfrac{\pi}{2}$, S representa o plano xy.

Se $0 < c_0 < \dfrac{\pi}{2}$ e $\phi = c_0$, o cone "abre"para cima.

Se $\dfrac{\pi}{2} < c_0 < \pi$ e $\phi = c_0$, o cone "abre"para baixo.

[3] O sólido limitado por $x^2+y^2+z^2 \geq 1$ e $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ em coordenadas esféricas é dado por:

$$W = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \rho \in [1, 2],\ 0 \leq \phi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq 2\,\pi\}.$$

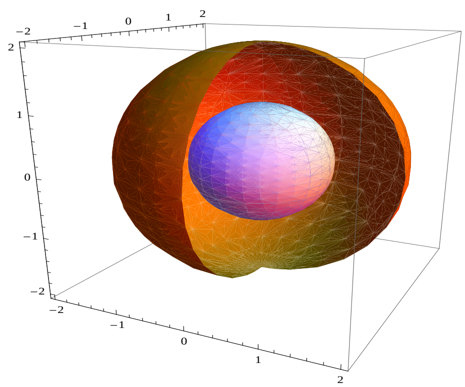


Figura 11.10: Sólido do exemplo [3].

Do teorema anterior:

Corolário 11.3. *Seja* $f(\rho, \theta, \phi) = f(\rho cos(\theta) sen(\phi), \rho sen(\theta) sen(\phi), \rho cos(\phi))$*, então:*

$$\boxed{\iiint_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{W^*} \rho^2 sen(\phi)\, f(\rho, \theta, \phi)\, d\rho\, d\theta\, d\phi}$$

Esta igualdade ainda é válida se

$$W^* = \{(\rho, \theta, \phi) \,/\, \rho \in [0, +\infty),\ 0 \leq \theta \leq 2\,\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

Em particular, se $f(x, y, z) = 1$ *para todo* $(x, y, z,) \in W$*, então:*

$$\boxed{V(W) = \iiint_{W^*} \rho^2 sen(\phi)\, d\rho\, d\theta\, d\phi}$$

Exemplo 11.4.

[1] Calcule o volume do sólido limitado por uma esfera de raio a centrada na origem.

$$\begin{aligned}
\iiint_W dx\, dy\, dz &= \int_0^a \left[\int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} \rho^2 sen(\phi)\, d\theta\right] d\phi\right] d\rho \\
&= 2\pi \int_0^a \left[\int_0^\pi \rho^2 sen(\phi)\, d\phi\right] d\rho \\
&= \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^\pi sen(\phi)\, d\pi \\
&= \frac{4}{3}\pi a^3 u.v.
\end{aligned}$$

[2] Se W é o sólido limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, calcule:

$$\iiint_W e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\,dx\,dy\,dz.$$

Usando coordenadas esféricas temos $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le \phi \le \pi$, que define uma região no espaço $\rho\theta\phi$.
Por outro lado $e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = e^{\rho^3}$

$$\begin{aligned}\iiint_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \left[\int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} \rho^2\, e^{\rho^3}\, sen(\phi)\,d\theta\right] d\phi\right] d\rho\\ &= 2\pi \int_0^1 \left[\int_0^\pi \left(\rho^2 e^{\rho^3} sen(\phi)\right) d\phi\right] d\rho\\ &= 4\pi \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3}\,d\rho\\ &= \frac{4}{3}\pi(e-1).\end{aligned}$$

[3] Se W é o sólido limitado inferiormente por $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e superiormente por $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, calcule

$$\iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz.$$

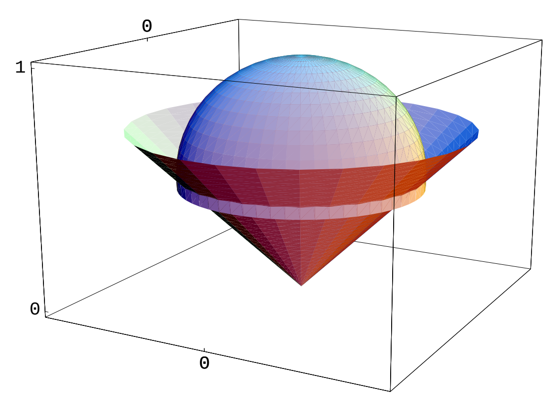


Figura 11.11: Sólido do exemplo [3].

A esfera $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, em coordenadas esféricas, tem como equação:

$$\rho = cos(\phi)$$

e o cone:

$$\phi = \frac{\pi}{4};$$

logo, $0 \leq \rho \leq cos(\phi)$, $0 \leq \phi \leq \dfrac{\pi}{4}$ e $0 \leq \theta \leq 2\,\pi$:

$$\begin{aligned}\iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^{cos(\phi)}\left[\int_0^{2\pi}\rho^3\,sen(\phi)\,d\theta\right]d\rho\right]d\phi\\ &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^{cos(\phi)}\rho^3\,sen(\phi)\,d\rho\right]d\phi\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}cos^4(\phi)\,sen(\phi)\,d\phi\\ &= \frac{\pi}{10}(1-\frac{\sqrt{2}}{8}).\end{aligned}$$

[4] Calcule $\displaystyle\iiint_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz$ onde W é o sólido limitado pela esfera centrada na origem de raio 4 e os cones $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ e $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$.

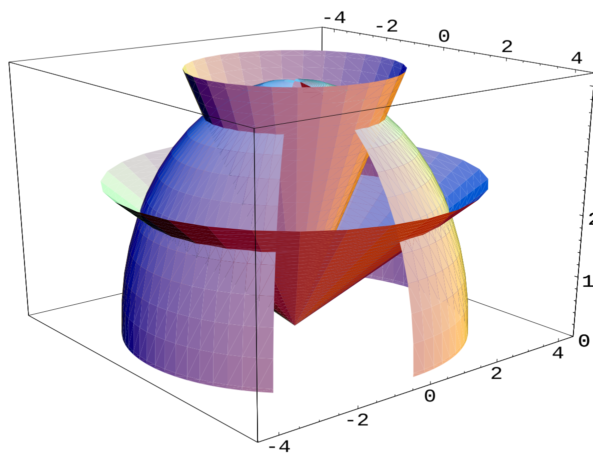


Figura 11.12: Sólido do exemplo [4].

Usando coordenadas esféricas a equação da esfera $x^2+y^2+z^2=16$ é $\rho=4$ e as dos cones $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ e $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ são, $\phi=\dfrac{\pi}{6}$ e $\phi=\dfrac{\pi}{3}$, respectivamente; logo, a região no espaço $\rho\theta\phi$ é definida por: $0\leq\rho\leq 4$, $0\leq\theta\leq 2\pi$ e $\dfrac{\pi}{6}\leq\phi\leq\dfrac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}\iiint_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{2\pi}\left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\int_0^4\rho^2\,e^{\rho^3}\,sen(\phi)\,d\rho\right]d\phi\right]d\theta\\ &= \frac{\pi}{3}\,(\sqrt{3}-1)(e^{64}-1).\end{aligned}$$

11.4 Exercícios

1. Faça a mudança de variável necessária para calcular as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4} x\,dz\,dy\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} x dz\,dy\,dx.$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx.$

2. Calcule: $\displaystyle\iint_W x\,dx\,dy\,dz$, onde W é o sólido limitado pelos planos $x=0$, $y=0$, $z=2$ e pelo parabolóide $z=x^2+y^2$.

3. Calcule: $\displaystyle\iint_W x\,dx\,dy\,dz$, onde W é o sólido limitado pelo parabolóide $x = 4\,z^2+4\,y^2$ e pelo plano $x=4$.

4. Calcule: $\displaystyle\iint_W 6\,x\,y\,dx\,dy\,dz$, onde W está acima da região plana limitada pelas curvas $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$ e abaixo do plano $z=1+x+y$.

5. Calcule: $\displaystyle\iint_W x\,y\,dx\,dy\,dz$, onde W é o tetraedro de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ e $(0,0,3)$.

6. Determine o volume:

   (a) do sólido limitado pelo cilindro $x=y^2$ e pelos planos $z=0$ e $x+z=1$.

   (b) do sólido limitado pelo cilindro $y=cos(x)$ e pelos planos $z=y$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ e $z=0$.

7. O **valor médio** de uma função $w=f(x,y,z)$ sobre a região W é definido por:

$$V_M = \frac{1}{vol(W)}\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Determine o valor médio da função $f(x,y,z)=x\,y\,z$ sobre o cubo com lados de comprimento L que está no primeiro octante com um vértice na origem e arestas paralelas aos eixos coordenados.

Calcule, usando coordenadas cilíndricas

8. $\displaystyle\iiint_W \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, onde W é a região contida dentro do cilindro $x^2+y^2=16$ e entre os planos $z=-5$ e $z=4$.

9. $\displaystyle\iiint_W \left(x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz$, onde W é o cone $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$.

10. $\displaystyle\iiint_W \left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy\,dz$, onde:

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}.$$

Calcule, usando coordenadas esféricas

11. $\displaystyle\iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, onde W é o sólido limitado por abaixo pelo cone $\rho=\frac{\pi}{6}$ e acima pela esfera $\rho=2$.

12. $\displaystyle\iiint_W \left(x^2+y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz$, onde $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$.

13. $\displaystyle\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$, onde W é o sólido limitado pelas esferas: $x^2+y^2+z^2=a^2$ e $x^2+y^2+z^2=b^2$, $(a<b)$.

14. $\displaystyle\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{z^2}$, onde W é o sólido limitado pelas superfícies $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ e $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

15. $\displaystyle\iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, onde $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x^2+y^2+z^2\le 2\,z\,,\ 1\le z\}$.

16. Calcule o volume do sólido limitado:

    (a) Por $z=4-x^2-y^2$ e pelo plano xy.

    (b) Por $z=x^2+y^2$ e $x^2+y^2+z^2=2$.

    (c) Por $z=x^2+9\,y^2$ e $z=18-x^2-9\,y^2$.

    (d) Por $z=2\,x^2+2\,y^2$ e $z=48-x^2-y^2$.

17. Calcule $\displaystyle\iiint_W \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2}\right] dx\, dy\, dz$, onde $a,\ b,\ c > 0$ e o sólido definido por:

    $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{c^2} \leq 1\}$.

18. Calcule $\displaystyle\iiint_W x\, y\, z\, dx\, dy\, dz$, onde W é formado pelo primeiro octante do elipsóide do exercício anterior, $(x,\ y,\ z \geq 0)$.

19. Utilizando coordenadas cilíndricas, calcule:

    (a) $\displaystyle\iiint_W (x^2 + y + z^2)^3\, dx\, dy\, dz$, onde W é o sólido limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$ e $y = 1$.

    (b) $\displaystyle\iiint_W (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$, onde W é o sólido limitado por $2\, z = x^2 + y^2$ e $z = 2$.

    (c) $\displaystyle\iiint_W dx\, dy\, dz$, onde W é o sólido limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 2\, R\, z$, $x^2 + y^2 = z^2$ e que contem o ponto $(0, 0, R)$.

20. Utilizando coordenadas esféricas, calcule:

    (a) $\displaystyle\iiint_W (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$, onde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$.

    (b) $\displaystyle\iiint_W \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, dx\, dy\, dz$, onde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

    (c) $\displaystyle\iiint_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$, onde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 \leq x\}$.

    (d) $\displaystyle\iiint_W a\, dx\, dy\, dz$, onde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0\}$.

21. Calcule o volume do sólido limitado:

    (a) pelo cilindro $x^2 + 4\, y^2 = 4$ e pelos planos $z = 0$ $z = x + 2$

    (b) pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = x$

    (c) pelos parabolóides $z = 9\, x^2 + y^2$ e $z = 18 - 9\, x^2 - y^2$

    (d) pelas superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = x^2 + y^2$

    (e) pela superfície $z = 4 - 4\, x^2 - y^2$ e o plano xy

(f) pelos cilindros $x^2 + z^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$.

(g) pelos planos $z = 0$, $y = 0$, $z = x$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$

22. Se W é um sólido não homogêneo com densidade em cada ponto dada por $w = f(x, y, z)$, a massa de W é definida por:

$$M_W = \iiint_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

As coordenadas do centro de massa do sólido W são definidas por:

$$\overline{x} = \frac{\iiint_W x\, f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{M_W}, \quad \overline{y} = \frac{\iiint_W y\, f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{M_W}$$

e

$$\overline{z} = \frac{\iiint_W z\, f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{M_W}$$

(a) Calcule a massa de $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2 \leq 9,\ 0 \leq z \leq 9-x^2-y^2\}$ se a densidade é $f(x, y, z) = z$

(b) Calcule o centro de massa do sólido limitado por $z^2 = x\,y$, $x = 5$, $y = 5$ e $z = 0$ se a densidade é $f(x, y, z) = 1$

(c) Calcule o centro de massa do sólido limitado pela esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$ e situado acima do plano $z = 0$, sabendo que a densidade em cada ponto é proporcional á distância do ponto ao centro da esfera.

(d) Se a densidade num ponto de uma estrla esférica gaseosa é dada por $f = C\, e^{-(\rho/R)^3}$, onde $C > 0$, R é o raio da estrela e ρ é a distância do ponto ao centro da estrela. Calcule a massa da estrela

23. Se W é um sólido não homogêneo com densidade em cada ponto dada por $w = f(x, y, z)$, então os momentos de inércia em torno dos eixos coordenados são definido por:

$$I_x = \iiint_W (y^2+z^2)\, f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \quad I_y = \iiint_W (x^2+z^2)\, f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

e

$$I_z = \iiint_W (x^2 + y^2)\, f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Determine o momento de inércia de cada sólido em relação ao eixo indicado supondo que a densidade é K constante.

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 \leq a^2,\ 0 \leq z \leq h\}$ em relação ao eixo dos x

(b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2,\ 0 \leq z \leq h\}$ em relação ao eixo dos z