$4^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II

1. Mostre que as funções dadas são diferenciáveis.

   a) $f(x,y) = xy$

   b) $f(x,y) = x+y$

   c) $f(x,y) = x^2y^2$

   d) $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$

   e) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$

   f) $f(x,y) = x^2+y^2$

2. f é diferenciável em (0,0)? Justifique.

   a) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

   b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

   c) $f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

3. Seja $z = f(x,y)$ diferenciável em (x_0,y_0). Seja S a função afim dada por $S(x,y) = a(x-x_0)+b(y-y_0)+c$. Suponha que
$$f(x,y) = S(x,y) + E(x,y)$$
   com
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0.$$
   Conclua que $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ e $c = f(x_0,y_0)$.

4. Verifique que as funções dadas são diferenciáveis.

   a) $f(x,y) = e^{x-y^2}$

   b) $f(x,y) = x^2y$

   c) $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$

   d) $f(x,y) = x^4+y^3$

   e) $f(x,y) = x\cos(x^2+y^2)$

   f) $f(x,y) = \operatorname{arctg} xy$

5. Determine o conjunto dos pontos em que a função dada é diferenciável. Justifique.

   a) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

   b) $f(x,y) = \dfrac{x^y}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

   c) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

   d) $f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}$, se $x^2+y^2 > 1$ e $f(x,y) = 0$, se $x^2+y^2 \leq 1$.

6. Calcule a diferencial.

   a) $z = x^3y^2$

   b) $z = x$ arctg $(x + 2y)$

   c) $z =$ sen xy

   d) $u = e^{s^2-t^2}$

   e) $t = \ln(1 + p^2 + v^2)$

   f) $x =$ arcsen uv

7. Seja $z = \sqrt{x} + y^{\frac{1}{3}}$.

   a) Calcule a diferencial de z no ponto $(1, 8)$.

   b) Calcule um valor aproximado para z, correspondente a $x = 1,01$ e $y = 7,9$.

   c) Calcule um valor aproximado para a variação $\triangle z$ em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 8$ para $x = 0,9$ e $y = 8,01$.

8. Calcule um valor aproximado para a variação $\triangle A$ na área de um retângulo quando os lados variam de $x = 2m$ e $y = 3m$ para $x = 2,01m$ e $y = 2,97m$.

9. Uma caixa de forma cilíndrica é feita com um material de espessura $0,03m$. As medidas internas são: altura 2 m e4 raio da base 1 m. A caixa é sem tampa. Calcule um valor aproximado para o volume do material utilizado na caixa.

10. A altura de um cone é $h = 20$ cm e o raio da vase $r = 12$ cm. Calcule um valor aproximado para a variação $\triangle V$ no volume quando h aumenda 2 mm e r decresce 1 mm.

11. Calcule $\nabla f(x, y)$ sendo $f(x, y) =$

    a) $z = x^2y$

    b) $e^{x^2-y^2}$

    c) $\dfrac{x}{y}$

    d) arctg $\dfrac{x}{y}$

12. Calcule $f'(x, y)$ sendo $f(x, y) =$

    a) xy

    b) 2^{x-y}

    c) $x$tg $\dfrac{x}{y}$

    d) $\operatorname{arcsen} xy$

13. Sejam $f(x, y) = y - x^2$ e $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$.

    a) Verifique que a imagem de γ está contida na curva de nível $y - x^2 = 0$.

    b) Desenhe a imagem de γ.

    c) Verifique que para todo t, $\gamma'(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = 0$.

14. Considere a função $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), y(t))$ uma curva diferenciável qualquer, com imagem contida na superfície de nível $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$, e tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

    a) Prove que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \gamma'(t) = 0$.

    b) Determine a equação do plano tangente à superfície de nível dada, no ponto (x_0, y_0, z_0).

    c) Determine a equação do plano tangente à superfície de nível $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14$, no ponto $(1, 1, 1)$.

15. Seja $f(x,y) = x^2 - y^2$. Represente geometricamente $\nabla f(x_0,y_0)$, sendo $(x_0,y_0) =$
    a) $(1,1)$
    b) $(-1,1)$
    c) $(-1,-1)$
    d) $(1,-1)$

16. Sejam $z = x^2y,\ x = e^{t^2}$ e $y = 2t+1$. Calcule $\dfrac{dz}{dt}$.

17. Seja $F(t) = f(e^{t^2}, sent)$, onde $f(x,y)$ é uma função dada, diferenciável em $\mathbb{R}^2$.
    a) Calcule $F'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.
    b) Calcule $F'(0)$ supondo $\dfrac{df}{dy}(1,0) = 5$.

18. Seja $z = f(x^2, 3x+1)$, onde $f(u,v)$ é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.
    a) Expresse $\dfrac{dz}{dx}$ em termos das derivadas parciais de f.
    b) Verifique que $\dfrac{dz}{dx}|_{x=1} = 2\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,4) + 3\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,4)$.

19. Seja $g(t) = f(3t, 2t^2-1)$.
    a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.
    b) Calcule $g'(0)$ admitindo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,-1) = \dfrac{1}{3}$.

20. Suponha que, para todo t, $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

21. Admita que, para todo (x,y), $4y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2$. Calcule $g'(t)$, sendo $g(t) = f(2cost, sent)$.

22. Admite que, para todo (x,y), $4y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Prove que f é constante sobre a elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

23. Seja $z = f(u+2v, u^2-v)$. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de f.

24. Prove que a função $u = f(x+at, y+bt)$, a e b constantes, é solução da equação as derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

25. Seja g dada por $g(t) = f(x,y)sen3t$, onde $x = 2t$ e $y = 3t$. Verifique que $g'(t) = 3f(x,y)cos3t + sen3t[2\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)]$, onde $x = 2t$ e $y = 3t$.

26. É dada a curva γ que passa pelo ponto $\gamma(t_o) = (1,3)$ e cuja imagem está contida na curva de nível $x^2 + y^2 = 10$. Suponha $\gamma'(t_o) \neq \overrightarrow{0}$.
    a) Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $(1,3)$.
    b) Determine uma curva $\gamma(t)$ satisfazendo as condições acima.

27. Determine a equação da reta tangente à curva γ no ponto $\gamma(t_o) = (2,5)$ sabendo-se que $\gamma'(t_o) \neq \overrightarrow{0}$ e que sua imagem está contida na curva de nível $xy = 10$. Qual a equação da reta normal a γ, neste ponto?

28. Determine a equação da reta tangente à curva de nível dada, no ponto dado:

a) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$ em $(1, 2)$.

b) $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$ em $(\frac{1}{2}, 1)$.

29. Determine uma reta que seja tangente à elipse $2x^2 + y^2 = 3$ e paralela à reta $2x + y = 5$.

30. Determine uma reta que seja tangente à elipse $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralela à reta $4x + 5y = 17$.

31. Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável definida implicitamente pela equação $y^3+xy+x^3 = 3x$. Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$.

32. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada, no ponto dado.

a) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1, -1, 1)$

b) $2xyz = 3$ em $(\frac{1}{2}, 1, 3)$

c) $ze^{x-y} + z^3 = 2$ em $(2, 2, 1)$

33. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}$, sendo dados:

a) $f(x, y) = x^2 - 3y^2, (x_o, y_o) = (1, 2)$ e $\overrightarrow{u}$ o versor de $2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

b) $f(x, y) = e^{x^2-y^2}, (x_o, y_o) = (1, 1)$ e $\overrightarrow{u}$ o versor de $(3, 4)$.

c) $f(x, y) = arctg(\frac{x}{y}), (x_o, y_o) = (3, 3)$ e $\overrightarrow{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

d) $f(x, y) = xy, (x_o, y_o) = (1, 1)$ e $\overrightarrow{u}$ o versor de $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

34. Em que direção e sentido a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? E em que direção e sentido decresce mais rapidamente?

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ em $(1, 1)$

b) $f(x, y) = ln\|(x, y)\|$ em $(1, -1)$

c) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$ em $(1, \frac{1}{2})$

35. Seja $f(x, y) = xarctg(\frac{x}{y})$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(1, 1)$, onde $\overrightarrow{u}$ aponta na direção e sentido de máximo crescimento de f, no ponto $(1, 1)$.

36. Admita que $T(x, y) = 16 - 2x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1, 2)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

37. Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. (Admita que x e y sejam dados em km e a temperatura em ^oC.) Um indíviduo encontra-se na posição $(3, 2)$ e pretende dar um passeio:

a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se for seu desejo desfrutar sempre na mesma temperatura no ponto $(3, 2)$.

b)Qual a direção e sentido que deverá tomar se for seu desejo caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?

c) De quanto tempo a temperatura se elevará aproximadamente, caso caminhe $0,01km$ na direção encontrada no item b).

d) De quanto decrescerá, aproximadamente, a temperatura, caso caminhe $0,01km$ na direção $\overrightarrow{j}$?

38. Calcule todas as derivadas parciais de 2^a ordem.

a) $f(x,y) = x^3y^2$

b) $z = e^{x^2-y^2}$

c) $z = ln(1+x^2+y^2)$

d) $g(x,y) = 4x^3y^4 + y^3$

39. Expresse $g'(t)$ em termos de derivadas parciais de f, sendo g dada por:

a) $g(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), x = t^2$ e $y = sent$.

b) $g(t) = t^3\dfrac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t)$.

c) $g(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, 2t) + 5\dfrac{\partial f}{\partial y}(sen3t, t)$.

40. Expresse $g''(t)$ em termos de derivadas parciais de f, sendo $g(t) = f(5t, 4t)$.

41. Considere a função $g(t) = f(a+ht, b+kt)$, com a, b, h e k constantes. Supondo $f(x,y)$ de classe C^2 num aberto de $\mathbb{R}^2$. Verifique que $g''(t) = h^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + k^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.

42. Considere a função $z = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, sen3x)$. Verifique que $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, sen3x) + 3cos3x\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x, sen3x)$.

43. Seja $g(u,v) = f(2u+v, u-2v)$, onde $f(x,y)$ é suposta de classe C^2. Verifique que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 5\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 5\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

44. Suponha que $z = z(x,y)$ satisfaça a equação $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - x\dfrac{\partial z}{\partial x} = x^3y^2$. Fazendo a mudança de variáveis $x = e^u$ e $y = e^v$, calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} - 2\dfrac{\partial z}{\partial u}$.