$3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II

1. Encontre alguma função $f(x,y)$, que tenha a reta $y = 3x - 4$ como uma curva de nível.

2. Encontre alguma função $f(x,y)$, que tenha a $y = \dfrac{3}{x^2}$ como uma curva de nível.

3. Se $T(x,y)$ for a temperatura num ponto (x,y) sobre uma placa delgada de metal no plano xy, então as curvas de nível de T são chamadas de curvas isotérmicas, pois todos os pontos sobre cada uma dessas curvas possuem a mesma temperatura, suponha que uma placa ocupa o primeiro quadrante y $T(x,y) = xy$.

   a) Esboce as curvas isotérmicas sobre as quais $T = 1$,$T = 2$ e $T = 3$.

   b) Uma formiga, inicialmente no ponto $(1,4)$, anda sobre a placa de modo que a temperatura ao longo de sua trajetória permanece constante. Qual é essa trajetória, e qual é a temperatura correspondente?.

4. Se $V(x,y)$ for a voltagem ou potencial sobre um ponto (x,y) no plano xy, então as curvas de nível de V são chamadas de curvas equipotenciais , pois todos os pontos sobre cada uma dessas curvas possuem a mesma voltagem, dado que $V(x,y) = \frac{8}{\sqrt{16+x^2+y^2}}$, esboce as curvas equipotenciais nas quais $V = 1$ e $V = 0,5$.

5. Dê exemplo de uma função $f(x,y)$ tal que para qualquer reta $l_m : y = mx$ o limit ao longo de l_m seja igual a zero e que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não exista. Com limite ao longo da reta l_m referimos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0))} f(x,y) \quad \text{onde} \quad (x,y) \in l_m.$$

6. Determine o conjunto dos pontos de continuidade. Justifique a resposta.

   a) $f(x,y) = 3x^2y^2 - 5xy + 6$

   b) $f(x,y) = \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2}$

   c) $f(x,y) = \ln \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

   d) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{1-x^2-y^2}$

   e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-3y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   f)$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   g) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{r^2-1}\right)}, & r < 1 \\ f(x,y) = 1, & r \geq 1 \end{cases}$, onde $r = \|(x,y)\|$.

7. A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique.

8. A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique.

9. Prove que se f for contínua em (x_0,y_0) e se $f(x_0,y_0) > 0$, então existirá $r > 0$ tal que $f(x,y) > 0$ para $\|(x,y) - (x_0,y_0)\| < r$.

10. Seja A um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ que goza da propriedade: quaisquer que sejam (x_0, y_0) e (x_1, y_1) em A, existe uma curva contínua $\gamma : [a, b] \to A$ tal que $\gamma(a) = (x_0, y_0)$ e $\gamma(b) = (x_1, y_1)$. Prove que se f for contínua em A e se $f(x_0, y_0) < m < f(x_1, y_1)$, então existirá $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$ tal que $f(\overline{x}, \overline{y}) = m$.

    Sugestão: aplique o Teorema do Valor Intermediário à função contínua $g(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [a, b]$.

11. Determine as derivadas parciais da função dada em todos os pontos do seu domínio:

    a) $f(x, y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$

    b) $f(x, y) = \cos xy$

    c) $f(x, y) = \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

    d) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$

    e) $f(x, y) = x^2 \ln(1 + x^2 + y^2)$

    f) $f(x, y) = xye^{xy}$

    g) $f(x, y) = (4xy - 3y^3)^3 + 5x^2y$

    h) $f(x, y) = arctg\frac{x}{y}$

    i) $f(x, y) = x^y$

    j) $f(x, y) = (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

    l) $f(x, y) = \dfrac{x \sin y}{\cos(x^2 + y^2)}$

    m) $f(x, y) = (4xy - 3y^3)^3 + x^2 arctg\frac{x}{y}$

12. Seja $f(x, y) = y(x^4 + y^4)^{\frac{-3}{4}} cos\frac{x}{y}$. Calcule $\dfrac{\partial f(0, 1)}{\partial y}$. (observe que, neste caso, a maneira menos trabalhosa de se calcular a derivada parcial é calculando-a pela definiçção.)

13. Seja $\phi : R \to R$ uma função de uma variável real, diferenciável e tal que $\phi'(1) = 4$. Seja $g(x, y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Calcule:

    a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$

    b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 1)$

14. Seja $g(x, y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ a função do exercício anterior. Verifique que

$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$$

    para todo $(x, y) \in R^2$, com $y \neq 0$.

15. Considere a função dada por $z = x \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Verifique que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

16. A função $p = p(V, T)$ é dada implicitamente pela equação $pV = nRT$ onde n e R são constantes não nulas. Calcule $\dfrac{\partial p}{\partial V}$ e $\dfrac{\partial p}{\partial T}$.

17. Seja $z = e^y\phi(x - y)$, onde ϕ é uma função de uma variável real. Mostre que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

18. Seja $\phi : R \rightarrow R$ uma função diferenciável de uma variável real e seja $f(x,y) = (x^2+y^2)\phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Mostre que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$$

19. Calcule as derivadas parciais de $2^{\underline{a}}$ ordem:

a) $f(x,y) = x^3y^2$

b) $z = e^{x^2-y^2}$

c) $z = ln(1+x^2+y^2)$

d) $g(x,y) = 4x^3y^4 + y^3$

20. Seja $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Verifique que:

a) $x\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{4}{(x^2+y^2)^2}$.

21. Uma funçao $f(x,y)$ e dita HARMÔNICA se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ em todo o domínio de f. Verifique que as fuções abaixo são harmônicas:

a) $f(x,y) = ln(1+x^2+y^2)$.

b) $f(x,y) = ln(\sqrt{x^2+y^2})$

c) $f(x,y) = e^{-x}cos(y) + e^{-y}cos(x)$

d) $f(x,y) = arctg(\dfrac{y}{x})$

22. Verifique que $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, onde $z = (x+y)e^{\frac{x}{y}}$.

23. Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aberto, duas funções de classe C^2 e tais que $(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Verifique que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

Prove que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

24. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 no aberto A. Justifique as igualdades:

a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$

25. Seja $f(x,y,z) =: \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$

26. Seja $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

27. Seja $z = xye^{\frac{x}{y}}$. Verifique que

$$x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + y\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 0$$