Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
SME306 - Métodos Numéricos e Computacionais 2
Prof. Murilo **1º sem/2012**

4ª Lista de Exercícios: Integração Numérica

1. Obtenha a fórmula de integração de Newton-Cotes do tipo fechado, para integrar $f(x)$ com $n = 4$, ou seja sobre 5 pontos. Usando a fórmula obtida, aproxime

$$\int_2^3 xe^{\frac{x}{2}}dx,$$

sabendo que

x	2	2.25	2.5	2.75	3.0
$e^{\frac{x}{2}}$	2.77	3.08	3.49	3.96	4.48

2. Calcule as integrais a seguir pela regra do trapézio e pelas regras 1/3 e 3/8 de Simpson usando 6 divisões do intervalo de integração. Compare os resultados.

$$I) \int_1^{2.5} x \ln x dx, \quad II) \int_{-1.5}^{0} xe^x dx$$

3. Nas integrais do exercício anterior com quantas divisões do intervalo, podemos esperar obter erros menores que 10^{-5}?

4. Considere a função $f(x)$ dada pela tabela:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	5	1	5	35

a) Calcule uma aproximação para

$$I(f) = \int_{-2}^{2} f(x)dx,$$

usando a fórmula 1/3 de Simpson.

b) Se os valores tabelados são de um polinômio de grau 3 o que pode ser afirmado sobre o erro cometido na aproximação de $I(f)$ pela fórmula 1/3 de Simpson?

5. De um velocímetro de um automóvel foram obtidos as seguintes leituras de velocidade instantânea:

$t(min.)$	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$v(km/h)$	23	25	30	35	40	45	47	52	60

Calcule a distância em quilômetros, percorrida pelo automóvel usando a regra de Simpson.

6. Aproxime pela regra de Simpson o comprimento de arco da curva:

$$y = 4x^2 - 3x$$

de $(0,0)$ a $(1,1)$.

Obs: Lembre que o comprimento de arco de uma curva $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ é dada por:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

7. Escolha uma fórmula de quadratura sobre pontos igualmente espaçados de h e avalie

$$\int_{-1}^{0} xe^x dx$$

com duas casas decimais corretas (basta que $I_Q^N(f) - I_Q^{(N-1)}(f) < 10^{-2}$, onde N denota o número de pontos utilizados).

8. Considere a integral:

$$I(f) = \int_0^{0.8} (x^2 - \cos(x))dx.$$

   a) Quantos intervalos seriam necessários para aproximar $I(f)$ usando a regra do trapézio, com erro inferior a 10^{-2}.

   b) Calcule $I(f)$ com o h obtido no item **a)**).

9. Pretende-se obter uma fórmula de integração

$$I_Q(f) = A_0 f(0) + A_1[f(x_1) + f(-x_1)]$$

de maneira que seja pelo menos de grau 2 para a integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.

   a) Exprima A_0 e A_1 em função de x_1.

   b) Mostre que a fórmula I_Q é de pelo menos grau 3 e termine x_1 de modo que I_Q seja de grau 5.

   c) Determine x_1 de maneira que tenhamos $A_0 = A_1$.

10. Determine A_0, A_1, A_2 de modo que a fórmula de integração

$$\int_0^h \sqrt{x} f(x)dx \approx A_0 f(h/4) + A_1 f(h/2) + A_2 f(3h/4)$$

tenha grau de precisão $r \geq 2$. Determine o grau de precisão da fórmula obtida.

11. Considere a tabela:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	-2	-1.5	-0.5	1.5	4.5	9.0	17.0

Sabendo que a fórmula de quadratura:

$$\int_a^b f(x)dx = Af(w); \quad a \leq w \leq b,$$

é exata para polinômios de grau ≤ 1, caclule A e w e use-os para aproximar

$$\int_0^3 f(x)dx.$$

12. Determine uma fórmula de quadratura para aproximar

$$\int_0^1 xf(x)dx$$

que seja exata quando $f(x)$ é um polinômio de grau ≤ 3. Usando a fórmula obtida calcule

$$\int_0^1 (x^4 + x\sin(x))dx$$

13. Calcule, exatamente, utilizando fórmula de quadratura de Gauss adequado, a integral:

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2+2x} + \frac{1}{2-2x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

14. Considere a integral

$$I(f) = \int_0^{1.6} x^{-x}dx$$

Obtenha o valor aproximado de $I(f)$, com 2 dígitos significativos corretos:

a) Usando fórmula de Simpson.

b) Usando fórmula de quadratura de Gauss.

Lembre-se que $lim_{x\to 0}x^x = 1$.

15. Considere o problema:

$$I(f) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx.$$

a) Verifique que a aplicação da regra do trapézio primeiramente na direção Oy e depois na direção Ox, fornece:

$$I \approx \frac{(b-a)}{2}\frac{(d-c)}{2}[f(a,c)+f(b,c)+f(a,d)+f(b,d)].$$

b) Verifique que discretizando [a,b] e [c,d] respectivamente pelos pontos:

$$x_i = a + ih; \quad 0 \le i \le m; \quad h = \frac{b-a}{m}$$

$$y_j = a + jk; \quad 0 \le j \le n; \quad k = \frac{d-c}{n}$$

e então aplicando a regra do trapézio composta nas direções Oy e Ox, obtemos:

$$I \approx \frac{hk}{4}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij} f(x_i, y_j)$$

onde

$$a_{00} = a_{m0} = a_{0n} = a_{nn} = 1$$

$$a_{i0} = a_{in} = 2; \quad 1 \le i \le m-1$$

$$a_{0j} = a_{mj} = 2; \quad 1 \le j \le n-1$$

$$a_{ij} = 4, ; \quad 1 \le i \le m-1; \quad 1 \le j \le n-1.$$

c) Usando a fórmula obtida em 10.2), com h = 0.5 e k = 0.25, avalie:

$$\int_0^1 \int_0^{0.5} \sqrt{x^2+y^3}\, dydx.$$

QUESTÕES EXTRAIDAS DE PROVAS

1. [**1.0**] Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-2.0	-1.5	-1.0	0.5	1.0	2.5	3.0
$f(x_i)$	-5.0	-2.6875	-1.5	-0.9375	-0.5	6.8125	12.5

Sabendo que $f(x)$ é um polinômio de grau ≤ 3, utilize uma fórmula de Newton-Cotes e determine o valor exato de $\displaystyle\int_{-2.0}^{3.0} f(x)dx$. Justifique a sua resposta.

2. [**1.5**] Considere a integral

$$I(f) = \int_0^1 \sin(x)dx$$

Obtenha o valor aproximado de $I(f)$ utilizando a fórmula de Simpson 1/3 com 3 pontos e a fórmula do trapézio composta com 6 pontos. Qual desses valores fornece uma melhor aproximação para $I(f)$? Justifique sua resposta.

3. Pretende-se aproximar a integral $I(f) = \int_0^2 f(x)dx$ pela formula de quadratura

$$I_Q(f) = A_0 f(0) + A_1 f(2)$$

(a) [**1.5**] Determine A_0 e A_1 de modo que $I_Q(f)$ seja exata quando $f(x)$ for um polinômio de grau ≤ 1 e calcule uma aproximação para $\int_0^2 \frac{e^x}{x^2+1}dx$.

(b) [**1.0**] Supondo $f \in C^2[0,\ 2]$, obtenha uma expressão para o erro $I(f) - I_Q(f)$.

4. [**1.5**] Obtenha uma aproximação para a integral $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ utilizando a fórmula de Gauss-Laguerre com $N = 3$ pontos. O resultado é exato? Justifique a sua resposta.