Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP
Departamento Matemática Aplicada e Estatística
SME306 - Métodos Numéricos e Computacionais II
Prof. Murilo F. Tomé **1^o sem/2012**

EXERCICIOS RESOLVIDOS - INTEGRACAO E EDO

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-2.0	-1.5	-1.0	1.0	1.5	4.0
$f(x_i)$	1.6428	0.463392	-0.2285	-3.3714	-1.5000	11.4142

Sabendo que $f(x)$ é um polinômio de grau ≤ 4 do tipo $f(x) = x^4 + p_3(x)$, onde $p_3(x)$ denota um polinômio de grau ≤ 3, utilize uma fórmula de Newton-Cotes e determine o valor exato de $\displaystyle\int_{-2.0}^{4.0} f(x)dx$. Justifique a sua resposta.

SOLUÇÃO: Como $f(x)$ é polinômio de grau 4, a fórmula de Simpson 1/3, juntamente com o erro associado, fornece

$$I(f) = I_S(f) - \frac{h^5}{90}4! \qquad (f^(4)(\xi) = 4!)$$

e tomando $x_0 = -2, x_1 = 1, x_4 = 4, h = 3$, temos

$$I(f) = \frac{3}{3}\Big[1.6428 + 4(-3.3714) + 11.4142\Big] - \frac{3^5}{90}24 = -65.228600000$$

Esse resultado é exato por construção, ou seja, incluiu-se o erro cometido.

2. Considere a integral

$$I(f) = \int_0^2 \ln(x^2+1)x\,dx$$

Obtenha o valor aproximado de $I(f)$ utilizando a fórmula de Simpson 1/3 composta com 4 subintervalos e a fórmula do trapézio composta com 8 subintervalos. Qual desses valores fornece uma melhor aproximação para $I(f)$? Justifique sua resposta.

SOLUÇÃO:

A solução exata é dada por

$$I(f) = \int_0^2 \ln(x^2+1)xdx = \frac{1}{2}\int_0^2 \ln(x^2+1)\,2xdx = \frac{1}{2}\Big[5\ln(5)-4\Big] = \frac{1}{2}\Big[8.047189-4\Big] = 2.0235947.$$

Agora, calculando $I(f)$ por Simpson 1/3 com 4 subintervalos, temos: $h = (2-0)/4 = 0.5$

$$h = (2-0)/4 = 0.5, x_i = i*h, i = 0,1,2,3,4$$

$$I_S^4(f) = \frac{h}{3}\Big\{f(x_0) + f(x_4) + 4[f(x_1) + f(x_3) + 2f(x_2)\Big\} = 2.0205645$$

e a fórmula do Trapézio com 8 subintervalos fornece:

$$h = (2-0)/8 = 0.25, x_i = i*h, i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$$

$$I_T^8(f) = \frac{h}{2}\Big\{f(x_0) + f(x_8) + 2f(x_i), i = 1,2,\cdots,7\Big\} = 2.0403468$$

Calculando os erros, vem: $|E_S^4(f)| = |I(f) - E_S^4(f)| = 0.0030302$ e $|E_T 8(f)| = |I(f) - E_T^8(f)| = 0.0167521$ de onde vemos que o valor obtido por $I_S^4(f)$ é mais preciso.

3. Pretende-se aproximar a integral $I(f) = \int_0^1 f(x)\,\sqrt{x}\,dx$ pela formula de quadratura

$$I_Q(f) = A_0\,f(0.25) + A_1\,f(0.75)$$

(a) Determine A_0 e A_1 de modo que $I_Q(f)$ seja exata quando $f(x)$ for um polinômio de grau ≤ 1. Qual o grau de precisão da fórmula obtida?

SOLUÇÃO: Para que $I_Q(f)$ tenha grau de precisão $r \geq 1$ é suficiente que:

$$\begin{aligned} I_Q(1) = I(1) \Longrightarrow &\quad A_0 + A_1 = \int_0^1 \sqrt{x}dx = 2/3 \\ I_Q(x) = I(x) \Longrightarrow &\quad A_0 * (1/4) + A_1 * (3/4) = \int_0^1 x\sqrt{x}dx = 2/5. \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema linear, obtemos $A_0 = 3/15$ e $A_1 = 7/15$.

Grau de precisão: $I_Q(x^2) = 0.2749$ e $I(x^2) = 0.2857$. Logo, $I_Q(x^2) \neq I(x^2) \Rightarrow$ grau de precisão de $I_Q(f)$ é $r = 1$.

(b) Com a fórmula obtida, calcule uma aproximação para $\int_0^2 x^2\,e^{2x}\,dx$.

SOLUÇÃO: $\int_0^2 x^2\,e^{2x}\,dx = \int_0^2 x^{3/2}\,e^{2x}\sqrt{x}\,dx$. Logo,

$f(x) = x^{3/2}\,e^{2x}$ e $I_Q(f) = 3/15 f(0.25) + 7/15 f(0.75) = 1.39965$

4. Obtenha uma aproximação para a integral $I(f) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}(1 + x + x^2)dx$ utilizando a fórmula de Gauss-Laguerre com $N = 2$ pontos. O resultado é exato? Justifique a sua resposta.

SOLUÇÃO: Temos que:

$$I(f) = \int_0^\infty e^{-2x}(1 + x + x^2)dx = \int_0^\infty e^{-x}\Big\{e^{-x}(1 + x + x^2)\Big\}dx,$$

logo, $f(x) = e^{-x}(1 + x + x^2)$. Da tabela Gauss-Laguerre, $N = n + 1 = 2$, obtemos:

$$\begin{aligned} x_0 = 0.585786, &\qquad A_0 = 0.853553, \\ x_1 = 3.41421, &\qquad A_1 = 0.146447, \end{aligned}$$

$$f(x) = (1 + x + x^2)e^{-x}, \qquad I(f) \approx A_0\,f(x_0) + A_1\,f(x_1) = 0.9939611$$

O resultado não é exato porque $f(x)$ não é polinômio de grau $\leq 2n + 1 = 3$.

5. Considere o PVI de 3a. ordem

$$y''' = xy^2 - 5y', \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1 \quad y''(1) = 1$$

a) Obtenha o sistema de EDO de 1a. ordem associado a esse PVI.

SOLUÇÃO: Transformação do PVI em um sistema com 3 equações como segue:

$$\begin{array}{lll} y_1 = y \Longrightarrow & y_1' = y_2, \Longrightarrow & y_1(1) = 1 \\ y_2 = y' \Longrightarrow & y_2' = y_3, \Longrightarrow & y_2(1) = 1 \\ y_3 = y'' \Longrightarrow & y_3' = f(x, y, y', y'') = x\, y_1^2 - 5\, y_2, \Longrightarrow & y_3(1) = 1 \end{array}$$

Logo, temos o sistema de eqs. 2×2:

$$(I) \left\{ \begin{array}{ll} y_1' = y_2, & y_1(1) = 1 \\ y_2' = y_3, & y_2(1) = 1 \\ y_3' = x\, y_1^2 - 5\, y_2, & y_3(1) = 1 \end{array} \right.$$

Definindo os vetores:

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}(x)) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ x\, y_1 - 5\, y_2 \end{bmatrix}$$

o sistema (I) pode ser escrito na forma

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Y}'(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}(x)) \\ \mathbf{Y}(1) = \mathbf{Y_0} \end{array} \right.$$

b) Use $h = 0.1$ e calcule $y(1.2)$ pelo método de Euler modificado.

Temos: $x_0 = 1.0, x_1 = 1.1, x_2 = 1.2$. Pelo método Euler modificado tem-se:

$$\overline{\mathbf{Y}_{j+1}} = \mathbf{Y}_j + h\,\mathbf{F}(x_j, \mathbf{Y}_j)$$

$$\mathbf{Y}_{j+1} = \mathbf{Y}_j + \frac{h}{2}\left[\mathbf{F}(x_j, \mathbf{Y}_j) + \mathbf{F}(x_{j+1}, \overline{\mathbf{Y}_{j+1}})\right]$$

CÁLCULO DE $Y_1 - h = 0.1$

$j = 0 -$ Cálculo de $\mathbf{Y}_1 : x_0 = 1.0, \mathbf{Y}_0 = [1\ 1\ 1]^T, x_1 = 0.1$

$$\mathbf{F}(x_0, \mathbf{Y}_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2(1)^2 - 5(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ -4.0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{Y}_1} = \mathbf{Y}_0 + h\,\mathbf{F}(x_0, \mathbf{Y}_0) = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ -4.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.1 \\ 0.60 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(x_1, \overline{\mathbf{Y}_1}) = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.1 \\ -4.1690 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} + 0.05 \left\{ \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ -4.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.60 \\ -4.1690 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1.1050000 \\ 1.0800000 \\ 0.5915500 \end{bmatrix}$$

CÁLCULO DE Y_2

$j = 1 -$ Cálculo de $\mathbf{Y}_2 : x_1 = 0.1, \mathbf{Y}_1 = [1.105000\ 1.080000\ 0.591550]^T, x_2 = 0.2$

$$\mathbf{F}(x_1, \mathbf{Y}_1) = \begin{bmatrix} 1.080000 \\ 0.591550 \\ -4.05687250 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{Y}_2} = \mathbf{Y}_1 + 0.1\,\mathbf{F}(x_1, \mathbf{Y}_1) = \begin{bmatrix} 1.213000 \\ 1.139155 \\ 0.1858627 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(x_2, \overline{\mathbf{Y}_2}) = \begin{bmatrix} 1.1391550 \\ 0.185862749 \\ -3.930132200 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 1.105000 \\ 1.080000 \\ 0.591550 \end{bmatrix} + 0.05 \left\{ \begin{bmatrix} 1.080000 \\ 0.591550 \\ -4.056872 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1391550 \\ 0.18586275 \\ -3.9301322 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1.21595775 \\ 1.11887064 \\ 0.19219977 \end{bmatrix}$$