Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
SME305 - Métodos Numéricos e Computacionais I
Prof. Murilo F. Tomé **1º sem/2012**

2º Trabalho Prático

Monitor: Pedro Guimarães - pedro.sahib90@gmail.com
horário monitoria: terças das 18h as 20h e quartas das 18h as 19h.
Data: 29/06/2012 - DIA DA PROVA SUBSTITUTIVA

Instruções:

- Forma de entrega: O relatório e os programas implementados deverão ser compactados (zip, rar, etc) e enviados para: **VER INSTRUÇÕES DADAS EM SALA DE AULA**
- Data Máxima de Entrega: **29/06/2012 até as 23:59:59hs**
- Avaliação: O trabalho será avaliado em 10.0 ptos, sendo 5.0 ptos para os códigos funcionando e 5.0 ptos para o relatório.
  Cada código deverá conter o seguinte cabeçalho:
  - Métodos Numéricos e Computacionais I - SME0305 - CIVIL
  - Nome do Aluno:
  - No. USP:
  - Data:

  O relatório deve conter:
  - Capa, informando Nome e o No. USP
  - Os dados do arquivo.m
  - Resultados do programa
  - Comentários sobre diculdades e outros que julgarem necessários.

Seja a matriz A, de dimensão n, definida por (I).

$$(I)\quad \begin{cases} a_{1,2} = 5.5 \\ a_{2,1} = 5.5 \\ a_{1,1} = 7.5 \\ a_{i,i} = 9.5,\ \ i = 2, 3, \cdots, n, \\ a_{i,i+1} = 2,\ \ i = 2, 3, \cdots, n-1, \\ a_{i+1,i} = 2,\ \ i = 2, 3, \cdots, n-1, \\ a_{i,i+2} = -1,\ \ i = 1, 2, \cdots, n-2, \\ a_{i+2,i} = -1,\ \ i = 1, 2, \cdots, n-2, \\ a_{i,i+3} = -1,\ \ i = 1, 2, \cdots, n-3, \\ a_{i+3,i} = -1,\ \ i = 1, 2, \cdots, n-3, \\ a_{i,j} = 0 \quad \text{no restante.} \end{cases}$$

Por exemplo, para $n = 7$ a matriz A toma a forma:

$$A = \begin{bmatrix} 7.5 & 5.5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5.5 & 9.5 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 9.5 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 9.5 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 9.5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 9.5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 9.5 \end{bmatrix}$$

Pode-se mostrar que essa matriz é simétrica e definida positiva. Considere o seguinte método iterativo:

$$z_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$x_i^{(k+1)} = \omega z_i^{(k+1)} + (1-\omega)\, x_i^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots; \ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

onde $\omega \in [0, 2]$. Este método é conhecido como o método SOR (Sucessive Over Relaxation) e, quando $\omega = 1$, esse método coincide com o método de Gauss-Seidel.

a) Escreva uma função que, tendo como dados de entrada uma matriz A, um vetor b, um inteiro n, duas constantes reais w e ϵ, e uma constante inteira $itmax$, utiliza o método SOR para obter aproximações $\mathbf{x}^{(k+1)}$ da solução de um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, até que $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k+1)}\|_\infty \leq \epsilon$. Essa função pode por exemplo ter a seguinte estrutura:

```
        FUNCTION SOR(A,B,N,W,EPS,ITMAX,X,R,ITER)
%
%           Parâmetros de Entrada:
%
%           A: matriz real dada
%           B: vector real dado
%           N: ordem da matriz (inteiro)
%           W: constante real dada
%           EPS: tolerância desejada
%           ITMAX: Número máximo de iterações permitidas – se ITER
%           ultrapassar ITMAX (use ITMAX=500), considera-se que o método divergiu.
%
%           Parâmetros de Saída:
%
%           X: Solução aproximada obtida pelo método SOR
%           R: Vetor residuo  →  R = B − A X
%           ITER: Número de iterações utilizadas
%
%
%           Comandos para calcular x^(k+1)
%           pelo método SOR
%
        END
```

b) Utilizando a função da alínea **a)**, escreva um programa MATLAB (script) que chama essa função e resolve o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ onde A é a matriz definida pelas equações (I) e $\mathbf{b}$ é o vetor definido por $b_j = 1.0/j,\ j = 1, 2, \ldots, n$. Para testar o programa, faça $\epsilon = 10^{-8}$, $\omega = 1.0$, (método Gauss-Seidel), $b_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij},\ j = 1, \ldots, n$ e execute o programa. A solução obtida deve ser $x_j = 1, j = 1, 2, \ldots, n$. Imprima a norma euclidiana do vetor residuo $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$ (essa norma deve ser da ordem de $\epsilon = 10^{-8}$).

Considere o caso $n = 50$, $b_j = 1.0$ e $\epsilon = 10^{-8}$. Partindo sempre da aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, utilize os seguintes valores $\omega_i = 0.2 * i,\ i = 1, \ldots, 10$, para o parâmetro ω e resolva o sistema linear definido pela matriz definida pelas equações (I). Imprima para cada ω_i o valor das iterações necessárias para obter a convergência requerida.

Para algumas matrizes especiais pode-se determinar o valor teórico de um ω_{opt} (ω ótimo) de forma a obter uma convergência mais rapida. No caso geral, de uma matriz A qualquer, esse parâmetro é definido como aquele que fornece o menor número de iterações para obter a convergência desejada.

Para o exemplo acima, verifique numericamente qual o valor ω_{opt} para o qual a convergência é mais rápida.

SUGESTÃO: Faça uma tabela com os valores de ω_i e $ITER$ obtidos, para concluir qual foi o ω_{opt}, por exemplo:

ω_i	0.2	0.4	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	2.0
$ITER$	$xxxxx$	$xxxxx$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$