Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
SME302 - Métodos Numéricos Eng. II
Prof: Murilo **2º sem/2012**

3ª Lista de Exercícios: Integração Numérica

1. Obtenha a fórmula de integração de Newton-Cotes do tipo fechado, para integrar $f(x)$ com $n = 3$ (essa fórmula é conhecida como **Simpson 3/8**), ou seja sobre 4 pontos: $x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, x_3 = x_0 + 3h = b, h = (b - a)/3$. Usando a fórmula obtida, calcule
$$I(f) = \int_2^3 xe^{\frac{x}{2}}dx.$$

2. Calcule as integrais a seguir pela fórmula do trapézio e pelas fórmula de Simpson 1/3 usando 6 divisões do intervalo de integração.
$$I)\int_1^{2.5} x\ln x dx, \quad II)\int_{-1.5}^{0} xe^x dx$$

3. Nas integrais do exercício anterior com quantas divisões do intervalo (N), podemos esperar obter erros menores que 10^{-5}?

4. Considere a função $f(x)$ dada pela tabela:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	5	1	5	35

   a) Calcule uma aproximação para
$$I(f) = \int_{-2}^{2} f(x)dx,$$
   usando a fórmula de Simpson 1/3.

   b) Se os valores tabelados são de um polinômio de grau 3 o que pode ser afirmado sobre o erro cometido na aproximação de $I(f)$ pela fórmula 1/3 de Simpson?

5. De um velocímetro de um automóvel foram obtidos as seguintes leituras de velocidade instantânea:

$t(min.)$	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$v(km/h)$	23	25	30	35	40	45	47	52	60

Calcule a distância em quilômetros, percorrida pelo automóvel usando a regra de Simpson.

6. Aproxime pela regra de Simpson o comprimento de arco da curva:

$$y = 4x^2 - 3x$$

de $(0,0)$ a $(1,1)$.

Obs: Lembre que o comprimento de arco de uma curva $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ é dada por:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

7. Escolha uma regra de quadratura sobre pontos igualmente espaçados de h e avalie

$$\int_{-1}^{0} xe^x dx$$

com duas casas decimais corretas.

8. Considere a integral:

$$I(f) = \int_0^{0.8} (x^2 - \cos(x))dx.$$

a) Quantos intervalos seriam necessários para aproximar $I(f)$ usando a regra do trapézio, com erro inferior a 10^{-2}.

b) Calcule $I(f)$ com o h obtido no item **a)**).

9. Pretende-se obter uma fórmula de integração

$$I_Q(f) = A_0 f(0) + A_1[f(x_1) + f(-x_1)]$$

de maneira que seja pelo menos de grau 2 para a integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.

a) Exprima A_0 e A_1 em função de x_1.

b) Mostre que a fórmula I_Q é de pelo menos grau 3 e termine x_1 de modo que I_Q seja de grau 5.

c) Determine x_1 de maneira que tenhamos $A_0 = A_1$.

10. Determine A_0, A_1, A_2 de modo que a fórmula de integração

$$\int_0^h \sqrt{x} f(x)dx \approx A_0 f(h/4) + A_1 f(h/2) + A_2 f(3h/4)$$

tenha grau de precisão $r \geq 2$. Determine o grau de precisão da fórmula obtida.

11. Considere a tabela:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	-2	-1.5	-0.5	1.5	4.5	9.0	17.0

Sabendo que a fórmula de quadratura:

$$\int_a^b f(x)dx = Af(w); \quad a \leq w \leq b,$$

é exata para polinômios de grau ≤ 1, caclule A e w e use-os para aproximar

$$\int_0^3 f(x)dx.$$

12. Determine uma fórmula de quadratura de Gauss para aproximar

$$\int_0^1 xf(x)dx$$

que seja exata quando $f(x)$ é um polinômio de grau ≤ 3. Usando a fórmula obtida calcule

$$\int_0^1 (x^4 + x\sin(x))dx$$

13. Calcule, exatamente, utilizando fórmula de quadratura de Gauss adequado, a integral:

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2+2x} + \frac{1}{2-2x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

14. Calcule exatamente

$$I(f) = \int_0^\infty \left(\frac{x^3+4x+2}{e^{2x}}\right) e^x dx.$$

utilizando uma fórmula de quadratura de Gauss.

15. Considere a integral

$$I(f) = \int_0^{1.6} x^{-x} dx$$

Obtenha o valor aproximado de $I(f)$, com 2 dígitos significativos corretos:

a) Usando fórmula de Simpson 1/3.

b) Usando fórmula de quadratura de Gauss.

Lembre-se que $lim_{x \to 0} x^x = 1$.

16. Considere o problema:

$$I(f) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx.$$

a) Verifique que a aplicação da fórmula do trapézio primeiramente na direção Oy e depois na direção Ox, fornece:

$$I \approx \frac{(b-a)}{2}\frac{(d-c)}{2}[f(a,c)+f(b,c)+f(a,d)+f(b,d)].$$

b) Verifique que discretizando [a,b] e [c,d] respectivamente pelos pontos:

$$x_i = a + ih; \quad 0 \leq i \leq m; \quad h = \frac{b-a}{m}$$

$$y_j = a + jk; \quad 0 \leq j \leq n; \quad k = \frac{d-c}{n}$$

e então aplicando a fórmula do trapézio composta nas direções Oy e Ox, obtemos:

$$I \approx \frac{hk}{4}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij} f(x_i, y_j)$$

onde

$$a_{00} = a_{m0} = a_{0n} = a_{nn} = 1$$

$$a_{i0} = a_{in} = 2; \quad 1 \leq i \leq m-1$$

$$a_{0j} = a_{mj} = 2; \quad 1 \leq j \leq n-1$$

$$a_{ij} = 4,; \quad 1 \leq i \leq m-1; \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

c) Usando a fórmula obtida em 10.2), com h = 0.5 e k = 0.25, avalie:

$$\int_0^1 \int_0^{0.5} \sqrt{x^2+y^3}dydx.$$