Quinta Lista de Exercícios de SMA380 - Análise

Sequências numéricas

Professora: Maria do Carmo Carbinatto 11.03.2020

Exercício 1. *Sejam* $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ *e* $(z_n)_n$ *sequências e suponha que exista um* $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ com } n \geq \tilde{n}.$$

Suponha ainda que $x_n \to a$ *e* $z_n \to a$ *quando* $n \to \infty$.

(a) *Dado* $\varepsilon > 0$, *mostre que existe um* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ *para todo* $n \geq n_1$.

(b) *Dado* $\varepsilon > 0$, *mostre que existe um* $n_2 \in \mathbb{N}$ *tal que* $-\varepsilon < z_n - a < \varepsilon$ *para todo* $n \geq n_2$.

(c) *Mostre que* $y_n \to a$ *quando* $n \to \infty$.

Exercício 2. *Sejam* $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ *sequências em* $\mathbb{R}$ *e suponha que exista um* $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$x_n \leq y_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ com } n \geq \tilde{n}.$$

(a) *Se* $x_n \to +\infty$, *mostre que* $y_n \to +\infty$.

(b) *Se* $y_n \to -\infty$, *mostre que* $x_n \to -\infty$.

Exercício 3. *Suponha que* $x_n \to 0$ *quando* $n \to \infty$ *e que* $(y_n)_n$ *seja uma sequência limitada. Mostre que* $x_n y_n \to 0$ *quando* $n \to \infty$.

Exercício 4. *Sejam* $a \neq 0$ *e* $(x_n)_n$ *uma sequência de números reais. Mostre que se* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{a} = 1$, *então* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Exercício 5. *Sejam* $b \neq 0$, $(x_n)_n$ *e* $(y_n)_n$ *sequências de números reais. Mostre que se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = b$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{a}{b}$.

Exercício 6. *Dê um exemplo de duas sequências divergentes cuja soma seja convergente. Se a soma de duas sequências convergir e uma delas também converge, mostre que a outra sequência é convergente.*

Exercício 7. *Analise se a sequência* $(x_n)_n$ *abaixo é convergente ou divergente. Quando convergir, encontre seu limite.*

(a) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ (b) $x_n = \sqrt{n}$ (c) $x_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$ (d) $x_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$

(e) $x_n = ((-1)^n + 1)\frac{n+1}{n}$ (f) $x_n = \frac{n^2}{n+1}$ (g) $x_n = \frac{(n+1)^2}{n^2}$ (h) $x_n = n^{(-1)^n}$.

Exercício 8. *Seja* $(x_n)_n$ *uma sequência definida indutivamente por* $x_1 = \sqrt{3}$,

$$x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n}, \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

(a) *Mostre que* $1 < x_n \leq 3$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e que* (x_n) *é crescente.*

(b) *Conclua que* $(x_n)_n$ *converge para* 3.

Exercício 9. *Dado* $a > 0$, *defina indutivamente a sequência* $(x_n)_n$ *por*

$$x_1 = \sqrt{a} \text{ e } x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}, \text{ para } n \geq 1.$$

(a) *Mostre que* $(x_n)_n$ *é crescente.*

(b) *Seja* r *a raiz positiva da equação* $x^2 = a + x$. *Mostre que* $x_n \leq r$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(c) *Mostre que* $(x_n)_n$ *é convergente e calcule o seu limite.*

Exercício 10. *Seja* $(x_n)_n$ *uma sequência em* $\mathbb{R}$ *e seja* $x \in \mathbb{R}$. *Mostre que* $x_n \to x$ *quando* $n \to \infty$ *se, somente se, para todo* $\varepsilon > 0$, *o conjunto* $\{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - x| \geq \varepsilon\}$ *é finito.*

Exercício 11. *Seja* $(x_n)_n$ *uma sequência tal que* $x_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Suponha que* $x_n \to x$ *quando* $n \to \infty$. *Mostre que* $x \geq 0$ *e que* $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x}$ *quando* $n \to \infty$.

Exercício 12. (a) *Seja* $p \in \mathbb{N}$. *Mostre que* $\sqrt{n+p} - \sqrt{n} \to 0$ *quando* $n \to \infty$.
(b) *Sejam* $t_0, t_1, \ldots, t_p \in \mathbb{R}$ *tais que* $t_0 + t_1 + \cdots + t_p = 0$. *Mostre que a sequência* $(x_n)_n$ *dada por* $x_n = t_0\sqrt{n} + t_1\sqrt{n+1} + \cdots + t_p\sqrt{n+p}$ *converge para zero.*

Exercício 13. *Sejam* $0 < a < b$ *e* $(x_n)_n$ *uma sequência dada por* $x_1 = a$ *e* $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{ab^2 + x_n^2}{a+1}}$. *Mostre que* $x_n \to b$ *quando* $n \to \infty$.

Exercício 14. (a) *Mostre que* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + r^n} = 1$, *onde* $0 \leq r \leq 1$.
(b) *Se* $a \geq 0$ *e* $b \geq 0$, *mostre que* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

Exercício 15. *Dê um exemplo de uma sequência* $(x_n)_n$ *divergente tal que a sequência* $(\sqrt[n]{x_n})_n$ *converge para* 1.

Exercício 16. *Suponha que* $x_n \to 0$ *quando* $n \to \infty$. *Mostre que a sequência* $(y_n)_n$ *dada por* $y_n = \min\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$ *converge para zero.*

Exercício 17. *Se* $x_n \to x$ *quando* $n \to \infty$, *mostre que a sequência* $(y_n)_n$ *dada por*

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

converge para x. *Dê um exemplo para mostrar que* $(x_n)_n$ *pode divergir e a sequência* $(y_n)_n$ *correspondente pode convergir.*

Exercício 18. *Seja* $x_n \to x$ *quando* $n \to \infty$, *com* $x > 0$ *e* $x_n > 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Mostre que a sequência* $(y_n)_n$ *dada por* $y_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$ *converge para* x.

Exercício 19. *Seja* $(x_n)_n$ *tal que* $x_n > 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se* $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \to L$, *mostre que* $\sqrt[n]{x_n} \to L$.

Exercício 20. *Seja* $\mathbb{K}$ *um corpo ordenado. Dado* $x \in \mathbb{K}$, *definimos*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Seja $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ *como no Exercício 6 a Lista 1. Uma sequência* $(x_n)_n$ *em* $\mathbb{K}$ *é definida como no caso real. Dizemos que a sequência* $(x_n)_n$ *em* $\mathbb{K}$ *converge para* $x \in \mathbb{K}$ *se*

para todo $\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, *existe um* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_n - x| < \varepsilon$ *para todo* $n \geq n_0$.

Suponha que toda sequência monótona não-decrescente e limitada superiormente em $\mathbb{K}$ *converge para algum elemento de* $\mathbb{K}$.

(a) *Dado* $a \in \mathbb{K}$, *mostre que o conjunto dos elementos de* $\mathbb{K}$ *da forma* $n \cdot a$, $n \in \mathbb{N}$, *é ilimitado em* $\mathbb{K}$.

(b) *Mostre que para todo* $h \in \mathbb{K}$ *com* $h > 0$, *existe um* $n \in \mathbb{N}$ *com* $1/n < h$.