Quarta Lista de Exercícios de SMA380-Análise 09.03.2020

Números reais

Professora: Maria do Carmo Carbinatto

Exercício 1. *Se* $r \neq 0$ *é racional e* x *é irracional, mostre que* $r + x$ *e* rx *são irracionais.*

Exercício 2. *Mostre que não existe número racional cujo quadrado é* 12.

Exercício 3. *Mostre que para todos* a, $b \in \mathbb{R}$ *e* $\epsilon > 0$, $|a - b| < \epsilon$ *implica que* $|a| < |b| + \epsilon$.

Exercício 4. (a) *Mostre que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e para todo* $x \in \mathbb{R}$ *com* $x \geq 0$, *temos que*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx + [n(n-1)/2]x^2.$$

(b) *O resultado de* (a) *pode ser estendido para um corpo ordenado* K? *Justifique sua resposta. Em caso afirmativo, enuncie e demonstre o resultado.*

Exercício 5. *Sejam* a_i, $b_i \in \mathbb{R}$, *para* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Mostre que*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_j \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^{1/2}.$$

Exercício 6. *Se* $a < x < b$, *mostre que* $|x| < |a| + |b|$.

Exercício 7. *Mostre que* $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ *quaisquer que sejam os números reais* a *e* b.

Exercício 8. *Sejam* x, y *números reais positivos. Prove que* $\sqrt{xy} \leq (x + y)/2$.

Exercício 9. *Mostre que* $\inf\{x + y + z \mid x, y, z \in \mathbb{R}$ *com* $0 < x < y < z\} = 0$.

Exercício 10. *Mostre que a união de dois intervalos fechados, limitados e que têm pelo menos um ponto em comum é também um intervalo fechado e limitado. Mostre o mesmo resultado para a interseção.*

Exercício 11. *Mostre que todo intervalo não degenerado de* $\mathbb{R}$ *é não-enumerável.*