

# Equações Diferenciais Ordinárias

NOTAS DE AULA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO  
ICMC-USP

Universidade de São Paulo - USP

São Carlos, 19 de agosto de 2009



---

# Índice

<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>1 Propriedades gerais</b>	<b>5</b>
1.1 Problema de valor inicial . . . . .	5
1.2 Existência de soluções . . . . .	5
1.3 O teorema do ponto fixo de Schauder . . . . .	7
1.4 Teorema de Áscoli . . . . .	9
1.5 Prolongamento de soluções . . . . .	13
1.6 Existência e unicidade de soluções . . . . .	19
1.7 Diferenciabilidade de ponto fixo com relação a parâmetros . . . . .	27
1.8 Dependência contínua e estabilidade . . . . .	33
1.9 Estabilidade no sentido de Liapunov . . . . .	34
<b>2 Sistemas autônomos: generalidades</b>	<b>41</b>
2.1 Preliminares . . . . .	41
2.2 Retrato de fase . . . . .	42
2.3 Conjuntos limites . . . . .	46
2.4 Conjuntos invariantes . . . . .	49
2.5 Conjunto minimal . . . . .	51
<b>3 Sistemas lineares e linearização</b>	<b>55</b>

3.1	Introdução . . . . .	55
3.2	Princípio da superposição . . . . .	56
3.3	Matriz fundamental . . . . .	57
3.4	Equações escalares de ordem $n$ . . . . .	60
3.4.1	Fórmula da variação das constantes . . . . .	62
3.4.2	Equação adjunta de uma equação escalar de ordem $n$ . . . . .	63
3.5	Sistemas lineares com coeficientes constantes . . . . .	64
3.5.1	Autovalores e autovetores . . . . .	66
3.5.2	Soluções reais . . . . .	67
3.5.3	Determinação de matriz fundamental de $\dot{x} = Ax$ . . . . .	68
3.5.4	Método para achar a base de $M_\lambda(A)$ . . . . .	71
3.5.5	Forma canônica de Jordan . . . . .	73
3.5.6	Equações de ordem $n$ com coeficientes Constantes . . . . .	74
3.6	Sistemas lineares autônomos bidimensionais . . . . .	75
3.7	Sistemas lineares periódicos: teoria de Floquet . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Estabilidade e instabilidade</b>	<b>85</b>
4.1	Estabilidade de sistemas lineares com coeficientes constantes . . . . .	85
4.2	Estabilidade de sistemas lineares e perturbados . . . . .	86
4.2.1	Estabilidade de sistemas perturbados . . . . .	88
4.3	A propriedade do ponto de sela . . . . .	91
4.3.1	Motivação . . . . .	91
4.3.2	Desigualdade integral . . . . .	94
4.4	Estabilidade: método direto de Liapunov . . . . .	101
4.4.1	Introdução . . . . .	101
4.4.2	Método direto de Liapunov . . . . .	101
4.4.3	Teorema de estabilidade e estabilidade assintótica de Liapunov . . .	102
4.5	Instabilidade . . . . .	107
4.5.1	Primeiro teorema de instabilidade de Liapunov . . . . .	107
4.5.2	Segundo teorema de instabilidade de Liapunov . . . . .	109
4.5.3	Teorema de instabilidade de Cetaev . . . . .	110

---

4.6	Invariância e estabilidade: teoria de La Salle . . . . .	113
4.6.1	Introdução . . . . .	113
4.6.2	Apresentação do método . . . . .	113
4.7	Estabilidade assintótica global . . . . .	118
4.7.1	Introdução . . . . .	118
4.7.2	Apresentação do método . . . . .	118
4.7.3	Limitação de soluções . . . . .	118
4.8	Teoria de Poincaré-Bendixon . . . . .	119
4.8.1	Motivação . . . . .	119
4.9	Aplicações da teoria de Poincaré-Bendixon . . . . .	127
<b>5</b>	<b>Teorema de Hartman</b>	<b>133</b>
5.1	Generalidades . . . . .	133
5.2	Localização . . . . .	136
<b>6</b>	<b>Exercícios</b>	<b>137</b>
6.1	Lista 1 . . . . .	137
6.2	Lista 2 . . . . .	137
6.3	Lista 3 . . . . .	139
6.4	Lista 4 . . . . .	140
6.5	Lista 5 . . . . .	141
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>143</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>145</b>



---

# Introdução

O propósito destas notas é abordar de maneira geral a teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias e servir como base para alunos de mestrado e doutorado em matemática.





# Propriedades gerais

## 1.1 Problema de valor inicial

Sejam  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$  um subconjunto aberto e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua.

**Definição 1.1.1.** Uma solução da equação diferencial ordinária (EDO)  $\dot{x} = f(t, x)$  em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  é uma função  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

i)  $G(x) = \{(t, x(t)) : t \in I\} \subset D$ ;

ii)  $x$  é diferenciável em  $I$ ;

iii)  $\dot{x} = f(t, x(t))$ , para todo  $t \in I$ .

**Definição 1.1.2.** Seja  $(t_0, x_0) \in D$ . Um problema de valor inicial (PVI) para a equação  $\dot{x} = f(t, x)$  consiste em encontrar um intervalo  $I$  contendo  $t_0$  e uma solução  $x(t)$  da equação em  $I$  tal que  $x(t_0) = x_0$ .

**Notação:**

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{PVI})$$

## 1.2 Existência de soluções

Nesta seção nos dedicamos a encontrar condições nas quais um determinado PVI possui solução e também quando esta solução é única.

**Exemplo 1.2.1.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Consideremos o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Para cada  $c > 0$  a função  $x_c(t)$  definida por

$$x_c(t) = \begin{cases} \frac{(t-c)^2}{4}, & \text{se } t \geq c \\ 0, & \text{se } t < c \end{cases}$$

é solução do PVI acima.

**Solução.** Se  $x < 0$ , temos que  $x(t) = c$ . Usando a condição inicial segue que  $x(0) = 0 = c$ . Portanto  $x(t) = 0$  para  $x < 0$ .

Se  $x \geq 0$ , temos que  $\dot{x} = \sqrt{x}$ . Como  $dx = \dot{x}dt$  segue

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = dt \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int dt$$

$$2\sqrt{x} + c_1 = t + c_2 \Rightarrow x = \frac{(t-c)^2}{4}, \quad c = c_1 - c_2.$$

Portanto temos  $x(t) = 0$  para todo  $t$  e  $x_c(t) = \begin{cases} \frac{(t-c)^2}{4}, & \text{se } t \geq c \\ 0, & \text{se } t < c \end{cases}$  são soluções do PVI. □

Figura 1.1: Gráfico de  $x_c(t)$

**Lema 1.2.2.** *Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua. Então  $x(t)$  é solução de  $\dot{x} = f(t, x)$  em  $I$  com  $x(t_0) = x_0$ ,  $(t_0, x_0) \in D$  se e somente se  $x(t)$  é contínua em  $I$ ,  $(t, x(t)) \in D$  para todo  $t \in I$  e*

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds.$$

**Demonstração.**  $\Rightarrow$ ) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\int_{t_0}^t \dot{x}(s)ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds.$$

Sendo  $x$  solução de  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  as outras hipóteses estão satisfeitas trivialmente.

$\Leftarrow$ ) É trivial. □

## 1.3 O teorema do ponto fixo de Schauder

**Definição 1.3.1.** *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $A \subset X$  um subconjunto de  $X$ .  $A$  é dito convexo se para todo  $x, y \in A$  tem-se que  $\theta x + (1 - \theta)y \in A, \forall \theta \in (0, 1)$ .*

Figura 1.2: Conjunto convexo

**Teorema 1.3.1** (Ponto fixo de Schauder). *Sejam  $X$  espaço de Banach,  $A \subset X$  um subconjunto convexo e compacto e seja  $f : A \rightarrow A$  contínua, então  $f$  tem um ponto fixo em  $A$ .*

**Definição 1.3.2.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach,  $A \subset X$  um subconjunto de  $X$  e  $f : A \subset X \rightarrow Y$  uma aplicação. Dizemos que  $f$  é uma aplicação compacta se  $f$  leva cada limitado de  $A$  em um conjunto relativamente compacto de  $Y$ .*

**Observação 1.3.2.** *Se  $f$  é uma função que leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos,  $f$  não é necessariamente contínua. De fato, considerem a seguinte função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x}, & \text{se } x > 1 \\ 0, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

*Se  $B = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  então  $f(B) = (\frac{1}{4}, 1) \cup (1, \sqrt{\frac{3}{2}})$  e  $\overline{f(B)} = [\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{3}{2}}]$  é compacto, mas  $f$  não é contínua.*

Figura 1.3: Gráfico da Observação 1.3.2.

**Definição 1.3.3.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach. Dizemos que  $f : X \rightarrow Y$  é completamente contínua se  $f$  for compacta e contínua.*

**Observação 1.3.3.** *Se  $f : X \rightarrow Y$  for linear então  $f$  é compacta se e somente se  $f$  for completamente contínua.*

Figura 1.4: Envoltória convexa fechada de  $f(A)$

**Corolário 1.3.4.** *Sejam  $X$  um espaço de Banach,  $A \subset X$  um subconjunto limitado, fechado e convexo de  $X$  e  $f : A \rightarrow A$  completamente contínua. Então  $f$  tem um ponto fixo em  $A$ .*

**Demonstração.** Como  $f(A) \subset A$  e  $A$  é fechado então  $\overline{f(A)} \subset A$ . Sendo  $f$  completamente contínua  $\overline{f(A)}$  é compacto. Além disso  $\overline{\text{co}}(f(A))$  (= é o menor conjunto convexo e fechado que contém  $f(A)$ ).

Pelo Teorema de Mazur temos que  $\overline{\text{co}}(f(A))$  é compacto. Como  $\overline{\text{co}}(f(A)) \subset A$  e  $f(\overline{\text{co}}(\overline{f(A)})) \subset f(A) \subset \overline{\text{co}}(\overline{f(A)})$ . O Teorema de Schauder garante que existe um ponto fixo em  $\overline{\text{co}}(\overline{f(A)}) \subset A$ .  $\square$

## 1.4 Teorema de Áscoli

Sejam  $K$  e  $M$  espaços métricos com  $K$  compacto. Consideremos o conjunto  $C(K, M) = \{f : K \rightarrow M : f \text{ é contínua}\}$  com a topologia da convergência uniforme; isto é, a topologia dada pela distância

$$d(f, g) = \max_{x \in K} d(f(x), g(x)),$$

para  $f, g \in C(K, M)$ .

**Definição 1.4.1.** Um subconjunto  $E \subset C(K, M)$  é equicontínuo se dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que se  $d(x, y) < \delta$  então  $d(f(x), f(y)) < \epsilon, \forall f \in E, \forall x, y \in K$ .

Figura 1.5: Conjunto equicontínuo

**Teorema 1.4.1** (Teorema de Áscoli). *Sejam  $K$  e  $M$  espaços métricos com  $K$  compacto e  $E \subset C(K, M)$ . Suponha que estão satisfeitas:*

1. Para cada  $x \in K$  o conjunto  $E(x) = \{f(x) \in M : f \in E\}$  é relativamente compacto em  $M$ ;
2.  $E$  é equicontínuo.

Então  $E$  é relativamente compacto.

**Corolário 1.4.2.** *Sejam  $K$  espaço métrico compacto e  $E \subset C(K, \mathbb{R}^m)$  tal que*

1. Existe  $N \geq 0$  tal que  $|f(x)| \leq N, \forall x \in K, \forall f \in E$ ;
2.  $E$  é equicontínuo.

Então  $E$  é relativamente compacto.

**Exemplo 1.4.3.** *Sejam  $I = [a, b]$ ,  $M, \beta > 0$  e  $E = \{\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n : |\phi(t)| \leq \beta, |\phi(t) - \phi(s)| \leq M|t - s|, \forall t, s \in I\} \subset C(I, \mathbb{R}^n)$ . Do Corolário 1.4.2 segue que  $E$  é relativamente compacto. Em  $C(I, \mathbb{R}^n)$  consideramos a norma  $\|\varphi\| = \sup_{t \in I} |\varphi(t)|$ .*

**Solução.** Seja  $E(t) = \{\varphi(t) \in \mathbb{R}^n : \varphi \in E\}$ .

$E(t)$  é relativamente compacto. De fato, como  $|\varphi(t)| \leq \beta, \forall t \in I, \forall \varphi \in E$ . Segue que  $E(t) \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto limitado, logo  $\overline{E(t)}$  é compacto em  $\mathbb{R}^n$ .

$E$  é equicontínuo. De fato, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $|t - s| < \delta$  então  $|\phi(t) - \phi(s)| \leq M|t - s| < M\delta < \epsilon, \forall t, s \in I, \forall \phi \in E$ , basta tomar  $\delta < \frac{\epsilon}{M}$ .

$E$  é fechado. De fato, seja  $\{\phi_n\} \subset E$  uma sequência tal que  $\phi_n \rightarrow \phi \in C(I, \mathbb{R}^n)$ . Como  $\phi_n \rightarrow \phi$  e  $\|\phi_n\| \leq \beta$  tem-se que  $\|\phi\| \leq \beta$ . Também  $|\phi_n(t) - \phi_n(s)| \leq M|t - s|, \forall \phi_n, \forall t, s \in I$ , como  $|\cdot|$  é uma função contínua tem-se que  $|\phi(t) - \phi(s)| \leq M|t - s|, \forall t, s \in I$ . Portanto  $\phi \in E$ . Assim  $E$  é fechado e  $\overline{E} = E$  é compacto.  $\square$

**Teorema 1.4.4** (Teorema de Peano). *Sejam  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua e  $(t_0, x_0) \in D$ . Então o PVI*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

tem pelo menos uma solução.

**Demonstração.** A ideia é aplicar o Corolário do Teorema de Schauder ao operador

$$(T\phi)(t) \stackrel{\text{def}}{=} x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds. \quad (1.2)$$

Vejam os em que condições  $T$  estará bem definido. Sejam  $\alpha, \beta > 0$  parâmetros os quais serão ajustados convenientemente no decorrer da demonstração. Definamos os seguintes conjuntos

$$X = C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n)$$

$$R = R(\alpha, \beta, t_0, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\}$$

$$A = A(\alpha, \beta, t_0, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi \in C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n) : |\phi(t) - x_0| \leq \beta, \\ \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \phi(t_0) = x_0\}.$$

Figura 1.6: Os subconjuntos  $R$  e  $D$

Consideremos  $\alpha, \beta$  suficientemente pequenos de modo que  $R \subset D$ . Assim definamos  $T : X \rightarrow X$  dado pela equação (1.2) e vejamos em que condições  $T$  deixa  $A$  invariante.

Observe que,

$$|(T\phi)(t) - x_0| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \phi(s))| ds \right| \leq M\alpha,$$

onde  $M \geq \max_{(t,x) \in R} |f(t, x)|$ .

Tomando  $\alpha$  suficientemente pequeno podemos supor que  $M\alpha < \beta$ .

Mostremos que nestas condições  $T$  mantém  $A$  invariante. Se  $\phi \in A$  temos

(a) A aplicação  $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \mapsto (T\phi)(t)$  é contínua;

(b)  $|(T\phi)(t) - x_0| \leq \beta \quad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ ;

(c)  $(T\phi)(t_0) = x_0$ .

Logo  $T(A) \subset A$ .

Além disso  $A$  é fechado, limitado e convexo.

*i) Fechado.* Seja  $\{\phi_n\} \subset A$  tal que  $\phi_n \rightarrow \phi$ . Como  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  é compacto  $\phi_n \rightarrow \phi$  uniformemente então  $\phi$  é contínua. Assim

$$\phi(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t_0) = x_0;$$

e

$$|\phi(t) - x_0| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) - x_0 \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\phi_n(t) - x_0| \leq \beta.$$

Portanto  $\phi \in A$ .

*ii) Limitado.* É imediato.

*iii) Convexo.* Se  $\phi, \psi \in A$  então  $\theta\phi + (1 - \theta)\psi \in A, \forall \theta \in (0, 1)$ . De fato,

- Observe que  $\theta\phi(t_0) + (1 - \theta)\psi(t_0) = \theta x_0 + (1 - \theta)x_0 = x_0$ .
- $\theta\phi + (1 - \theta)\psi$  é contínua.

$$\begin{aligned} |\theta\phi(t) + (1 - \theta)\psi(t) - x_0| &= |\theta\phi(t) + (1 - \theta)\psi(t) - (\theta x_0 + (1 - \theta)x_0)| \\ &\leq \theta|\phi(t) - x_0| + (1 - \theta)|\psi(t) - x_0| \\ &\leq \theta\beta + (1 - \theta)\beta = \beta. \end{aligned}$$

Mostremos agora que  $T$  é contínua em  $A$ . De fato, se  $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , então

$$|(T\phi)(t) - (T\psi)(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))| ds \right|.$$

Como  $f$  é uniformemente contínua em  $R$ , dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x - y| < \delta, \quad x, y \in R \Rightarrow |f(s, x) - f(s, y)| < \epsilon, \quad \forall s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Se  $\|\phi - \psi\| = \max_{s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]} |\phi(s) - \psi(s)| < \delta$  então  $|(T\phi)(t) - (T\psi)(t)| \leq \epsilon\alpha$  e segue a continuidade de  $T$ .

Mostremos agora que  $T$  é completamente contínua. Como  $T$  é contínua, basta mostrar que  $T$  é compacta e para isto basta mostrar que  $T(A)$  é relativamente compacta. Aplicaremos então o Corolário do teorema de Áscoli a  $T(A)$ .

Como  $T(A) \subset A$  e  $A$  é limitado basta então mostrar que  $T(A)$  é equicontínuo. De fato, se  $\phi \in A$  e  $t, s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  então

$$|(T\phi)(t) - (T\phi)(s)| \leq \left| \int_s^t |f(\tau, \phi(\tau))| d\tau \right| \leq M|t - s|.$$

Logo  $TA$  é equicontínuo.

Do Teorema de Schauder segue que  $T$  tem um ponto fixo e do Lema 1.2.2 segue que o ponto fixo é uma solução do PVI (1.1) em  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .  $\square$

**Corolário 1.4.5.** *Sejam  $f$  satisfazendo as condições do Teorema 1.4.4 e  $U \subset D$  um subconjunto compacto. Então existe  $\alpha = \alpha(U) > 0$ , tal que para todo  $(t_0, x_0) \in U$ , o PVI*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tem pelo menos uma solução definida em  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

Figura 1.7: Os subconjuntos  $U$  e  $D$ .

**Demonstração.** Seja  $V$  um subconjunto aberto tal que  $U \subset V$  e  $\bar{V}$  é compacto,  $\bar{V} \subset D$  e  $M \geq \sup_{(t,x) \in \bar{V}} |f(t, x)|$ .

Escolhemos  $\alpha, \beta$  tal que  $M\alpha < \beta$  e tal que

$$R := \{(t, x) : |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\} \subset V, \forall (t_0, x_0) \in U.$$

A seguir acompanha-se a demonstração do Teorema 1.4.4, tomando-se  $A = A(\alpha, \beta, t_0, x_0)$  com  $\alpha$  e  $\beta$  escolhidos acima.  $\square$

Figura 1.8: Os subconjuntos  $U$  e  $V$

## 1.5 Prolongamento de soluções

Nesta seção vamos considerar  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  um subconjunto aberto.

**Definição 1.5.1.** *Seja  $\phi$  uma solução de uma equação diferencial  $\dot{x} = f(t, x)$ , onde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função contínua, num intervalo  $I$ . Dizemos que a solução  $\hat{\phi} : \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma continuação (extensão ou prolongamento) de  $\phi$  se  $\hat{I} \supsetneq I$  e  $\hat{\phi}|_I = \phi$ .*

De maneira natural, baseando-se na definição acima define-se continuação à direita (à esquerda).

**Lema 1.5.1.** *Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua. Suponhamos que  $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é solução de  $\dot{x} = f(t, x)$*

- (a) *Se  $f$  for limitada em  $D$ , então existe  $\phi(b^-)$  (resp.  $\phi(a^+)$ )*
- (b) *Se existir  $\phi(b^-)$  (resp.  $\phi(a^+)$ ) e  $(b, \phi(b^-)) \in D$  (resp.  $(a, \phi(a^+)) \in D$ ) então  $\phi$  pode ser prolongada a  $(a, b]$  (resp.  $[a, b)$ ).*

**Demonstração.** (a) Seja  $t_0 \in (a, b)$ . Para todo  $t \in (a, b)$  temos

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Se  $M \geq \sup_{(t,x) \in D} |f(t, x)|$ , temos que

$$|\phi(t) - \phi(s)| \leq M|t - s| \quad \text{para } t, s \in (a, b).$$

Do critério de Cauchy segue que existe  $\phi(b^-)$  (resp.  $\phi(a^+)$ ).

- (b) Como existe  $\phi(b^-)$ , podemos definir  $\hat{\phi} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $\hat{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \in (a, b) \\ \phi(b^-), & t = b. \end{cases}$

Como  $\phi(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds$  para todo  $t \in (a, b)$  temos que

$$\hat{\phi}(t) = \hat{\phi}(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \hat{\phi}(s)) ds, \quad \forall t \in (a, b]$$

e daí  $\hat{\phi}(t)$  é solução em  $(a, b]$ . □

**Teorema 1.5.2** (Teorema da continuação de solução). *Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua e  $x(t)$  uma solução de  $\dot{x} = f(t, x)$ . Se  $x(t)$  é continuável então  $x(t)$  admite um prolongamento não continuável. Além disso se  $x(t)$  é solução em  $[a, \omega)$  e for não continuável à direita então  $x(t)$  tende à fronteira de  $D$  quando  $t \rightarrow \omega$ , ou mais precisamente, dado um compacto  $U \subset D$  existe  $t_U \in [a, \omega)$  tal que  $(t, x(t)) \notin U$  se  $t \in (t_U, \omega)$ . Idem à esquerda.*

**Demonstração.** Analisaremos somente a continuação à direita. Se  $x(t)$  é continuável podemos supor que  $x(t)$  está definida num intervalo fechado  $[a, b]$ . Se  $x(t)$  tiver uma extensão a  $[a, \infty)$  nada mais há para provar. Supomos então que  $x(t)$  não tem nenhum prolongamento a  $[a, \infty)$ .



Figura 1.9: Subconjunto  $V$ .

Seja  $U$  um compacto. Sem perda de generalidade podemos supor que  $(t, x(t)) \in U$   $t \in [a, b]$ , pois poderíamos redefinir  $U$  juntando o conjunto  $\{(t, x(t)) : t \in [a, b]\}$  que é compacto.

Seja  $V$  aberto com  $\bar{V}$  compacto tal que  $U \subset V \subset \bar{V} \subset D$  e  $M \geq \sup_{(t,x) \in \bar{V}} |f(t, x)|$ .

Do Corolário 1.4.5 segue que existe  $\alpha = \alpha(U, M) > 0$ , tal que existe uma solução  $x(t)$  definida em  $[a, b + \alpha]$ , que é prolongamento de  $x$ .

Se  $(b + \alpha, x(b + \alpha)) \in U$  podemos repetir o processo e encontrar uma continuação a  $[a, b + 2\alpha]$ .

Assim sendo, como  $U$  é compacto, existe um inteiro  $m$  e extensão  $x : [a, b + m\alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $(b + m\alpha, x(b + m\alpha)) \notin U$ .

Consideremos agora uma sequência  $V_n$ , com  $\bar{V}_n$  compacto,  $U \subset V_n$ ,  $\bar{V}_n \subset V_{n+1} \subset D$ ,  $V_n$  aberto,  $n = 1, 2, \dots$  e tal que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = D$ . Supomos também que  $(b, x(b)) \in V_1$ .

Para cada  $n$  existe  $b_n$  e extensão de  $x(t)$  a  $[a, b_n]$  de modo que  $(b_n, x(b_n)) \notin \bar{V}_n$ . Podemos supor ainda que  $(b_n)$  é crescente.

Se  $(b_n)$  fosse não limitada, existiria uma extensão a  $[a, \infty)$  contrariando a hipótese. Logo  $(b_n)$  é limitada e daí existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \stackrel{\text{def}}{=} \omega \in \mathbb{R}$ .

Assim  $x(t)$  admite uma extensão a  $[a, \omega]$ .

*Afirmção.*  $x(t)$  não pode ser estendida a  $[a, \omega]$ . Suponhamos que sim. Então  $(\omega, x(\omega)) \in D$  e  $\lim_{t \rightarrow \omega^-} x(t) = x(\omega)$ . Como  $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = D$ , existe  $n_0$  tal que  $(\omega, x(\omega)) \in V_{n_0}$ . De acordo com a construção feita anteriormente,  $n > n_0 \Rightarrow (b_n, x(b_n)) \notin \bar{V}_n \supset V_n \supset \bar{V}_{n_0} \supset V_{n_0}$ . Assim  $(b_n, x(b_n)) \in V_{n_0}^C$ , que é fechado. Como  $(b_n, x(b_n)) \rightarrow (\omega, x(\omega))$  temos que  $(\omega, x(\omega)) \in V_{n_0}^C$  o que é uma contradição. Logo  $x(t)$  não tem prolongamento à  $[a, \omega]$  e fica assim provada a primeira parte do teorema.

Passemos então a segunda parte.

O caso  $\omega = \infty$  é trivial. Suponhamos que  $\omega < \infty$ . Seja  $U \subset D$  compacto e  $A = \{t \in [a, \omega) : (t, x(t)) \in U\}$ . Se  $A$  for vazio não há o que provar.

*Afirmção.*  $\sup A < \omega$ . Suponhamos que não. Então existe  $t_n \rightarrow \omega$  tal que  $(t_n, x(t_n)) \in U$ . Como  $U$  é compacto, podemos supor que  $(t_n, x(t_n)) \rightarrow (\omega, y) \in U$ .

Como  $f$  é limitada em uma vizinhança de  $(\omega, y)$ , do Lema 1.5.1(b) segue que  $x(t)$  pode ser prolongada a  $[a, \omega + \alpha]$  o que é uma contradição.

Logo  $t_U := \sup A < \omega$  e  $(t, x(t)) \notin U$  para  $t \in [t_U, \omega)$ . □

Os seguintes corolários são consequências do Teorema 1.5.2.

**Corolário 1.5.3.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $f : [a, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua. Se  $x(t)$  é solução de  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(t) \in K \subset \Omega$  ( $K$  compacto),  $\forall t \in [a, \omega)$  e  $x(t)$  é não continuável à direita então  $\omega = +\infty$ .*

**Demonstração.** Se  $\omega < \infty$  então consideramos  $U = [a, \omega] \times K$ . Do Teorema 1.5.2 segue que existe  $t_U \in [a, \omega)$  tal que  $(t, x(t)) \notin U$  para  $t \in [t_U, \omega)$  o que é contradição pois  $(t, x(t)) \in [a, \omega) \times K$ ,  $\forall t \in [a, \omega)$ . Logo  $\omega = +\infty$ .  $\square$

**Corolário 1.5.4.** *Seja  $f : [a, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua.*

- (a) *Se  $\phi : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma função contínua,  $x(t)$  é solução não continuável de  $\dot{x} = f(t, x)$  definida em  $[a, \omega)$  e  $|x(t)| \leq \phi(t)$ ,  $\forall t \in [a, \omega)$  então  $\omega = +\infty$ .*
- (b) *Se  $x(t)$  é solução não continuável de  $\dot{x} = f(t, x)$  definida em  $[a, \omega)$  então ou  $\omega = +\infty$  ou  $\omega < +\infty$  e neste último caso  $|x(t)| \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow \omega$ .*

**Demonstração.** (a) Se  $\omega < +\infty$  tomamos  $H \geq \max_{t \in [a, \omega]} \phi(t)$ ,  $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq H\}$ .

Temos então que  $x(t) \in K$ ,  $\forall t \in [a, \omega)$ . Do Corolário 1.5.3 segue que  $\omega = +\infty$  o que é uma contradição.

(b) Suponhamos que  $\omega < +\infty$ . Dado  $H > 0$  tomamos o compacto  $U = [a, \omega] \times K$ . Do Teorema 1.5.2, existe  $t_H \in [a, \omega)$  tal que  $(t, x(t)) \notin U$  para  $t \in (t_H, \omega)$ , isto é,  $|x(t)| > H$  para  $t \in (t_H, \omega)$ . Isso implica que  $|x(t)| \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow \omega$ .  $\square$

**Lema 1.5.5** (Desigualdade de Gronwall). *Se  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta(t) \geq 0$  e  $\phi(t)$  são funções reais contínuas que satisfazem*

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta(s)\phi(s)ds, \quad \text{para } a \leq t \leq b$$

então

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\int_a^t \beta(s)ds}, \quad a \leq t \leq b.$$

**Demonstração.** Seja  $V(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^\tau \beta(s)\phi(s)ds$ . Então

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tau) &= \beta(\tau)\phi(\tau) \leq \beta(\tau)\left[\alpha + \int_a^\tau \beta(s)\phi(s)ds\right] \\ &\leq \beta(\tau)\alpha + \beta(\tau)V(\tau) \\ \dot{V}(\tau) - \beta(\tau)V(\tau) &\leq \alpha\beta(\tau). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos membros por  $e^{-\int_a^\tau \beta(s)ds}$  temos:

$$\begin{aligned} e^{-\int_a^\tau \beta(s)ds} \dot{V}(\tau) - \beta(\tau)e^{-\int_a^\tau \beta(s)ds} V(\tau) &\leq \alpha\beta(\tau)e^{-\int_a^\tau \beta(s)ds} \\ \frac{d}{d\tau} \left[ e^{-\int_a^\tau \beta(s)ds} V(\tau) \right] &\leq \alpha\beta(\tau)e^{-\int_a^\tau \beta(s)ds}. \end{aligned}$$

Integrando de  $a$  até  $t$ , e lembrando que  $V(a) = 0$ , temos

$$\begin{aligned} e^{-\int_a^t \beta(s) ds} V(t) &\leq \alpha \int_a^t \underbrace{e^{-\int_a^\tau \beta(s) ds}}_{\beta(\tau)} d\tau = \alpha \int_a^t \frac{d}{d\tau} (-e^{-\int_a^\tau \beta(s) ds}) d\tau \\ &\leq \alpha [1 - e^{-\int_a^t \beta(\tau) d\tau}] \\ \phi(t) - \alpha &\leq \alpha e^{\int_a^t \beta(\tau) d\tau} - \alpha. \end{aligned}$$

Logo  $\phi(t) \leq \alpha e^{\int_a^t \beta(s) ds}$ . □

**Lema 1.5.6** (Desigualdade de Gronwall Generalizada). *Se  $\phi, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas,  $\beta(t) \geq 0$  é Lebesgue integrável em  $[a, b]$  e*

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) \phi(s) ds, \quad \text{para } a \leq t \leq b$$

então

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) \alpha(s) e^{\int_a^s \beta(u) du} ds, \quad \text{para } a \leq t \leq b.$$

**Demonstração.** Seja  $V(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^t \beta(s) \phi(s) ds$ . Então

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = \beta(t) \phi(t) &\leq \beta(t) \alpha(t) + \beta(t) V(t) \\ \dot{V}(t) - \beta(t) V(t) &\leq \beta(t) \alpha(t). \end{aligned}$$

Multiplicando esta última desigualdade por  $e^{-\int_a^t \beta(s) ds}$  temos

$$\frac{d}{dt} (e^{-\int_a^t \beta(s) ds} V(t)) \leq \beta(t) \alpha(t) e^{-\int_a^t \beta(s) ds}.$$

Integrando de  $a$  até  $t$ , temos:

$$\begin{aligned} e^{-\int_a^t \beta(s) ds} V(t) &\leq \int_a^t \beta(s) \alpha(s) e^{-\int_a^s \beta(u) du} ds \\ \phi(t) - \alpha(t) &\leq V(t) \leq \int_a^t \beta(s) \alpha(s) e^{\int_a^s \beta(u) du} ds \\ \phi(t) &\leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) \alpha(s) e^{\int_a^s \beta(u) du} ds \end{aligned}$$

□

**Observação:** Se  $\alpha(t)$  é crescente e contínua (logo existe  $\dot{\alpha}(t)$  para quase todo  $t$ ) então

$$\int_a^t \beta(s)\alpha(s) e^{\int_a^s \beta(u)du} ds = - \int_a^t \alpha(s) \frac{d}{ds} (e^{\int_a^s \beta(u)du}) ds$$

$$\stackrel{\text{Int.P/partes}}{=} -[\alpha(t) - \alpha(a)e^{\int_a^t \beta(u)du} - \int_a^t e^{\int_a^s \beta(u)du} \dot{\alpha}(s) ds].$$

Logo

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq \alpha(a)e^{\int_a^t \beta(u)du} + e^{\int_a^t \beta(u)du} \int_a^t \dot{\alpha}(s) ds \\ &\leq \alpha(a)e^{\int_a^t \beta(u)du} + e^{\int_a^t \beta(u)du} [\alpha(t) - \alpha(a)]. \end{aligned}$$

Logo

$$\phi(t) \leq \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(u)du}.$$

Concluimos que se  $\alpha(t)$  é crescente e  $\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\phi(s)ds$  então

$$\phi(t) \leq \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(u)du}.$$

□

Observe que para  $g(s) = e^{\int_a^s \beta(u)du}$  temos  $\dot{g}(s) = \beta(s)e^{\int_a^s \beta(u)du} \leq 0$ . Isto é,  $g$  é decrescente,  $g(s) \leq g(a)$ ,  $\forall s \in [a, t]$  então

$$e^{\int_a^t \beta(u)du} \leq e^{\int_a^a \beta(u)du}.$$

**Exercício 1.5.1.** Seja  $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua satisfazendo  $|f(t, x)| \leq h(t)|x| + b(t)$  onde  $h, b : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  são contínuas. Mostre que toda solução não continuável de

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

está definida em  $[0, \infty)$

**Solução.** Seja  $\phi : [0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^n$  a solução não continuável de (1.3), isto é

$$\phi(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Estimando esta solução temos

$$\begin{aligned} |\phi(t)| &\leq |x_0| + \int_0^t |f(s, \phi(s))| ds \leq |x_0| + \int_0^t (h(s)|\phi(s)| + b(s)) ds \\ &\leq |x_0| + \int_0^t b(s) ds + \int_0^t h(s)|\phi(s)| ds. \end{aligned}$$

A função  $\alpha(t) = |x_0| + \int_0^t b(s) ds$  é crescente, pois se  $0 < t_1 < t_2$ , então

$$\alpha(t_1) = |x_0| + \int_0^{t_1} b(s) ds \leq |x_0| + \int_0^{t_2} b(s) ds = \alpha(t_2).$$

Logo  $\dot{\alpha}(t) = b(t) \geq 0$ . Pelo Lema de Gronwall 1.5.6 temos que

$$|\phi(t)| \leq \alpha(t) e^{\int_0^t h(s) ds}.$$

Fazendo  $\psi(t) = \alpha(t) e^{\int_0^t h(s) ds}$  temos  $|\phi(t)| \leq \psi(t)$ ,  $\forall t \in [0, \tau)$ . Do Corolário 1.5.4,  $\tau = +\infty$ .

## 1.6 Existência e unicidade de soluções

Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico e  $\Lambda$  um conjunto não-vazio.

**Definição 1.6.1.** Dizemos que  $T : M \times \Lambda \rightarrow M$  dada por  $T(x, y)$  é uma contração uniforme relativamente a  $y \in \Lambda$  se existir  $\rho \in [0, 1)$  tal que

$$d(T(x_1, y), T(x_2, y)) \leq \rho d(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in M, \forall y \in \Lambda.$$

**Teorema 1.6.1** (Teorema de Banach-Cacciopoli). *Sejam  $M$  um espaço métrico completo,  $\Lambda$  um espaço métrico e  $T : M \times \Lambda \rightarrow M$  uma contração uniforme relativamente a  $y \in \Lambda$ . Então para cada  $y \in \Lambda$  existe um único ponto fixo em  $M$ ,  $x = x(y) \stackrel{\text{def}}{=} g(y)$ . Se para cada  $x$  fixado em  $M$  a aplicação  $y \in \Lambda \mapsto T(x, y) \in M$  for contínua então  $g(y)$  é contínua em  $\Lambda$ .*

**Definição 1.6.2.** *Seja  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  um subconjunto aberto e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função. Dizemos que  $f$  é localmente Lipschitziana com relação à segunda variável se para cada compacto  $U \subset D$  existir constante real  $k = k(U) \geq 0$  tal que  $|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|$ ,  $\forall (t, x), (t, y) \in U$ .*

**Exercício 1.6.1.** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  subconjunto aberto e convexo,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\frac{\partial f}{\partial x} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  forem contínuas então  $f$  é localmente Lipschitziana com relação à segunda variável.*

Se  $f$  for contínua em  $D$  então o Teorema de Peano garante que por cada ponto  $(t_0, x_0) \in D$  existe pelo menos uma solução de  $\dot{x} = f(t, x)$  definida em um intervalo  $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  onde  $\alpha = \alpha(t_0, x_0)$ .

Suponhamos que  $f$  seja tal que exista uma única solução definida em  $I_\alpha$ , para cada  $(t_0, x_0)$  fixado em  $D$ . Então o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

tem uma única solução não continuável definida num intervalo  $(w_-(t_0, x_0), w_+(t_0, x_0))$ .

O conjunto  $E = \{(t, t_0, x_0) : w_-(t_0, x_0) < t < w_+(t_0, x_0), (t_0, x_0) \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+2}$  é chamado *domínio de definição* da aplicação solução  $x(t, t_0, x_0)$ .

O conjunto  $\gamma(x) = \{(t, x(t, t_0, x_0)) \in D : t \in (w_-(t_0, x_0), w_+(t_0, x_0))\}$  é chamada *trajetória* da solução do PVI (1.4) que passa por  $(t_0, x_0)$ .

Figura 1.10: Conjunto  $E$

**Teorema 1.6.2** (Teorema da existência, unicidade, continuidade com relação às condições iniciais). *Se  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é aberto e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e localmente Lipschitziana relativamente a  $x$ . Então para cada  $(t_0, x_0) \in D$  existe uma única solução não continuável  $x(t, t_0, x_0)$  do PVI (1.4). Além disso  $E$  é aberto e  $x(t, t_0, x_0)$  é contínua em  $E$ .*

**Demonstração.** Seja  $U$  um compacto de  $D$ ,  $V$  aberto,  $\bar{V}$  compacto tal que  $U \subset V \subset \bar{V} \subset D$ . Seja  $M \geq \max_{(t,x) \in \bar{V}} |f(t, x)|$  e seja  $k$  a constante de Lipschitz relativamente a  $\bar{V}$ .

Escolhemos  $\alpha, \beta$  suficientemente pequenos de modo que  $M\alpha < \beta$ ,  $k\alpha < 1$  e tal que

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\} \subset V \text{ para todo } (t_0, x_0) \in U.$$

Figura 1.11:  $R \subset V \subset \bar{V} \subset D$

Consideremos agora a transformação  $x(t + t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(t) + x_0$ .

Assim, resolver o PVI (1.4) é equivalente a resolver o PVI

$$\begin{cases} \dot{\phi} = f(t + t_0, \phi(t) + x_0), \\ \phi(0) = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

que é ainda equivalente a achar soluções contínuas da equação integral

$$\phi(t) = \int_0^t f(s + t_0, \phi(s) + x_0) ds,$$

ou ainda fazendo  $\tau = s + t_0$  temos

$$\phi(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} f(\tau, \phi(\tau - t_0) + x_0) d\tau.$$

Observamos que a solução do PVI original será recuperada através da transformação  $x(t) = \phi(t - t_0) + x_0$ .

Vamos procurar  $\phi$  no conjunto  $\mathfrak{F} = \{\phi \in C([- \alpha, \alpha], \mathbb{R}^n) : \phi(0) = 0, |\phi(t)| \leq \beta\}$  com a norma do supremo.

Figura 1.12: Conjunto  $\mathfrak{F} \subset C([- \alpha, \alpha], \mathbb{R}^n)$

Observamos que a transformação acima foi feita de modo a evitar que o espaço onde será procurada a solução dependa de  $(t_0, x_0)$ . Definimos assim o operador

$$T : \mathfrak{F} \times R \rightarrow \mathfrak{F}$$

$$(\phi, (t_0, x_0)) \rightarrow (T_{(t_0, x_0)}\phi)(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} f(\tau, \phi(\tau - t_0) + x_0) d\tau,$$

o qual o denotaremos simplesmente por  $(T_{(t_0, x_0)}\phi)(t) = (T\phi)(t)$ .

É fácil ver que  $T$  está bem definido em  $\mathfrak{F}$ .

- $T$  deixa  $\mathfrak{F}$  invariante. De fato, seja  $\phi \in \mathfrak{F}$ . Então  $t \mapsto (T\phi)(t)$  é contínua em  $[- \alpha, \alpha]$ ,  $(T\phi)(0) = 0$ ,  $|(T\phi)(t)| \leq M\alpha \leq \beta$ ,  $\forall t \in [- \alpha, \alpha]$ . Logo  $T\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}$ .
- $T$  é uma contração uniforme relativamente a  $(t_0, x_0) \in U$ . De fato, se  $\phi, \psi \in \mathfrak{F}$  então

$$|(T\phi)(t) - (T\psi)(t)| \leq \alpha k \sup_{-\alpha \leq s \leq \alpha} |\phi(s) - \psi(s)|, \forall t \in [- \alpha, \alpha].$$

Logo existe um único ponto fixo de  $T$ ,  $\phi(t, (t_0, x_0))$  em  $\mathfrak{F}$ , isto é  $T\phi(t, (t_0, x_0)) = (T_{(t_0, x_0)}\phi)(t) = \phi(t, (t_0, x_0))$ . Como a aplicação  $(t_0, x_0) \mapsto T_{(t_0, x_0)}\phi \in \mathfrak{F}$  é contínua, temos do Teorema 1.6.1 (Banach-Cacciopoli) que a aplicação  $(t_0, x_0) \in U \mapsto \phi(\cdot, (t_0, x_0)) \in \mathfrak{F}$  é contínua.

Como  $\phi$  é uma função contínua de  $t$ , temos que  $(t, t_0, x_0) \in [- \alpha, \alpha] \times U \mapsto \phi(t, (t_0, x_0))$  é contínua, pois

$$\begin{aligned} \phi(t + h, (t_0 + \tau, x_0 + \xi)) - \phi(t, (t_0, x_0)) &= \phi(t + h, (t_0 + \tau, x_0 + \xi)) - \phi(t + h, (t_0, x_0)) \\ &\quad + \phi(t + h, (t_0, x_0)) - \phi(t, (t_0, x_0)). \end{aligned}$$

Voltando à equação original, os resultados acima dizem que existe  $\alpha > 0$  tal que o PVI (1.4) tem uma única solução definida em  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

Mostremos que isso implica unicidade não local, ou mais precisamente que o PVI (1.4) tem uma única solução não continuável. De fato, suponhamos que existam duas soluções  $x(t)$ ,  $y(t)$  do PVI (1.4), definidas em  $[t_0, \beta]$  de modo que  $x(t) = y(t)$ , para  $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$  e que exista  $t_1 > t_0 + \alpha$  tal que  $x(t_1) \neq y(t_1)$ ,  $t_1 < \beta$ .

Seja  $s = \sup\{\tau : x(t) = y(t), t \in [t_0, \tau]\}$ . Claramente  $s < t_1$ . Aplicando o que á foi provado acima temos que existe  $\alpha > 0$  tal que o PVI

$$\begin{cases} \dot{z} = f(t, z), \\ z(s) = x(s) \end{cases} \quad (1.6)$$

tem uma única solução definida em  $[s, s + \alpha]$ , o que é uma contradição, pois arbitrariamente próximo de  $s$  (à direita) existem pontos em que  $x$  e  $y$  diferem.

Nosso próximo objetivo é mostrar que  $E$  é aberto e que  $x(t, t_0, x_0)$  é contínua nas três variáveis.

Entretanto, mostraremos primeiro um resultado.

Se  $x(t, t_0, x_0)$  tem intervalo maximal  $(w_-, w_+)$  e  $[a, b] \subset (w_-, w_+)$  então existe  $\delta > 0$  tal que  $\forall (t_1, x_1) : d((t_1, x_1), (t_0, x_0)) < \delta$  então  $x(t, t_1, x_1)$  está definida para todo  $t \in [a, b]$  e dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que

$$d((t_1, x_1), (t_0, x_0)) < \delta \text{ então } |x(t, t_0, x_0) - x(t, t_1, x_1)| < \epsilon, \quad \forall t \in [a, b].$$

De fato, seja  $\gamma > 0$ , suficientemente pequeno, de modo que

$$U := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in [a, b], |x - x(t, t_0, x_0)| \leq \gamma\} \subset D.$$

Figura 1.13:  $[a, b] \subset (w_-, w_+)$

Como a aplicação  $(t_0, x_0) \mapsto \phi(\cdot, (t_0, x_0))$  é contínua (na verdade uniformemente) em  $[-\alpha, \alpha]$ , onde  $\alpha = \alpha(U) > 0$ . Isso implica que dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que se  $d((t_1, x_1), (t_0, x_0)) < \delta$  então  $|\phi(t, (t_0, x_0)) - \phi(t, (t_1, x_1))| < \epsilon$ ,  $\forall t \in [-\alpha, \alpha]$  e daí

$$|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_1, x_1)| = |\phi(t - t_0, (t_0, x_0)) - \phi(t - t_1, (t_1, x_1)) + x_0 - x_1| < \epsilon,$$

desde que  $|t - t_0| \leq \alpha$  e  $|t - t_1| \leq \alpha$ .

Tomando  $\delta < \frac{\alpha}{2}$  temos  $|t_1 - t_0| < \frac{\alpha}{2} := \beta$ . Assim, se  $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$  temos  $|t - t_1| = |t - t_0 + t_0 - t_1| \leq \alpha$  e daí  $|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_1, x_1)| < \epsilon$ .

Concluimos que dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que se  $d((t_1, x_1), (t_0, x_0)) < \delta$  então  $|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_1, x_1)| < \epsilon$ ,  $\forall t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$  onde  $\beta = \beta(U) > 0$ .

Consideraremos agora  $t \in (t_0 + \beta, t_0 + 2\beta)$ . Como foi feito anteriormente, existe  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_1 < \epsilon$ , tal que se  $d((t_1, x_1), (t_0 + \beta, x(t_0 + \beta, t_0, x_0))) < \delta_1$  então  $|x(t, t_0, x_0) -$



$|x(t, t_1, x_1)| < \epsilon, \forall t \in [t_0 + \beta - \beta, t_0 + 2\beta] = [t_0, t_0 + 2\beta]$ . Concluimos assim que se  $d((t_1, x_1), (t_0, x_0)) < \delta$  então  $|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_1, x_1)| < \epsilon, \forall t \in [t_0 - \beta, t_0 + 2\beta]$ .

Por um processo recursivo utilizando passos de tamanho  $\beta$  podemos cobrir o intervalo  $[a, b]$ .

Concluimos então que dado  $\epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que  $d((t_1, x_1), (t_0, x_0)) < \delta$  então  $|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_1, x_1)| < \epsilon, \forall t \in [a, b]$ .

Figura 1.14:  $[t_0 - \beta, t_0 + 2\beta] \subset [a, b]$

•  $E$  é aberto. De fato, sejam  $(s, t_0, x_0) \in E$  e  $[a, b] \subset (\omega_-, \omega_+)$  tal que  $s \in (a, b)$ . Como foi feito anteriormente, dado  $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tal que  $(s - \delta, s + \delta) \subset (a, b)$  e

$$d((t_1, x_1), (t_0, x_0)) < \delta \quad (1.7)$$

então

$$|x(t, (t_0, x_0)) - x(t, (t_1, x_1))| < \epsilon, \forall t \in [a, b]. \quad (1.8)$$

Assim temos que se  $\tau \in (s - \delta, s + \delta)$  e  $(t_1, x_1)$  satisfaz (1.7) temos que  $\tau \in (w_-(t_1, x_1), w_+(t_1, x_1))$ . Logo, para  $\tau \in (s - \delta, s + \delta)$ ,  $(\tau, t_1, x_1) \in E$  e vale (1.8) o que implica que  $E$  é aberto.

Figura 1.15: Continuidade de  $x$  com relação a  $t, t_0, x_0$

Da continuidade de  $x(\cdot, t_0, x_0)$  segue que dado  $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que vale (1.8) acima e  $|x(\tau, t_1, x_1) - x(s, t_0, x_0)| \leq |x(\tau, t_1, x_1) - x(\tau, t_0, x_0)| + |x(\tau, t_0, x_0) - x(s, t_0, x_0)| < \epsilon$ .  $\square$

**Teorema 1.6.3.** *Se além das condições do Teorema 1.6.2 a função  $f$  depende também de um parâmetro  $\lambda$ , isto é,  $f(t, x, \lambda)$  para  $\lambda$  variando em um conjunto fechado  $G \subset \mathbb{R}^k$ , é contínua em  $D \times G$  e localmente Lipschitziana com a constante  $k$  independente de  $\lambda$ , então para cada  $(t_0, x_0) \in D$  e  $\lambda \in G$ , existe uma única solução não continuável do*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (\text{PVI}_\lambda)$$

Além disso  $x(t, t_0, x_0, \lambda)$  é contínua nas quatro variáveis.

**Demonstração.** Segue a linha do Teorema 1.6.2, tomando  $M := \sup\{|f(t, x, \lambda)| : (t, x, \lambda) \in \bar{V} \times G\}$  e observando que o ponto fixo  $\phi(\cdot, (t_0, x_0, \lambda))$  depende continuamente de  $\lambda$ . Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $G$  é limitado.  $\square$

**Lema 1.6.4.** *Seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(D, \mathbb{R}^m)$  com  $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$  aberto, tal que  $f_n \rightarrow f_0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , uniformemente em subconjuntos compactos de  $D$ .*

Seja  $(t_n, x_n) \in D$ ,  $n \geq 0$ , tal que  $(t_n, x_n) \rightarrow (t_0, x_0) \in D$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Para  $n \geq 0$ , consideremos o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f_n(t, x) \\ x(t_n) = x_n. \end{cases} \quad (\text{PVI}_n)$$

Se  $\phi_0 : (w_-, w_+) \rightarrow \mathbb{R}^m$  a única solução não continuável de  $(\text{PVI}_0)$  e  $t_0 \in [a, b] \subset (w_-, w_+)$ , então existe  $n_0$  suficientemente grande tal que para todo  $n \geq n_0$  o  $(\text{PVI}_n)$  tem solução  $\phi_n$  definida em  $[a, b]$  e  $\phi_n(t) \rightarrow \phi_0(t)$ , uniformemente em  $[a, b]$ .

**Demonstração.** Para facilitar vamos supor que  $t_0 \in (a, b)$ . Sejam  $0 < \mu_1 < \mu_2$  suficientemente pequenos de modo que, se  $U$  e  $V$  são vizinhanças abertas de raio  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , respectivamente, de  $\{(t, \phi_0(t)) : a \leq t \leq b\}$  tal que  $U \subset V \subset \bar{V} \subset D$ . Seja  $M > \max_{(t,x) \in \bar{V}} |f_0(t, x)|$ . Então existe  $n_0$  tal que se  $n \geq n_0$  então  $\max_{(t,x) \in \bar{V}} |f_n(t, x)| \leq M$ .

Figura 1.16:  $(t_n, x_n) \rightarrow (t_0, x_0)$ ,  $n \rightarrow \infty$

Relembrando o Corolário 1.4.5 (do Teorema de Peano), vemos que podemos tomar  $\alpha, \beta > 0$ , com  $M\alpha < \beta$  de modo que o  $(\text{PVI}_n)$ ,  $n \geq n_0$  tem solução  $\phi_n$  definida em  $[t_n - \alpha, t_n + \alpha]$  e  $(t_n, x_n) \in U$ .

Como  $t_n \rightarrow t_0$ , temos que, para  $n_0$  suficientemente grande, todas as soluções estarão definidas em  $[t_0 - \frac{\alpha}{2}, t_0 + \frac{\alpha}{2}]$ .

Mostremos que  $\phi_n(t)$  converge para  $\phi_0(t)$  uniformemente em  $[t_0 - \frac{\alpha}{2}, t_0 + \frac{\alpha}{2}]$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Aqui precisaremos do seguinte resultado de Topologia:

Seja  $M$  um espaço métrico e  $(p_n)$  uma sequência de elementos de  $M$ . Então  $p_n \rightarrow p_0$  se e somente se toda subsequência de  $(p_n)$  tem subsequência convergente e toda subsequência convergente de  $(p_n)$  converge para  $p_0$ .

Seja  $(\psi_n)$  uma subsequência de  $(\phi_n)$ . Como  $|\dot{\psi}_n| = |f_n(t, \psi_n(t))| \leq M$  temos que o conjunto  $\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$  é equicontínuo, onde  $\psi_n : [t_0 - \frac{\alpha}{2}, t_0 + \frac{\alpha}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , pois

$$|\psi_n(t) - \psi_n(s)| \leq |\dot{\psi}_n(\theta)| |t - s| \leq M|t - s|, \quad \theta \in (t, s).$$

Como  $(\psi_n)$  é uniformemente limitada, segue do Teorema de Áscoli, que  $(\psi_n)$  tem uma subsequência uniformemente convergente.

Figura 1.17:  $U \subset V \subset \bar{V} \subset D$

Seja  $(\psi_{n_k})$  uma subsequência convergente de  $(\psi_n)$ , convergindo para  $\psi_0(t)$ . Como

$$\psi_{n_k}(t) = x_{n_k} + \int_{t_{n_k}}^t f_{n_k}(s, \psi_{n_k}(s)) ds.$$

Fazendo  $k \rightarrow \infty$  temos que  $\psi_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_0(s, \psi_0(s)) ds$ ,  $t \in [t_0 - \frac{\alpha}{2}, t_0 + \frac{\alpha}{2}]$ . Como o (PVI<sub>0</sub>) tem uma única solução não continuável temos que  $\phi_0(t) = \psi_0(t)$ ,  $\forall t \in [t_0 - \frac{\alpha}{2}, t_0 + \frac{\alpha}{2}]$ .

Utilizando-se um processo recursivo pode-se recobrir o intervalo  $[a, b]$  com intervalos de comprimento  $\alpha$  e obter-se a informação para  $[a, b]$ .  $\square$

**Corolário 1.6.5.** *Seja  $f : (t, x, \lambda) \in D \times G \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e localmente Lipschitziana em relação a  $x$ ,  $G$  fechado, com a constante de Lipschitz independente de  $\lambda \in G$ . Seja  $[a, w_+)$  o intervalo maximal à direita da solução do*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda_0) \\ x(a) = \bar{x}, \end{cases} \quad (\text{PVI}_{\lambda_0})$$

e  $b$  tal que  $[a, b] \subset [a, w_+)$ . Então para  $(x_0, \lambda)$  suficientemente próximo de  $(\bar{x}, \lambda_0)$  a solução maximal do

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda) \\ x(a) = x_0, \end{cases} \quad (\text{PVI}_{\lambda})$$

$x(t, a, x_0, \lambda)$  está definida em  $[a, b]$  e a aplicação  $(x_0, \lambda) \mapsto x(\cdot, a, x_0, \lambda) \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$  é contínua em  $(\bar{x}, \lambda_0)$ , onde em  $C([a, b], \mathbb{R}^n)$  consideramos a norma do supremo.

**Teorema 1.6.6.** *Suponhamos que  $f(t, x, \lambda)$  é contínua para  $(t, x) \in D$  e  $\lambda \in V$  onde  $V$  é uma vizinhança de  $\lambda_0$  em  $\mathbb{R}^k$ . Se o PVI*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda_0) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (\text{PVI}_{\lambda_0})$$

tem uma única solução continuável  $x(t, t_0, x_0, \lambda)$  definida em  $(w_-, w_+)$  (intervalo maximal de existência) e  $t_0 \in [a, b] \subset (w_-, w_+)$  então para todo  $(s, \eta, \lambda)$  suficientemente próximo de  $(t_0, x_0, \lambda_0)$  o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda) \\ x(s) = \eta, \end{cases} \quad (\text{PVI}_{\lambda, s, \eta})$$

tem uma solução  $x(t, s, \eta, \lambda)$  definida em  $[a, b]$  que é contínua em  $(t, t_0, x_0, \lambda_0)$ .

**Demonstração.** Obtém-se a solução  $x(t, s, \eta, \lambda)$  do (PVI <sub>$\lambda, s, \eta$</sub> ) definida em  $[a, b]$  seguindo a mesma idéia do Lema 1.6.4. A continuidade de  $x(t, s, \eta, \lambda)$  em  $(t_0, x_0, \lambda_0)$  uniformemente em  $t \in [a, b]$  segue do Lema 1.6.4.

Assim dado  $\epsilon > 0 \exists \delta_1 > 0$  tal que  $|x(t, s, \eta, \lambda) - x(t, t_0, x_0, \lambda_0)| < \frac{\epsilon}{2}$  se  $|(s, \eta, \lambda) - (t_0, x_0, \lambda_0)| < \delta_1, \forall t \in [a, b]$ .

Como  $t \rightarrow x(t, t_0, x_0, \lambda_0)$  é contínua existe  $\delta_2 > 0$  tal que se  $|t - \tau| < \delta_2$  então  $|x(t, s, \eta, \lambda) - x(\tau, t_0, x_0, \lambda_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ .

Se  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  então para  $(t, s, \eta, \lambda)$  satisfazendo  $|(t, s, \eta, \lambda) - (\tau, t_0, x_0, \lambda_0)| < \delta$  tem-se

$$\begin{aligned} |x(\tau, t_0, x_0, \lambda_0) - x(t, s, \eta, \lambda)| &\leq |x(\tau, t_0, x_0, \lambda_0) - x(t, t_0, x_0, \lambda_0)| \\ &\quad + |x(t, t_0, x_0, \lambda_0) - x(t, s, \eta, \lambda)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

**Observação:** Se  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua, localmente Lipschitziana e se para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  a solução do PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(a) = x_0, \end{cases} \quad (1.9)$$

está definida em  $[a, b]$ , então a aplicação  $x_0 \in \mathbb{R}^n \mapsto x(b, a, x_0) \in \mathbb{R}^n$  é um homeomorfismo.

Basta observar que sua inversa  $y_0 \in \mathbb{R}^n \mapsto x(a, b, y_0) \in \mathbb{R}^n$  também é contínua.

**Exercício 1.6.2.** *Seja  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e Lipschitziana. Mostre que o PVI  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ ,  $(t_0, x_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$  tem uma única solução definida em  $[a, b]$ , usando o método das aproximações sucessivas.*

## 1.7 Diferenciabilidade de ponto fixo com relação a parâmetros

Sejam  $X, Y$  espaços de Banach e  $\Omega \subset X$  um conjunto aberto.

**Definição 1.7.1** (Derivada de Frechet). *Seja  $f : \Omega \subset X \rightarrow Y$  uma função e  $x_0 \in \Omega$ . Dizemos que  $f$  é Frechet diferenciável em  $x_0$  se existe  $L \in \mathcal{L}(X, Y)$  tal que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)\|}{\|h\|} = 0, \quad \forall h \in X.$$

**Notação:**  $L = f'(x_0) = Df(x_0)$ .

**Definição 1.7.2.** *Se  $f : \Omega \subset X \rightarrow Y$  é diferenciável em todo  $x_0 \in \Omega$ , a aplicação*

$$\begin{aligned} Df : \Omega &\rightarrow \mathcal{L}(X, Y) \\ x &\mapsto Df(x) \end{aligned}$$

é chamada a derivada de Frechet de  $f$ . Além disso, se  $Df$  é uma aplicação contínua ( $\mathcal{L}(X, Y)$  tem a topologia da norma), dizemos que  $f$  é de classe  $C^1$  (ou continuamente diferenciável). Procedendo indutivamente definimos

$$D^r f := D(D^{r-1} f) : \Omega \rightarrow \mathcal{L}^r(X, Y)$$

se esta existe, onde temos identificado  $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}^{r-1}(X, Y))$  com  $\mathcal{L}^r(X, Y)$ . Se  $D^r f$  existe e é contínua, dizemos que  $f$  é de classe  $C^r$ .

**Exemplo 1.7.1.** Seja  $GL(X, Y) = \{T \in \mathcal{L}(X, Y) : T^{-1} \text{ existe}\}$  o grupo das transformações lineares inversíveis. Então a aplicação  $f : GL(X, Y) \rightarrow GL(X, Y)$  definida por  $f(T) = T^{-1}$  é diferenciável e  $f'(T)H = -T^{-1}HT^{-1}$  para toda  $H \in \mathcal{L}(X, Y)$ .

**Solução.** Observe que

$$\begin{aligned} f(T+H) - f(T) &= (T+H)^{-1} - T^{-1} = (T(I+T^{-1}H))^{-1} - T^{-1} \\ &= (I+T^{-1}H)^{-1}T^{-1} - T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-T^{-1}H)^n T^{-1} - T^{-1} \\ &= -T^{-1}HT^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-T^{-1}H)^n T^{-1}. \end{aligned}$$

Como

$$\left\| \sum_{n=2}^{\infty} (-T^{-1}H)^n \right\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \|T^{-1}H\|^n \leq \frac{\|T^{-1}\|^2 \|H\|^2}{1 - \|T^{-1}H\|},$$

temos que

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{\|f(T+H) - f(T) - (-T^{-1}HT^{-1})\|}{\|H\|} = 0.$$

□

**Definição 1.7.3** (Derivada de Gâteaux). Seja  $f : \Omega \subset X \rightarrow Y$  uma função,  $x_0 \in \Omega$  e  $v \in X$ . Dizemos que  $f$  é Gâteaux diferenciável em  $x_0$  na direção de  $v$  se existe o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} := \frac{\partial f}{\partial v}(x_0).$$

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$  também é chamada de derivada direcional ou parcial de  $f$  em  $x_0$  na direção de  $v$ .

**Exercício 1.7.1.** Sejam  $X, Y$  espaços de Banach,  $\mathcal{A} \subset X$  aberto e  $f : \mathcal{A} \mapsto Y$ . Supomos que para cada  $x_0$  em  $\mathcal{A}$  exista a derivada de Gâteaux:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} := w(x_0)h, \quad \forall x_0 \in \mathcal{A}, \forall h \in X$$

e que para cada  $x_0 \in \mathcal{A}$ ,  $w(x_0)$  seja linear e limitada de  $X$  em  $Y$  e que a aplicação  $w : \mathcal{A} \mapsto L(X, Y)$  é contínua. Prove que  $f$  é Frechet diferenciável com derivada  $w(x_0)$ .

**Exercício 1.7.2.** Em um espaço de Hilbert  $H$ , consideremos a função  $x_0 \mapsto \|x_0\|$ . Mostre que essa função é Frechet diferenciável e calcule sua derivada.

**Exemplo 1.7.2.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto Lebesgue mensurável e  $X = L^2(\Omega) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ é Lebesgue mensurável e } \int_{\Omega} \varphi^2(x) dx < \infty\}$ . A aplicação  $E : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $E(\varphi) = \int_{\Omega} F(\varphi(x)) dx$  onde  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $F' = f$  tem derivada de Gâteaux

$$\frac{\partial E}{\partial \psi}(\varphi) = \langle f(\varphi), \psi \rangle, \text{ onde } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ é o produto interno em } L^2(\Omega).$$

Solução. De fato,

$$\begin{aligned}\frac{E(\varphi + t\psi) - E(\varphi)}{t} &= \frac{1}{t} \left( \int_{\Omega} F(\varphi + t\psi) dx - \int_{\Omega} F(\varphi) dx \right) \\ &= \frac{1}{t} \left( \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{d}{ds} F(\varphi + st\psi) ds dx \right) \\ &= \int_{\Omega} \int_0^1 f(\varphi + st\psi) \psi ds dx.\end{aligned}$$

Fazendo  $t \rightarrow 0$  temos a derivada de Gâteaux de  $E$ ,

$$\frac{\partial E}{\partial \psi}(\varphi) = \int_{\Omega} f(\varphi(x)) \psi(x) dx = \langle f(\varphi), \psi \rangle.$$

□

**Observação:** Se  $f'(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$  existe então para cada  $h \in X$  temos que

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x_0) = f'(x_0)h.$$

**Exercício 1.7.3.** Se  $A \in L(X)$ ,  $X$  espaço de Banach e  $\|A\| < 1$ , então  $I - A$  é um operador inversível e  $\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$  e  $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ .

**Teorema 1.7.3.** Sejam  $F \subset A \subset X$ ,  $\Lambda \subset Y$ ,  $F$  fechado,  $A$  e  $\Lambda$  abertos. Supomos que  $T : A \times Y \rightarrow X$ ,  $(x, y) \mapsto T(x, y)$  é uma contração uniforme com constante  $\rho \in [0, 1)$ , relativamente a  $y \in \Lambda$ , que para cada  $x \in F$  a aplicação  $y \in \Lambda \mapsto T(x, y)$  é contínua, que  $T(F \times \Lambda) \subset F$  e que a aplicação  $(x, y) \in A \times \Lambda \mapsto T_x(x, y)$  exista e seja contínua. Essas hipóteses implicam que para cada  $y \in \Lambda$ , existe um único ponto fixo  $g(y)$  de  $T(\cdot, y)$ , com  $g$  contínua. Se para cada  $y_0 \in \Lambda$  a aplicação  $y \in \Lambda \mapsto T(g(y_0), y)$  é diferenciável e sua derivada é contínua em  $y_0$  então  $g \in C^1$  em  $\Lambda$  e  $g'(y) = (I - T_x(g(y), y))^{-1}T_y(g(y), y)$ .

**Demonstração.** Afirmamos que  $\|T_x(x, y)\| \leq \rho$ ,  $\forall (x, y) \in F \times \Lambda$ . De fato, como  $T_x(x, y)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(x + th, y) - T(x, y)}{t}$ . Vamos estimar  $\|T(x + th, y) - T(x, y)\|$ . Observe que

$$\|T(x + th, y) - T(x, y)\| \leq \rho |t| \|h\|.$$

Desta última desigualdade segue que  $\|T_x(x, y)h\| \leq \rho \|h\|$ . Logo,  $\|T_x(x, y)\| \leq \rho$ .

Vamos agora encontrar um candidato à derivada de  $g$ . Suponhamos por um momento que  $g$  seja  $C^1$ . Então como  $T(g(y), y) = g(y)$ , temos:

$$T_x(g(y), y) \cdot g'(y) + T_y(g(y), y) = g'(y).$$

Como  $\|T_x(g(y), y)\| \leq \rho < 1$  temos que existe  $(I - T_x(g(y), y))^{-1}$  (série de Neumann) e daí,  $g'(y) = [I - T_x(g(y), y)]^{-1}T_y(g(y), y)$ . Temos assim o candidato a derivada.

Seja  $R(h) \stackrel{\text{def}}{=} g(y + h) - g(y) - v h$ , onde  $v = [I - T_x(g(y), y)]^{-1}T_y(g(y), y)$ . Assim,  $v = T_x(g(y), y)v + T_y(g(y), y)$ . Temos que mostrar que  $R(h) = o(\|h\|)$ , isto é, que  $\frac{R(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$

quando  $h \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned}
R(h) &= T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y) - T_x(g(y), y)vh - T_y(g(y), y)h \\
&= T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y+h) - T_x(g(y), y)vh \\
&\quad + T(g(y), y+h) - T(g(y), y) - T_y(g(y), y)h \\
&= o(\|h\|) + \int_0^1 \frac{d}{d\theta} T(\theta g(y+h) + (1-\theta)g(y), y+h) d\theta - T_x(g(y), y)vh \\
&= o(\|h\|) + \int_0^1 T_x(\theta g(y+h) + (1-\theta)g(y), y+h) [g(y+h) - g(y)] d\theta - T_x(g(y), y)vh \\
&= o(\|h\|) + \int_0^1 T_x(\theta g(y+h) + (1-\theta)g(y), y+h) [g(y+h) - g(y) \mp vh] d\theta \\
&\quad - \int_0^1 T_x(g(y), y)vh d\theta \\
&= o(\|h\|) + \int_0^1 T_x(\theta g(y+h) + (1-\theta)g(y), y+h) R(h) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 [T_x(\theta g(y+h) + (1-\theta)g(y), y+h) - T_x(g(y), y)] vh \\
&= o(\|h\|) + \int_0^1 T_x(\theta g(y+h) + (1-\theta)g(y), y+h) R(h) d\theta.
\end{aligned}$$

Daí decorre que,

$$\begin{aligned}
\|R(h)\| &\leq o(\|h\|) + \int_0^1 \|T_x(\theta g(y+h) + (1-\theta)g(y), y+h)\| d\theta \|R(h)\| \\
&\leq o(\|h\|) + \rho \|R(h)\|.
\end{aligned}$$

Concluimos assim que  $R(h) = o(\|h\|)$  quando  $h \rightarrow 0$ . □

**Teorema 1.7.4.** *Se  $f(t, x, \lambda)$  tem derivadas contínuas até ordem 1 em  $x$ , para  $(t, x) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  e  $\lambda \in G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $G$  aberto, então a solução de (PVI $_\lambda$ ) é continuamente diferenciável com relação a  $(t, t_0, x_0, \lambda)$  no seu domínio.*

A matriz  $\frac{\partial}{\partial \lambda} x(t, t_0, x_0, \lambda)$  satisfaz

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{\partial}{\partial x} f(t, x(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)y + \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, x(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \\ y(t_0) = 0. \end{cases}$$



A matriz  $\frac{\partial}{\partial x_0}x(t, t_0, x_0, \lambda)$  satisfaz a equação variacional

$$\dot{y} = \frac{\partial}{\partial x}f(t, x(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)y.$$

Além disso,

$$\frac{\partial}{\partial t_0}x(t, t_0, x_0, \lambda) = -\frac{\partial}{\partial x_0}x(t, t_0, x_0, \lambda)f(t_0, x_0, \lambda).$$

**Demonstração.** Vamos aplicar o Teorema de diferenciabilidade do ponto fixo com relação a parâmetros para

$$\phi(t) = (T\phi)(t) = T(\phi, (t_0, x_0, \lambda))(t) := \int_{t_0}^{t_0+t} f(s, \phi(s - t_0) + x_0, \lambda)ds.$$

Como já foi visto anteriormente  $T$  é uma contração uniforme.

Agora

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial x_0}\right) &= \int_{t_0}^{t_0+(\cdot)} f_x(s, \phi(s - t_0) + x_0, \lambda)ds \\ \left(\frac{\partial T}{\partial \lambda}\right) &= \int_{t_0}^{t_0+(\cdot)} f_\lambda(s, \phi(s - t_0) + x_0, \lambda)ds \\ \left(\frac{\partial T}{\partial \phi}\psi\right) &= \int_{t_0}^{t_0+(\cdot)} f_x(s, \psi(s - t_0) + x_0, \lambda) \phi(s)ds \\ \left(\frac{\partial T}{\partial t_0}\right) &= - \int_{t_0}^{t_0+(\cdot)} f_x(s, \phi(s - t_0) + x_0, \lambda)\dot{\phi}(s - t_0)ds + f(t_0 + (\cdot), \phi(\cdot) + x_0, \lambda) \\ &\quad - f(t_0, \phi(0) + x_0, \lambda) \end{aligned}$$

Observamos que na última derivada aparece o termo  $\dot{\phi}(s - t_0)$ , que faz sentido, pois  $\phi$  é de classe  $C^1$ , pois é ponto fixo do operador acima.

Seja  $(t_0, x_0, \lambda_0)$  fixado e  $\phi = \phi_{(t_0, x_0, \lambda_0)}$  o ponto fixo. Para verificar as condições do Teorema 1.7.3, basta observar que as aplicações abaixo são contínuas no ponto  $(t_0, x_0, \lambda_0)$ .

$$\begin{aligned}
(t_1, x_1, \lambda_1) &\mapsto \int_{t_1}^{t_1+(\cdot)} f_x(s, \phi(s - t_1) + x_1, \lambda_1) d\tau \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, C([- \alpha, \alpha], \mathbb{R}^n)) \\
(t_1, x_1, \lambda_1) &\mapsto \int_{t_1}^{t_1+(\cdot)} f_\lambda(s, \phi(s - t_1) + x_1, \lambda_1) d\tau \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, C([- \alpha, \alpha], \mathbb{R}^n)) \\
(t_1, x_1, \lambda_1) &\mapsto \int_{t_1}^{t_1+(\cdot)} f_x(s, \phi(s - t_1) + x_1, \lambda_1) (\cdot) d\tau \in \mathcal{L}(C([- \alpha, \alpha], \mathbb{R}^n), C([- \alpha, \alpha], \mathbb{R}^n)) \\
(t_1, x_1, \lambda_1) &\mapsto - \int_{t_1}^{t_1+(\cdot)} f_x(s, \phi(s - t_1) + x_1, \lambda_1) \dot{\phi}(s - t_1) ds + f(t_1 + (\cdot), \phi(\cdot) + x_1, \lambda) \\
&\quad - f(t_1, \phi(0) + x_1, \lambda) \in C([- \alpha, \alpha], \mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Podemos utilizar o Teorema da diferenciabilidade do ponto fixo com relação a parâmetros e concluir a diferenciabilidade de

$$(t_0, x_0, \lambda) \mapsto \phi_{(t_0, x_0, \lambda)} \in C([- \alpha, \alpha], \mathbb{R}^n).$$

Como  $\phi$  é ponto fixo do operador acima, concluímos que  $(t, t_0, x_0, \lambda) \mapsto \phi_{(t_0, x_0, \lambda)}(t)$  é diferenciável. Concluímos assim que  $x(t, t_0, x_0, \lambda) = \phi(t - t_0, t_0, x_0, \lambda) + x_0$  é diferenciável.

Como  $x(t, t_0, x_0, \lambda) = x(t, t_0 + \alpha, x(t_0 + \alpha, t_0, x_0, \lambda), \lambda)$  podemos, por um argumento recursivo, concluir a diferenciabilidade para todo  $t$  em que  $x(t, t_0, x_0, \lambda)$  esteja definida.

As outras fórmulas seguem por simples derivação. Por exemplo  $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0, \lambda)$  segue derivando  $x(t, t_0, x_0, \lambda) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s, t_0, x_0), \lambda) ds$ .  $\square$

**Exercício 1.7.4.** Na equação de Lorenz, dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -r + rx - xz \\ \dot{z} &= bz + xy \end{cases}$$

verifique se vale a continuidade com relação as condições iniciais e parâmetros. Observe que o caso  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  e  $b = 8/3$  é considerado caótico.

## 1.8 Dependência contínua e estabilidade

Seja  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um função contínua. Suponhamos que para todo  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tem uma única solução não continuável. Suponhamos também que  $f(t, 0) = 0$ . Deste último fato segue que  $x(t) \equiv 0$  é solução da equação.

Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  do Teorema de continuidade com relação as condições iniciais segue que, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$ ,  $\delta = \delta(\epsilon, a, b)$  tal que se  $|x_0| < \delta$  então  $x(t, a, x_0)$  está definida em  $[a, b]$  e  $|x(t, a, x_0)| < \epsilon$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .

□

Figura 1.18: Dependência Contínua

Consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = c. \end{cases} \quad (1.10)$$

A solução do PVI (1.10) é dada por  $x(t, 0, c) = \frac{c}{1 - ct}$  para  $t \in [0, \frac{1}{c})$ .

Dado  $b > 0$ , para  $c$  suficientemente pequeno  $x(t, 0, c)$  está definida em  $[a, b]$ .

Além disso dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta = \delta(\epsilon, b) > 0$  tal que se  $|c| < \delta$  então  $x(t, 0, c) < \epsilon$ ,  $t \in [0, b]$ .

Mas neste exemplo as soluções que começam perto de zero, não ficam próximo de zero o tempo todo.

Figura 1.19: Gráfico de  $x(t, 0, c)$ 

Assim sendo o Teorema de continuidade com relação às condições iniciais só dá informação em intervalos finitos.

O próximo conceito é introduzido para podermos falar em continuidade com relação a  $x_0$  em intervalos infinitos.

## 1.9 Estabilidade no sentido de Liapunov

Seja  $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua tal que o seguinte problema de valor inicial tem uma única solução

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

para todo  $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ . Seja  $\varphi(t)$  solução definida para  $t \geq 0$ .

**Definição 1.9.1.** Dizemos que  $\varphi$  é estável se dados  $\epsilon > 0$ ,  $t_0 \geq 0$ , existe  $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$  tal que se  $|x_0 - \varphi(t_0)| < \delta$  então  $x(t, t_0, x_0)$  está definida para  $t \geq t_0$  e  $|x(t, t_0, x_0) - \varphi(t)| < \epsilon$ ,  $\forall t \geq t_0$ .

Figura 1.20: Estabilidade de  $\varphi$ .

Mostraremos a seguir que não haverá perda de generalidade, se estudarmos a estabilidade da solução nula. De fato, se  $\dot{x} = f(t, x)$ , fazendo a mudança de variável  $x = \varphi(t) + z$  temos

$$f(t, \varphi(t) + z) = \dot{x} = \dot{\varphi} + \dot{z} = f(t, \varphi(t)) + \dot{z}.$$

Logo  $\dot{z} = f(t, \varphi(t) + z) - f(t, \varphi(t)) \stackrel{\text{def}}{=} F(t, z)$  com  $F(t, 0) = 0$ .

Assim a estabilidade da solução  $\varphi(t)$  de  $\dot{x} = f(t, x)$  é equivalente à estabilidade da solução nula de  $\dot{z} = F(t, z)$ .

**Definição 1.9.2.**  $x \equiv 0$  é estável (**S**) se dados  $\epsilon > 0$ ,  $t_0 \geq 0$  existir  $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$  tal que se  $|x_0| < \delta$  então  $x(t, t_0, x_0)$  está definida em  $[t_0, \infty)$  e  $|x(t, t_0, x_0)| < \epsilon$ , para todo  $t \geq t_0$ .

**Definição 1.9.3.**  $x \equiv 0$  é uniformemente estável (**US**) se for estável com  $\delta = \delta(\epsilon)$  (independente de  $t_0$ ).

**Definição 1.9.4.**  $x \equiv 0$  é assintoticamente estável (**AS**) se for estável e se dado  $t_0 \geq 0$  existir  $\rho = \rho(t_0) > 0$  tal que se  $|x_0| < \rho$  então  $x(t, t_0, x_0) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Definição 1.9.5.**  $x \equiv 0$  é uniformemente assintoticamente estável (**UAS**) se for uniformemente estável e se for assintoticamente estável com  $\rho$  independente de  $t_0 \geq 0$  e se para cada  $\eta > 0$  existir  $T = T(\eta) > 0$  tal que se  $|x_0| < \rho$  então  $|x(t, t_0, x_0)| < \eta$  para todo  $t \geq t_0 + T$ .

Figura 1.21:  $x \equiv 0$  uniforme assintoticamente estável.

**Definição 1.9.6.** Dizemos que uma solução é instável se não for estável.

**Exemplo 1.9.1.** *Construído por Vinograd (1957), o sistema:*

$$\dot{x} = \frac{x^2(y-x) + y^5}{(x^2 + y^2)(1 + (x^2 + y^2)^2)}, \quad \dot{y} = \frac{y^2(y-2x)}{(x^2 + y^2)(1 + (x^2 + y^2)^2)};$$

é instável em  $x \equiv 0$ .

Figura 1.22: Sistema de Vinograd

**Lema 1.9.2.** *Se  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  for periódica em  $t$  ou independente de  $t$  (caso autônomo) então  $x \equiv 0$  é **S (A.S)** se, e somente se, é **US (UAS)**.*

**Demonstração.** (**S**  $\Rightarrow$  **US**). Durante esta demonstração, utilizaremos que  $x(t+w, t_0+w, x_0) = x(t, t_0, x_0)$ . Isto decorre do fato que ambas são soluções do P.V.I. e da unicidade. Suponhamos que  $f(t+w, x) = f(t, x)$ ,  $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $w > 0$ . Da estabilidade segue que  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0$ ,  $\delta_1 < \epsilon$  tal que se  $|x_0| < \delta_1$  então  $|x(t, t_0, x_0)| < \epsilon$ ,  $t \geq w$ . Do Teorema da continuidade com relação as condições iniciais segue que existe  $\delta = \delta(\delta_1) > 0$  tal que para  $|x_0| < \delta$ ,  $t_0 \in [0, w]$  implica que  $|x(t, t_0, x_0)| < \delta_1$ ,  $t \in [0, w]$ .

Figura 1.23:  $t_0 \in [0, \omega]$

Daí  $|x(t, t_0, x_0)| < \epsilon$ , para todo  $t \geq t_0$ .

Se  $t_0 > w$  então existe  $\bar{t} \in [0, w]$  tal que  $t_0 = \bar{t} + mw$ . Observe que  $t \geq t_0$  pode ser escrito da seguinte forma  $t = s + mw$ , onde  $s = t - mw$ .

Se  $t \geq t_0$ , isto é, se  $s + mw \geq \bar{t} + mw$  temos que  $s \geq \bar{t}$ . Assim, se  $|x_0| < \delta$  então para  $t \geq t_0$  temos  $|x(t, t_0, x_0)| = |x(s + mw, \bar{t} + mw, x_0)| = |x(s, \bar{t}, x_0)| < \epsilon$ . Logo temos **US**.

Figura 1.24: AS implica UAS

**(AS  $\Rightarrow$  UAS).** Provemos inicialmente que na definição de Estabilidade Assintótica é possível encontrar  $\rho > 0$  independente de  $t_0$ .

Tomando  $t_0 = 0$ , existe  $\nu > 0$  tal que se

$$|x_0| < \nu \Rightarrow x(t, 0, x_0) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty \quad (1.11)$$

Do Teorema da Continuidade com relação às condições iniciais segue que existe  $\rho > 0$ ,  $\rho < \nu$ , tal que se

$$|x_0| < \rho, t_0 \in [0, \omega] \Rightarrow |x(0, t_0, x_0)| < \nu \quad (1.12)$$

e de (1.11),  $x(t, t_0, x_0) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Figura 1.25:  $t_0 = \bar{t} + m\omega$ 

Tomemos agora  $t_0 > \omega$ ,  $|x_0| < \rho$ . Então existe inteiro  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $t_0 \in [m\omega, (m+1)\omega]$  e daí decorre que existe  $\bar{t} \in [0, \omega]$ , tal que  $t_0 = \bar{t} + m\omega$ . Dado  $t \geq t_0$ , existe  $s \geq \bar{t}$  tal que  $t = s + m\omega$ .

Como  $x(t, t_0, x_0) = x(s + m\omega, \bar{t} + m\omega, x_0) = x(s, \bar{t}, x_0)$  e  $|x(\bar{t}, \bar{t}, x_0)| = |x_0| < \rho$  então  $x(t, \bar{t}, x_0) \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ , o que implica que  $x(t, t_0, x_0) \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . Conseguimos assim encontrar  $\rho$  independente de  $t_0$ .

Passemos para a segunda hipótese de **UAS**. Dividimos em etapas.

**Afirmção (A)** : *Existe  $\mu > 0$ ,  $\mu < \rho$ , tal que, dados  $\epsilon > 0$ ,  $t_0 \geq 0$  arbitrários, existe  $T = T(\epsilon) > 0$  tal que se  $|x_0| < \mu$  então  $|x(t, t_0, x_0)| < \epsilon$  para todo  $t \geq t_0 + T(\epsilon)$ .*

Entretanto, primeiro provaremos que: **(B)** *Se  $|x_0| < \frac{\rho}{2}$ , dado  $\epsilon > 0$  existe  $T = T(\epsilon)$  tal que  $|x(t, 0, x_0)| < \epsilon$ , para todo  $t \geq T(\epsilon)$ .* De fato:

**US** implica que existe  $\delta = \delta(\epsilon) < \epsilon$  tal que:

$$|x_0| < \delta, t_0 \geq 0 \Rightarrow |x(t, t_0, x_0)| < \epsilon, \forall t \geq t_0 \quad (1.13)$$

Sabemos que se  $|x_0| < \rho$  então  $|x(t, 0, x_0)| \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow +\infty$ . Daí segue que existe  $T(\epsilon, x_0)$  tal que se

$$|x_0| < \rho, t \geq T(\epsilon, x_0) \Rightarrow |x(t, 0, x_0)| < \frac{\delta}{2} \quad (1.14)$$

Em particular de (1.13) temos,

$$|x_0| < \rho \Rightarrow |x(T(\epsilon, x_0), 0, x_0)| < \frac{\delta}{2} \Rightarrow |x(t, 0, x_0)| < \epsilon, t \geq T(\epsilon, x_0) \quad (1.15)$$

Do Teorema da continuidade com relação às condições iniciais segue que para cada  $x_0 \in \bar{B} = \bar{B}_{\rho/2}(0)$  existe  $\beta(x_0, \epsilon) > 0$  tal que se

$$|x_1 - x_0| < \beta(x_0, \epsilon) \Rightarrow |x(T(\epsilon, x_0), 0, x_1) - x(T(\epsilon, x_0), 0, x_0)| < \frac{\delta}{2} \text{ e daí,}$$

$$|x(T(\epsilon, x_0), 0, x_1)| \leq |x(T(\epsilon, x_0), 0, x_1) - x(T(\epsilon, x_0), 0, x_0)| + |x(T(\epsilon, x_0), 0, x_0)| < \delta$$

e então de (1.13) decorre que  $|x(t, 0, x_1)| < \epsilon$ , para  $t \geq T(\epsilon, x_0)$ .

A coleção de abertos  $\{B_{\beta(x_0, \epsilon)}(x_0) : x_0 \in \bar{B}\}$  é um recobrimento de  $\bar{B}$ . Logo existe subrecobrimento  $\{B_{\beta(x_i, \epsilon)}(x_i) : i = 1, \dots, n\}$ . Seja  $T(\epsilon) = \max_{i=1, \dots, n} T(x_i, \epsilon)$ .

Seja  $x_0$  tal que  $|x_0| < \rho/2$ . Então existe  $x_i$  tal que  $x_0 \in B_{\beta(x_i, \epsilon)}(x_i)$  e daí  $|x(t, 0, x_0)| < \epsilon$ ,  $t \geq T(\epsilon)$ . Concluimos que

$$|x_0| < \rho/2, t \geq T(\epsilon) \Rightarrow |x(t, 0, x_0)| < \epsilon, \quad (1.16)$$

e assim a afirmação **(B)** está justificada.

Como a aplicação  $(t_0, x_0) \in [0, \omega] \times \overline{B} \mapsto x(0, t_0, x_0)$  é uniformemente contínua, temos que existe  $\mu > 0$ ,  $\mu < \frac{\rho}{2}$  tal que se  $t_0 \in [0, \omega]$  e  $|x_0| < \mu$  então  $|x(0, t_0, x_0)| < \rho/2$  e daí  $|x(t, t_0, x_0)| < \epsilon$ ,  $t \geq T(\epsilon)$ .

Concluimos assim que

$$t_0 \in [0, \omega], |x_0| < \mu, t \geq T(\epsilon) \Rightarrow |x(t, t_0, x_0)| < \epsilon \quad (1.17)$$

Mostraremos a seguir que se  $t_0 > \omega$ ,

$$|x_0| < \mu, t \geq t_0 + T(\epsilon) \Rightarrow |x(t, t_0, x_0)| < \epsilon. \quad (1.18)$$

De fato, se  $t_0 > \omega$ , existe  $\tilde{t} \in [0, \omega]$  tal que  $t_0 = \tilde{t} + m\omega$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Observe que  $t = s + m\omega$ , onde  $s = t - m\omega$ . Assim se  $t = s + m\omega \geq t_0 + T(\epsilon) = \tilde{t} + m\omega + T(\epsilon)$  tem-se que  $s \geq \tilde{t} + T(\epsilon) \geq T(\epsilon)$ .

Assim se  $|x_0| < \mu$  de (1.17) obtém-se:

$$|x(t, t_0, x_0)| = |x(s + m\omega, \tilde{t} + m\omega, x_0)| = |x(s, \tilde{t}, x_0)| < \epsilon \quad \text{para } t \geq t_0 + T(\epsilon).$$

Concluimos assim que:

$$t_0 \geq 0, |x_0| < \mu, t \geq t_0 + T(\epsilon) \Rightarrow |x(t, t_0, x_0)| < \epsilon \quad (1.19)$$

Daí decorre que a afirmação **(A)** está satisfeita.  $\square$





# Sistemas autônomos: generalidades

## 2.1 Preliminares

Consideremos o sistema

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.1)$$

onde  $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função contínua. Se  $x(t)$  é solução em  $(a, b)$ , definimos sua trajetória  $\gamma(x)$  como sendo o conjunto

$$\gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{a < t < b} \{(t, x(t))\} = \{(t, x(t)) : t \in (a, b)\}.$$

A *órbita* de uma trajetória é a projeção da trajetória sobre o  $\mathbb{R}^n$ ; isto é, é o conjunto  $\{x(t) : t \in (a, b)\}$ . O espaço das variáveis dependentes em (2.1) é chamado de *espaço de estados* ou *espaço de fase*.

O sistema (2.1) é chamado *autônomo* se  $f$  é independente de  $t$ , isto é,  $f(t, x) = f(x)$ .

Neste capítulo vamos considerar sistemas autônomos; isto é, sistemas da forma

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.2)$$

onde  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função contínua e  $\Omega$  é um conjunto aberto.

**Afirmção.** Se  $x(t)$  é solução de (2.2) em  $(a, b)$  com  $x(t_0) = x_0$  e  $\tau \in \mathbb{R}$  então  $x(t - \tau)$  é solução de (2.2) em  $(a + \tau, b + \tau)$  com  $x(t_0 + \tau) = x_0$ . De fato, seja  $y(t) = x(t - \tau)$ . Facilmente vemos que

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t - \tau) = f(x(t - \tau)) = f(y(t))$$

e  $y(t_0 + \tau) = x(t_0 + \tau - \tau) = x_0$ .

Suponhamos agora que por cada ponto  $p \in \Omega$  exista uma única solução (não continuável) do PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = p. \end{cases} \quad (2.3)$$

Denotemos por  $\phi(t, p)$  esta solução.

A função  $\phi$  está definida em um aberto  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  e satisfaz as seguintes propriedades:

- (1)  $\phi(0, p) = p$
- (1)  $\phi(t, p)$  é contínua em  $\Sigma$
- (1)  $\phi(t + \tau, p) = \phi(t, \phi(\tau, p))$  em  $\Sigma$ .

De fato, a propriedade (2) segue da continuidade com relação às condições iniciais e (3) segue da unicidade, pois ambas são soluções que valem  $\phi(\tau, p)$  para  $t = 0$

Se  $p \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $\phi(t, p)$  está definida em  $(a, b)$  (intervalo maximal de existência) então indicaremos a órbita de  $\phi(t, p)$  por  $\gamma(p) = \{\phi(t, p) : t \in (a, b)\}$ .

Assim  $\phi(t, p)$  e  $\phi(t - \tau, p)$  são parametrizações da mesma órbita.

**Propriedades:**

1.  $q \in \gamma(p) \Leftrightarrow \gamma(p) = \gamma(q)$ . De fato,  $q \in \gamma(p) \Leftrightarrow$  existe  $\tau$  tal que  $\phi(\tau, p) = q$  então  $\phi(t, q) = \phi(t, \phi(\tau, p)) = \phi(t + \tau, p) \Leftrightarrow \gamma(p) = \gamma(q)$ .
2.  $\gamma(p) \cap \gamma(q) \neq \emptyset \Rightarrow \gamma(p) = \gamma(q)$ . De fato, seja  $r \in \gamma(p) \cap \gamma(q) \stackrel{(1)}{=} \gamma(p) = \gamma(r) = \gamma(q)$ .

**Definição 2.1.1.** O ponto  $p$  é chamado de ponto crítico ou ponto de equilíbrio de  $\dot{x} = f(x)$  se  $f(p) = 0$ . ( $x(t) = p$  é solução de (2.2)).

**Definição 2.1.2.**  $p$  é chamado ponto regular se  $f(p) \neq 0$ .

## 2.2 Retrato de fase

**Definição 2.2.1.** O conjunto  $\Omega$ , munido da decomposição em órbitas de (2.2) chama-se retrato de fase da equação (2.2).

$\mathbb{R}^n$  é chamado o espaço de fase da equação (2.2).

**Teorema 2.2.1.** Se  $\varphi$  é solução não continuável de (2.2) então uma das condições a seguir verifica-se:

- (a)  $\varphi$  é 1-1
- (b)  $(a, b) = \mathbb{R}$  e  $\varphi$  é constante
- (c)  $(a, b) = \mathbb{R}$  e  $\varphi$  é periódica (não constante), isto é existe  $\tau > 0$  tal que  $\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  (órbita fechada difeomorfa a um círculo) e  $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$  se  $|t_1 - t_2| < \tau$ .

**Demonstração.** Suponhamos que  $\varphi$  não seja 1-1. Logo existem  $t_1 < t_2$  tal que  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ . Então  $\varphi(t + (t_2 - t_1)) = \varphi(t)$  pois temos duas soluções que coincidem para  $t = t_1$ . Logo  $(a, b) = \mathbb{R}$  e  $\varphi(t + c) = \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}$ , onde  $c = t_2 - t_1$ .

Definamos o conjunto  $\mathcal{P} = \{T \in \mathbb{R} : \varphi(t + T) = \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$ .

•  $\mathcal{P}$  é subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}$ . De fato, se  $T_1, T_2 \in \mathcal{P} \Rightarrow \varphi(t + T_1 + T_2) = \varphi(t + T_1) = \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}$ . Logo  $T_1 + T_2 \in \mathcal{P}$ .

Se  $T \in \mathcal{P} \Rightarrow \varphi(t - T) = \varphi(t - T + T) = \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}$ . Logo  $-T \in \mathcal{P}$ .

•  $\mathcal{P}$  é fechado em  $\mathbb{R}$ . De fato, seja  $\{T_n\} \subset \mathcal{P}$  tal que  $T_n \xrightarrow{\mathbb{R}} T$ . Como  $T_n \in \mathcal{P}$ , temos que  $\varphi(t + T_n) = \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ . Então  $\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t + T_n) = \varphi(t + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n) = \varphi(t + T), \forall t \in \mathbb{R}$ . Logo  $\varphi(t + T) = \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}$ .

Como todo subgrupo aditivo  $\neq \{0\}$  de  $\mathbb{R}$  é da forma  $\tau\mathbb{Z}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  ou é denso em  $\mathbb{R}$ , temos que ou  $\mathcal{P} = \tau\mathbb{Z}$  ou  $\mathcal{P} = \mathbb{R}$ , o que corresponde às condições (c) e (b) respectivamente.  $\square$

**Lema 2.2.2.** *Todo subgrupo aditivo  $C$  não nulo de  $\mathbb{R}$ , é da forma  $C = \tau\mathbb{Z}$ , com  $\tau > 0$  ou é denso em  $\mathbb{R}$ .*

**Demonstração.** Sendo  $C \neq \{0\}$  seja  $\tau = \inf C \cap (0, \infty)$ . Se  $\tau > 0$ , afirmamos que  $\tau \in C$ .

Se isso não ocorresse existiriam  $\mu < \nu$  suficientemente próximos de zero tal que  $0 < \nu - \mu < \tau$  com  $\tau + \mu, \tau + \nu \in C$  e daí  $\tau + \nu - (\tau + \mu) = \nu - \mu \in C$ . Isso contraria que  $\tau = \inf C \cap (0, \infty)$ .

Afirmamos agora que  $C = \tau\mathbb{Z}$ . É claro que  $\tau\mathbb{Z} \subset C$ . Suponhamos agora que existe em  $C$  elemento da forma  $\tau\xi$  com  $\xi \notin \mathbb{Z}$ . Então existe um único  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $k < \xi < k + 1$ . Daí segue que  $k\tau < \xi\tau < \tau k + \tau$ . Assim,  $0 < \xi\tau - k\tau < \tau$ . Como  $\xi\tau - k\tau \in C$  caímos numa contradição. Logo  $C = \tau\mathbb{Z}$ .

Suponhamos agora que  $\tau = 0$ . Garantimos que neste caso  $C$  é denso em  $\mathbb{R}$ .

Seja  $d \in \mathbb{R}$ . Sem perda de generalidade podemos supor  $d > 0$ .

Fixemos  $\epsilon > 0$  e tomemos  $\delta \in C$  tal que  $0 < \delta < \epsilon$ . Seja  $m = \inf\{n \in \mathbb{Z}^+ : n\delta > d - \epsilon\}$ . Na verdade  $m$  é o mínimo desse conjunto. Então, temos que  $d - \epsilon < m\delta$ . Mas  $(m - 1)\delta \leq d - \epsilon$  implica que  $m\delta \leq d - \epsilon + \delta < d + \epsilon$ . Isso implica que  $C$  é denso em  $\mathbb{R}$ , pois  $d - \epsilon < m\delta < d + \epsilon$ .  $\square$

**Exemplo 2.2.3.** *A equação escalar  $\dot{x} = x$ , tem um único ponto crítico  $x = 0$ .*

*A solução que passa por  $(0, p)$  é dada por  $\phi(t, p) = e^t p$ . A trajetória pelo ponto  $p$  é dada pelo conjunto  $\{(t, \phi(t, p)) : t \in \mathbb{R}\}$ . As órbitas através do ponto  $p$  são dadas por*

$$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \text{ se } p > 0$$

$$\{x \in \mathbb{R} : x = 0\} \text{ se } p = 0$$

$$\{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \text{ se } p < 0.$$

**Fazer um gráfico das trajetórias, órbitas e o retrato de fase**

**Exemplo 2.2.4.** *A equação escalar*

$$\dot{x} = -x(1 - x) \tag{2.4}$$

Figura 2.1: ???

tem os seguintes os pontos críticos  $x = 0$  e  $x = 1$ .

A solução que passa por  $(0, p)$  é dada por  $\phi(t, p) = \frac{pe^{-t}}{1 - p + pe^{-t}}$  e a trajetória através do ponto  $p$  é o conjunto  $\{(t, \phi(t, p)) : t \in (a, b)\}$ . As órbitas através do ponto  $p$  são dadas por

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \text{ se } p > 1 \\ &\{x \in \mathbb{R} : x = 1\} \text{ se } p = 1 \\ &\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\} \text{ se } 0 < p < 1 \\ &\{x \in \mathbb{R} : x = 0\} \text{ se } p = 0 \\ &\{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \text{ se } p < 0. \end{aligned}$$

Fazer um gráfico das trajetórias, órbitas e o retrato de fase

Figura 2.2: Retrato de fase de (2.4)

**Exemplo 2.2.5.** A equação escalar  $\ddot{y} + y = 0$  é equivalente ao seguinte sistema linear de primeira ordem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases} \quad (2.5)$$

A solução que passa por  $(0, p)$  onde  $p = (a, b)$  é dada por  $\phi(t, p) = (\varrho \sin(t + \vartheta), \varrho \cos(t + \vartheta))$  onde  $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$  and  $\vartheta = \arctg(a/b)$  e a trajetória através do ponto  $p$  é o conjunto  $\{(t, \phi(t, p)) : t \in \mathbb{R}\} = \{(t, \varrho \sin(t + \vartheta), \varrho \cos(t + \vartheta)) : t \in \mathbb{R}\}$ .

Observe que qualquer trajetória está dentro de um cilindro circular de raio  $\varrho$  e a órbita de qualquer ponto  $p$  é um círculo que passa por este ponto com centro na origem. A origem  $(0, 0)$  é o único ponto de equilíbrio e toda vizinhança deste ponto contém uma órbita a qual é uma curva fechada (solução periódica).

Neste caso a origem é chamada de centro. Assim a solução  $x_1 = x_2 = 0$  nula deste exemplo é um centro.

Figura 2.3: Retrato de fase de (2.5)

**Exemplo 2.2.6.** *Sejam  $\epsilon > 0$  e  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ . Consideremos o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + \epsilon x_1(1 - r^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + \epsilon x_2(1 - r^2). \end{cases} \quad (2.6)$$

*Usando coordenadas polares o sistema (2.6) é equivalente ao seguinte sistema*

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 \\ \dot{r} = \epsilon r(1 - r^2). \end{cases} \quad (2.7)$$

*De fato, multiplicando por  $x_1$  a primeira e por  $x_2$  a segunda equação em (2.6) e somando temos*

$$\begin{aligned} x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 &= \epsilon(x_1^2 + x_2^2)(1 - r^2) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right) &= \epsilon r^2(1 - r^2) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\right) &= \epsilon r^2(1 - r^2) \\ \dot{r} &= \epsilon r(1 - r^2). \end{aligned}$$

*Por outro lado como  $\operatorname{tg} \theta = \frac{x_2}{x_1}$ . Derivando com relação a  $t$  esta última igualdade temos*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\operatorname{tg} \theta) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \\ \sec^2 \theta \dot{\theta} &= \frac{x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2}{x_1^2} \\ \sec^2 \theta \dot{\theta} &= \frac{r^2}{x_1^2} = \frac{r^2}{r^2 \cos^2 \theta} \\ \sec^2 \theta \dot{\theta} &= \sec^2 \theta \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned}$$

*Da primeira equação de (2.7) temos  $\theta(t) = t$ . A segunda equação de (2.7) nos dá que*

$$\begin{aligned} dr &= \epsilon r(1 - r^2)dt \\ \frac{dr}{r(1 - r^2)} &= \epsilon dt \\ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - r} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + r}\right) dr &= \epsilon dt \\ \ln r^2 - \ln(1 - r^2) &= 2\epsilon t \\ \ln \frac{r^2}{1 - r^2} &= 2\epsilon t \\ r &= \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\epsilon t}}}. \end{aligned}$$

No sistema (2.7)  $r = 0$  e  $r = 1$  são os pontos de equilíbrio que correspondem no sistema (2.6) a  $(0, 0)$  e  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  (circunferência).

Figura 2.4: Retrato de fase de (2.6)

## 2.3 Conjuntos limites

Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  aberto,  $f$  contínua. Assumimos que  $f$  seja tal que valha unicidade de solução para o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = p, \quad \forall p \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.8)$$

Indicamos por  $\phi(t, p)$  essa solução,  $\gamma(p)$  sua órbita e  $\gamma_+(p) = \{\phi(t, p) : t \geq 0\}$  sua semi-órbita positiva. Analogamente define-se  $\gamma_-(p)$ .

**Conjunto  $\omega$ -limite ( $\alpha$ -limite).** Seja  $\phi(t) = \phi(t, p)$  a solução de (2.8) que passa pelo ponto  $p$  e está definida para todo  $t \geq 0$ . Definimos

$$\omega(p) = \{q \in \mathbb{R}^n : \exists (t_n) \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \phi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Analogamente se  $\phi(t)$  está definida para  $t \leq 0$  define-se o conjunto

$$\alpha(p) = \{q \in \mathbb{R}^n : \exists (t_n) \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \phi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Os conjunto  $\omega(p)$  e  $\alpha(p)$  são chamados respectivamente de *conjunto  $\omega$ -limite* e *conjunto  $\alpha$ -limite* de  $p$ .

Também definimos  $\omega(\gamma) = \{\omega(p) : p \in \gamma\}$ . Analogamente define-se  $\alpha(\gamma)$ .

**Exemplo 2.3.1.** Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y. \end{cases} \quad (2.9)$$

Neste caso temos  $f(x, y) = (x, -y)$  e  $(x, y) = (0, 0)$  é o único ponto de equilíbrio de (2.9).

A solução de (2.9) com  $x(0) = p = (x_0, y_0)$  é dada por  $\phi(t) = \phi(t, p) = (x_0 e^t, y_0 e^{-t})$ . A trajetória que passa por  $p$  é dada por  $\{(t, \phi(t, p)) : t \in \mathbb{R}\}$ . A órbita que passa por  $p$  é dada por  $\{\phi(t, p) = (x_0 e^t, y_0 e^{-t}) = (x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\}$  satisfaz  $xy = x_0 y_0$ .

Colocar aqui o retrato de fase

**Exemplo 2.3.2.** *Consideremos o seguinte sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases} \quad (2.10)$$

Neste caso temos  $f(x, y) = (-x + y, -x - y)$  e  $(x, y) = (0, 0)$  é o único ponto de equilíbrio de (2.10). A solução de (2.10) que passa por  $p = (a, b)$  é dada por

$$\phi(t, p) = (ae^{-t} \cos t + be^{-t} \sin t, -ae^{-t} \sin t + be^{-t} \cos t).$$

A trajetória que passa por  $p$  é dada por  $\{(t, \phi(t, p)) : t \in \mathbb{R}\}$ . A órbita que passa por  $p$  é dada por  $\{\phi(t, p) = e^{-t}(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) : t \in \mathbb{R}\}$  a qual é uma elipse que se aproxima à origem.

Figura 2.5: Retrato de fase de (2.10)

**Exemplo 2.3.3.** Dado  $\epsilon > 0$  e  $r^2 = x^2 + y^2$ . Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \epsilon x(1 - r^2) \\ \dot{y} = x + \epsilon y(1 - r^2). \end{cases} \quad (2.11)$$

Em coordenadas polares é equivalente a

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 \\ \dot{r} = \epsilon r(1 - r^2). \end{cases} \quad (2.12)$$

$R(t) = (r(t), \theta(t)) = (1, t)$  é uma solução de (2.12) conseqüentemente uma solução de (2.11). Para ver os conjuntos  $\omega$  e  $\alpha$ -limite ver o Exemplo 2.2.6.

**Exemplo 2.3.4.** Consideremos  $r$  e  $\theta$  como sendo as coordenadas polares as quais satisfazem

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \sin^2 \theta + (1 - r)^3 \\ \dot{r} = r(1 - r). \end{cases} \quad (2.13)$$

O conjunto limite de todas as órbitas as quais não estão nos conjuntos  $\{r = 1\}$  e  $\{r = 0\}$  é a circunferência  $\{r = 1\}$ . A circunferência  $\{r = 1\}$  é invariante mas as órbitas da equação em  $r = 1$  consistem dos pontos  $A = (1, 0)$  e  $B = (1, \pi)$  e os arcos da circunferência  $\{(1, \theta) : 0 < \theta < \pi\}$ ,  $\{(1, \theta) : \pi < \theta < 2\pi\}$ .

$$\begin{aligned} \omega(\gamma_1) &= \{A\} \\ \omega(\gamma_2) &= \{B\} \\ \omega(\gamma_3) &= \{r = 1\} \\ \omega(\gamma_4) &= \{r = 1\}. \end{aligned}$$

Figura 2.6: Retrato de fase de (2.13)

## 2.4 Conjuntos invariantes

**Definição 2.4.1.**  $A \subset \Omega$  é dito conjunto invariante de (2.2) se para cada  $p \in A$ , a solução  $\phi(t, p)$  de (2.2) que passa por  $p$  estiver definida para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $\phi(t, p) \in A$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Qualquer órbita de  $\dot{x} = f(x)$  é um conjunto invariante de (2.2).

De maneira natural define-se conjunto positivamente invariante e conjunto negativamente invariante. Um conjunto  $A \subset \Omega$  é dito *positivamente (negativamente) invariante* se para cada  $p \in A$ , a solução  $\phi(t, p)$  de (2.2) que passa por  $p$  estiver definida para todo  $t \geq 0$  ( $t \leq 0$ ) e  $\phi(t, p) \in A$ ,  $\forall t \geq 0$  ( $t \leq 0$ ).

**Exemplos:** Analisar os exemplos 1-2-3 acima.



**Teorema 2.4.1.** *Se a semiórbita positiva  $\gamma^+(p) = \{\phi(t, p) : t \geq 0\}$  (respectivamente, a semiórbita negativa  $\gamma^-(p)$ ) de (2.2) está contida num compacto  $K \subset \Omega$  então:*

- (1)  $\omega(\gamma^+) \neq \emptyset$
- (2)  $\omega(\gamma^+)$  é compacto
- (3)  $\omega(\gamma^+)$  é conexo
- (4)  $\omega(\gamma^+)$  é invariante
- (5)  $d(\phi(t, p), \omega(\gamma^+)) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Demonstração.** (1) Seja  $(t_n)$  uma sequência de números reais tais que  $t_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Como  $\phi(t_n, p) \in K$ ,  $\forall n$  temos que  $\phi(t_n, p)$  tem pelo menos uma subsequência  $\phi(\tilde{t}_n, p)$  convergindo para algum ponto  $\xi \in K$ . Logo  $\xi \in \omega(\gamma^+)$  e então  $\omega(\gamma^+) \neq \emptyset$ .

(2) Mostremos que  $\omega(\gamma^+)$  é fechado. Como  $\omega(\gamma^+) \subset K$ , daí seguirá que  $\omega(\gamma^+)$  será compacto.

Seja  $q_n \in \omega(\gamma^+)$ ,  $q_n \xrightarrow{\Omega} q$ . Como  $q_n \in \omega(\gamma^+)$ , existe para cada  $q_n$ , uma sequência  $(t_m^{(n)})_{m \in \mathbb{N}}$  tal que  $t_m^{(n)} \rightarrow \infty$  e  $\phi(t_m^{(n)}, p) \rightarrow q_n$ , quando  $m \rightarrow \infty$ .

Escolhamos para cada sequência  $(t_m^{(n)})_{m \in \mathbb{N}}$  um ponto  $t_n = t_{m(n)}^{(n)} > n$  e tal que

$$|\phi(t_n, p) - q_n| < \frac{1}{n}.$$

Como  $|\phi(t_n, p) - q| \leq |\phi(t_n, p) - q_n| + |q_n - q|$  concluímos que  $\phi(t_n, p) \rightarrow q$ . Daí segue que  $q \in \omega(\gamma^+)$ .

(3)  $\omega(\gamma^+)$  é conexo. Supomos que não. Logo podemos escrever  $\omega(\gamma^+) = M \cup N$ , onde  $M, N$  são não vazios, fechados(compactos) e  $M \cap N = \emptyset$ .

Como  $M$  e  $N$  são limitados e fechados temos que  $d(M, N) = \inf_{x \in M} d(x, N) \stackrel{\text{def}}{=} \delta > 0$ .

Sejam  $a \in M, b \in N$ . Como  $a, b \in \omega(\gamma^+)$  é possível encontrar sequências  $(t_n), (\tau_n)$  de modo que  $t_n < \tau_n < t_{n+1}, \forall n, t_n \rightarrow \infty$  tal que  $\phi(t_n, p) \rightarrow a, \phi(\tau_n, p) \rightarrow b$ .

Podemos também supor que  $d(\phi(t_n, p), M) < \frac{\delta}{2}$  e  $d(\phi(\tau_n, p), M) > \frac{\delta}{2} \forall n$ .

Assim devido à continuidade de  $t \mapsto d(\phi(t), M)$ , do Teorema do valor intermediário segue que existe  $s_n \in (t_n, \tau_n)$  de modo que  $d(\phi(s_n, p), M) = \frac{\delta}{2}$ .

Como  $\phi(s_n, p) \in K, \forall n$ , podemos supor que  $\phi(s_n, p)$  é convergente, digamos para  $\xi \in K$ .

Assim  $d(\xi, M) = \frac{\delta}{2}$  e daí  $\xi \notin M$ .

Por outro lado  $d(M, N) \leq d(M, \xi) + d(\xi, N)$ . Daí  $\delta \leq \frac{\delta}{2} + d(\xi, N)$ . Logo  $d(\xi, N) \geq \frac{\delta}{2} > 0$ . Assim  $\xi \notin N$ . Com isto  $\xi \in \omega(\gamma^+)$  e  $\xi \notin M, \xi \notin N$  o que é uma contradição. Logo  $\omega(\gamma^+)$  é conexo.

(4) Invariância.

Se  $q \in \omega(\gamma^+)$  então existe  $t_n \rightarrow \infty$  tal que  $\phi(t_n, p) \rightarrow q$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Suponhamos que  $\phi(t, q)$  tenha intervalo maximal de existência  $(w_-, w_+)$  e seja  $\bar{t} \in (w_-, w_+)$ . Como  $\phi(t_n, p) \rightarrow q$  do Teorema da continuidade com relação às condições iniciais  $\phi(t, \phi(t_n, p))$  está definida em  $\bar{t}$  para  $n$  suficientemente grande e  $\phi(\bar{t}, \phi(t_n, p)) \rightarrow \phi(\bar{t}, q)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Como  $\phi(\bar{t}, \phi(t_n, p)) = \phi(\bar{t} + t_n, p)$  temos que para  $n$  suficientemente grande  $\phi(\bar{t} + t_n, p) \in K$  e daí segue que  $\phi(\bar{t}, q) \in K$ .

Logo dos resultados relativos a prolongamento de soluções segue que  $w_- = -\infty$ ,  $w_+ = +\infty$ .

Como  $\phi(\bar{t}, \phi(t_n, p)) = \phi(\bar{t} + t_n, p) \rightarrow \phi(\bar{t}, q)$  e como  $\bar{t} + t_n \rightarrow \infty$  temos que  $\phi(\bar{t}, q) \in \omega(\gamma^+)$ , o que conclue a demonstração de que  $\omega(\gamma^+)$  é invariante.

(5) Isto segue de (4). □

**Observação:** Se a órbita for não limitada pode acontecer que o conjunto  $\omega$ -limite seja desconexo. Isso pode ser visto no exemplo a seguir (ver [1])

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (2.14)$$

onde

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq 1 \\ -\frac{y(1-x^2)}{(1+y^2)(1-p(x)q(y))} & \text{se } |x| < 1 \end{cases} \\ g(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \geq 1 \\ -1 & \text{se } |x| < -1 \\ x & \text{se } |x| < 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde  $p$  e  $q$  são funções continuamente diferenciáveis satisfazendo

$$\begin{cases} 0 < p(x) < \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x < 1 \\ p(x) = 0 & \text{se } x \leq 0 \\ p(x) = \frac{1}{2} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < q(y) < \frac{1}{2} & \text{se } y < 0 \\ q(y) = 0, & \text{se } y \geq 0 \end{cases}$$

O retrato de fase é dado na figura abaixo

Figura 2.7: Retrato de fase de (2.14)

## 2.5 Conjunto minimal

**Definição 2.5.1.** Um conjunto  $M \subset \Omega$  é dito minimal de (2.2) se é não vazio, fechado e invariante e não tem nenhum subconjunto próprio com essa três propriedades.

**Lema 2.5.1.** Seja  $A \subset \Omega$ , invariante, compacto e não vazio. Então existe pelo menos um subconjunto minimal de  $A$ .

**Demonstração.** Usaremos o Lema de Zorn.

**Lema de Zorn.** Todo conjunto ordenado indutivo inferiormente tem um elemento minimal.

Lembremos que um conjunto é indutivo inferiormente se para todo subconjunto totalmente ordenado de  $X$  tem um mínimo. Um elemento de  $X$  é dito minimal se ele não for estritamente minorado por nenhum elemento de  $X$ .

Seja então  $\mathcal{F}$  a família de subconjuntos de  $A$  definida por

$$\mathcal{F} = \{B \subset A : B \neq \emptyset, B \text{ compacto e invariante} \}$$

Se  $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$ , definimos  $B_1 \prec B_2 \Leftrightarrow B_1 \subset B_2$ .

Mostremos que  $\mathcal{F}$  é indutivo. Seja  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$  tal que  $\mathcal{F}_1$  é totalmente ordenado por  $\prec$ . A família  $\mathcal{F}_1$  tem a propriedade da interseção finita, isto é, a interseção de um número finito de elementos de  $\mathcal{F}_1$  é não vazia. De fato, se  $B_1, B_2 \in \mathcal{F}_1$  então  $B_1 \prec B_2$  ou  $B_2 \prec B_1$  e em ambos casos  $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ , invariante e compacto. Logo  $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}_1$ . O mesmo vale para um número finito de elementos de  $\mathcal{F}_1$ .

Consideremos o seguinte resultado tirado de ELON L. LIMA, *Espaços métricos*, página 210.

A seguinte condição é necessária e suficiente para que um espaço métrico  $X$  seja compacto.

Se  $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  é um família de conjuntos fechados de  $X$  com a propriedade da interseção finita então  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$ .

Daí segue que  $C \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{B \in \mathcal{F}_1} B \neq \emptyset$ , compacto e invariante, logo  $C \in \mathcal{F}_1$  e para cada  $B \in \mathcal{F}_1$  temos  $C \prec B$ .

Assim  $\mathcal{F}$  é indutivo inferiormente. Do Lema de Zorn segue que  $\mathcal{F}$  tem um elemento minimal, que será o subconjunto minimal de  $A$ , que estávamos procurando.  $\square$

**Observação:** Os conjuntos  $\omega$ -limite não são necessariamente conjuntos minimais, como mostram os 3 exemplos acima

**Teorema 2.5.2.** Se  $K \subset \Omega$  é um conjunto positivamente invariante de (2.2) o qual é homeomorfo a bola unitária fechada de  $\mathbb{R}^n$ , então existe pelo menos um ponto de equilíbrio de (2.2) em  $K$ .

Figura 2.8: Conjunto minimal

**Demonstração.** Seja  $0 < \tau_1 \in \mathbb{R}$  e consideremos a aplicação  $p \in K \rightarrow \phi(\tau_1, p) \in K$ . Essa aplicação é contínua e do Teorema de Brouwer segue que essa aplicação tem um ponto fixo  $p_1$ , isto é,  $\phi(\tau_1, p_1) = p_1$ . Logo  $\phi(t, p_1)$  é  $\tau_1$ -periódica em  $t$ .

Consideremos uma sequência  $(\tau_m)$ , estritamente decrescente tal que  $\tau_m \rightarrow 0$ . Para cada  $m$  existe  $p_m \in K$  tal que  $\phi(\tau_m, p_m) = p_m$  e temos assim as soluções  $\phi(t, p_m)$  que são  $\tau_m$ -periódicas.

Sem perda de generalidade, podemos supor que  $p_m \rightarrow p^* \in K$ , pois  $K$  é compacto.

Consideremos a solução  $\phi(t, p^*)$  e  $(w_-, w_+)$  seu intervalo maximal de existência.

Fixemos  $\bar{t} \in (w_-, w_+)$ . Para cada  $m$  existe  $k_m(\bar{t})$  inteiro tal que  $k_m(\bar{t})\tau_m \leq \bar{t} \leq k_m(\bar{t})\tau_m + \tau_m$ . Assim  $0 \leq \bar{t} - k_m(\bar{t})\tau_m < \tau_m$ . Temos que

$$\begin{array}{ccc} \phi(\bar{t}, p_m) & = & \phi(\bar{t} - k_m(\bar{t})\tau_m, p_m) \\ m \rightarrow \infty \quad \downarrow & & \downarrow \quad m \rightarrow \infty \\ \phi(\bar{t}, p^*) & = & \phi(0, p^*). \end{array}$$

Logo  $w_- = -\infty$ ,  $w_+ = +\infty$ , pois  $\forall t \in (w_-, w_+)$ ,  $\phi(t, p^*) = p^* \in K$ . Assim  $p^*$  é um ponto de equilíbrio de (2.2).  $\square$

# Sistemas lineares e linearização

## 3.1 Introdução

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  e  $\phi(t)$  solução de  $\dot{x} = f(x)$  em um intervalo  $I$ .

Fazendo  $x \stackrel{\text{def}}{=} \phi(t) + y$ , temos  $\dot{\phi} + \dot{y} = f(\phi + y)$  e daí

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(\phi + y) - f(\phi) \\ &= f_x(\phi(t))y + f(\phi(t) + y) - f(\phi(t)) - f_x(\phi(t))y \\ &:= f_x(\phi(t))y + g(t, y) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} A(t)y + g(t, y). \end{aligned}$$

Temos assim o sistema  $\dot{y} = A(t)y + g(t, y)$ .

**Exercício 3.1.1.** *Mostrar que se  $\phi(t)$  é limitada em  $I$  então  $g(t, y) = o(|y|)$ , quando  $y \rightarrow 0$  (isto é,  $g(t, y)/|y| \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ ) uniformemente em  $t \in I$ .*

Em geral, procura-se primeiro estudar o sistema linear  $\dot{x} = A(t)x$  e depois tenta-se obter informações sobre  $\dot{x} = A(t)x + g(t, x)$  a partir das informações sobre o sistema linear  $\dot{x} = A(t)x$ .

Fixada uma norma  $|\cdot|$  em  $\mathbb{R}^n$ , tomamos  $|A| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax|$ .

$$|x| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \rightarrow \quad |A| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$$

$$|x| = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \rightarrow \quad |A| = \sup_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$$

$$|x| = \left[ \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right]^{1/2} \quad \rightarrow \quad |A| = \sqrt{\lambda}, \text{ onde } \lambda \text{ é o maior autovalor de } A^*A.$$

Por comodidade vamos considerar  $t$  variando em  $\mathbb{R}$ . Poderíamos considerar  $t$  variando em um intervalo qualquer com pequenas adaptações.

Consideremos o sistema linear

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^n a_{jk}(t)x_k + h_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

onde  $a_{jk}$  e  $h_j$  são funções contínuas em  $\mathbb{R}$ .

Em forma matricial temos:  $\dot{x} = A(t)x + h(t)$ , onde

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{pmatrix}.$$

De agora em diante iremos supor que  $A(t)$  e  $h(t)$  são contínuas em  $\mathbb{R}$  e adotaremos a notação

$$\dot{x} = A(t)x \quad \text{Sistema homogêneo} \quad (\text{H})$$

$$\dot{y} = A(t)y + h(t) \quad \text{Sistema não-homogêneo} \quad (\text{NH})$$

Como já foi visto anteriormente, toda solução não continuável de (NH) está definida em  $\mathbb{R}$  e vale a unicidade de solução não continuável do PVI.

## 3.2 Princípio da superposição

**Proposição 3.2.1.** *Se  $x_i(t)$  são soluções de  $\dot{x} = A(t)x + h_i(t)$   $i = 1, 2$  e  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  então  $c_1x_1 + c_2x_2$  é solução de  $\dot{x} = A(t)x + c_1h_1(t) + c_2h_2(t)$ .*

**Demonstração.** (Deixa-se a cargo do leitor). □

Em particular se  $h_i(t) = 0$ ,  $i = 1, 2$ , concluímos da proposição acima que as soluções de  $\dot{x} = A(t)x$  constituem um espaço vetorial.

**Propriedades:**

- (1) Combinação linear de soluções de (H) ainda é solução de (H).
- (2) Diferença de soluções de (NH) é solução de (H).
- (3) Solução geral de (NH) = solução geral de (H) + solução particular de (NH).

**Definição 3.2.1.** *Uma matrix  $X(t)$  de ordem  $n \times n$  é matrix solução de (H) se  $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  ou se cada coluna de  $X(t)$  é solução de (H) em  $\mathbb{R}$ .*

**Definição 3.2.2.** *Sejam  $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções contínuas,  $i = 1, \dots, m$ . Dizemos que elas são linearmente independentes se  $\alpha_1x_1(t) + \dots + \alpha_mx_m(t) = 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  implica que  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ .*

**Exercício 3.2.1.** *Mostre que se para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_1(t_0), \dots, x_m(t_0)$  forem linearmente independentes então  $x_1(t), \dots, x_m(t)$  são linearmente independentes*

Dê um exemplo mostrando que a recíproca não é verdadeira.

Mostraremos a seguir que quando elas são soluções de (H) com  $A(t)$  contínua, a recíproca também é verdadeira.

**Lema 3.2.2.** *Sejam  $A(t)$  contínua em  $\mathbb{R}$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $x_1, \dots, x_m$  soluções de (H). Então  $x_1, \dots, x_m$  são funções linearmente independentes se e somente se  $x_1(t_0), \dots, x_m(t_0)$  são vetores linearmente independentes.*

**Demonstração.** ( $\Leftarrow$ ) Ver exercício acima.

( $\Rightarrow$ ) Supomos que  $\alpha_1 x_1(t_0) + \dots + \alpha_m x_m(t_0) = 0$ . Logo a solução  $\alpha_1 x_1(t) + \dots + \alpha_m x_m(t)$  satisfaz o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(t_0) = 0 \end{cases}.$$

Devido à unicidade de solução do PVI temos que  $\alpha_1 x_1(t) + \dots + \alpha_m x_m(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ . Como assumimos que  $x_1(t), \dots, x_m(t)$  são linearmente independentes temos que  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ .  $\square$

**Lema 3.2.3.** *Se  $X(t)$  é matriz solução de (H) então ou  $\det X(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$  ou  $\det X(t) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$ .*

**Demonstração.** Seja  $\tau$  tal que  $\det X(\tau) = 0$ . Logo existe um vetor  $c$  não nulo tal que  $X(\tau)c = 0$ . Mas  $X(t)c$  é solução do PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(\tau) = 0 \end{cases}.$$

Logo da unicidade  $X(t)c = 0, \forall t \in \mathbb{R}$  e portanto  $\det X(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Exercício 3.2.2.** *Mostre que  $X(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 2t & t \end{pmatrix}$  não pode ser solução de um sistema linear  $\dot{x} = A(t)x$  com  $A(t)$  contínua em  $\mathbb{R}$ .*

### 3.3 Matriz fundamental

**Definição 3.3.1.** *Dizemos que  $X(t)$  é matriz fundamental (mf, para abreviar) de (H) se  $\dot{X}(t) = A(t)X(t), \forall t \in \mathbb{R}$  e se  $\det X(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ .*

**Definição 3.3.2.** *Chamamos de matriz principal em  $t_0$  à mf que para  $t = t_0$  vale  $I$ .*

**Notação:** Denotaremos uma matriz principal em  $t_0$  por  $X(t, t_0)$ .

**Propriedades:**

- $X(t, \tau) = X(t, s)X(s, \tau),$
- $X(s, t) = X(t, s)^{-1}.$

**Exercício 3.3.1.** Mostre que se  $X(t)$  é uma matriz de ordem  $n \times n$  a qual é diferenciável e não singular em  $\mathbb{R}$ , então

$$\frac{d}{dt}X^{-1}(t) = -X^{-1}(t)\dot{X}(t)X^{-1}(t).$$

**Exercício 3.3.2.** Seja  $A(t)$  uma matriz  $n \times n$ , contínua em  $\mathbb{R}$ . Mostre que o conjunto das soluções de (H) forma um espaço vetorial de dimensão  $n$  sobre  $\mathbb{R}$ .

**Exercício 3.3.3.** Mostre que se  $X(t)$  e  $Y(t)$  são mf de (H) então existe uma matriz não singular  $C$  tal que  $Y(t) = X(t)C$ .

**Definição 3.3.3.** Chamamos de matriz principal à matriz principal em  $t_0 = 0$ .

**Corolário 3.3.1.** Se  $X_0$  é não singular e se  $X(t)$  é matriz solução de (H), tal que  $X(0) = X_0$ , então  $X(t)$  é mf de (H).

**Demonstração.** Se  $X(t)$  é matriz solução de (H), temos que  $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$  e  $\det X(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$  ou  $\det X(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ .

Observe que para  $t_0 = 0$ ,  $X(t_0) = X(0) = X_0$  e como  $X_0$  é não singular então  $\det X(0) = \det X_0 \neq 0$ . Pelo Lema anterior  $\det X(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ . logo  $X(t)$  é uma matriz fundamental.  $\square$

**Lema 3.3.2.** Se  $X(t)$  é mf de (H) então a solução geral de (H) é dada por  $X(t)c$  onde  $c$  é um vetor  $n \times 1$ .

**Demonstração.** É óbvio que  $X(t)c$  é solução de (H) para todo vetor constante  $c$ . Por outro lado se  $y(t)$  é solução de (H) então  $X(t)c = y(t)$ , com  $c = X^{-1}(0)y(0)$  é solução do PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, \\ x(0) = y(0). \end{cases}$$

Logo  $y(t) = X(t)X^{-1}(0)y(0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Definição 3.3.4.** Chamamos de equação adjunta de (H) à equação

$$\dot{y} = -yA(t). \quad (\text{Adj})$$

**Observação:** Resultados semelhantes aos acima podem ser provados para a equação adjunta.

**Lema 3.3.3.** Se  $X(t)$  é mf de (H) então  $X^{-1}(t)$  é mf de (Adj).

**Demonstração.** É óbvio que  $\det X(t) \neq 0$  se e somente se  $\det X^{-1}(t) \neq 0$ . Além disso

$$\frac{d}{dt}X^{-1} = -X^{-1}\dot{X}X^{-1} = -X^{-1}AXX^{-1} = -X^{-1}A(t).$$

De outro modo  $X^{-1}X = I$  implica  $\frac{d}{dt}X^{-1}X + X^{-1}\frac{dX}{dt} = 0$  então  $\frac{d}{dt}X^{-1}X = -X^{-1}AX$ .

Logo  $\frac{d}{dt}X^{-1} = -X^{-1}A$ .  $\square$



**Teorema 3.3.4.** *Seja  $X(t)$  mf de (H). Então a solução do PVI,*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + h(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

é dada por

$$x(t) = X(t)[X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)h(s) ds], \forall t \in \mathbb{R}. \quad (\text{FVC})$$

A equação (FVC) é chamada *Fórmula da Variação das Constantes*.

**Demonstração.** Por simples derivação mostra-se que o lado direito da fórmula acima é solução do PVI.

Vamos indicar um processo heurístico que motiva a fórmula (FVC).

Seja  $c(t)$  tal que  $x(t) = x(t, t_0, x_0) = X(t)c(t)$ . Então,

$$\begin{aligned} A(t)x(t) + h(t) &= \dot{x}(t) = \dot{X}(t)c(t) + X(t)\dot{c}(t) \\ &= A(t)X(t)c(t) + X(t)\dot{c}(t) \\ &= A(t)x(t) + X(t)\dot{c}(t). \end{aligned}$$

Deste última igualdade segue que  $\dot{c}(t) = X^{-1}(t)h(t)$  e como  $c(t_0) = X^{-1}(t_0)x_0$ , temos

$$c(t) = X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)h(s)ds.$$

□

**Lema 3.3.5** (Abel-Liouville-Jacobi). *Se  $X(t)$  é matriz solução de (H) então se  $t_0 \in \mathbb{R}$*

$$\det X(t) = \det X(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(s)ds}$$

onde  $\text{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$  se  $A = (a_{ij})$ .

**Demonstração.** É suficiente prova que  $\varphi(t) = \det X(t)$  é solução de  $\dot{\varphi} = \text{tr} A(t)\varphi$ .

Derivando  $\varphi(t) = \det X(t) = \det(X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$  como função  $n$ -linear alternada das colunas de  $X(t)$ , temos

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \sum_{i=1}^n \det(X_1(t), X_2(t), \dots, \dot{X}_i(t), \dots, X_n(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \det(X_1(t), X_2(t), \dots, A(t)X_i(t), \dots, X_n(t)) \end{aligned}$$

É suficiente supor que  $X(t)$  é fundamental, caso contrário o lema é trivialmente satisfeito. Exprimamos para cada  $t$  o vetor  $A(t)X_i(t)$  em termos da base  $\{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\}$  de  $\mathbb{R}^n$ , isto é,

$$A(t)X_i(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)X_j(t).$$

A matrix  $(\alpha_{ij}(t))$  é a matriz do operador  $x \mapsto A(t)x$  na base  $\{X_i(t)\}_{i=1}^n$ . Lembrando que o traço não depende da expressão matricial do operador, temos

$$\operatorname{tr} A(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t).$$

Logo

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{i=1}^n \det(X_1(t), \dots, \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)X_j(t), \dots, X_n(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii}(t) \det(X_1(t), \dots, X_i(t), \dots, X_n(t)) \\ &= \operatorname{tr} A(t)\varphi(t). \end{aligned}$$

□

**Observação:** Da fórmula de Liouville segue também que ou  $\det X(t) = 0$  ou  $\det X(t) \neq 0 \forall t$  se  $X(t)$  é matriz solução de (H).

### 3.4 Equações escalares de ordem $n$

Sejam  $a_1(t), \dots, a_n(t), f(t)$  funções reais ou complexas, contínuas em  $\mathbb{R}$ .

Consideremos as equações

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0 \quad (\text{h})$$

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = f(t). \quad (\text{nh})$$

Fazendo  $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$ , temos os sistemas equivalentes

$$\dot{\hat{y}} = A(t)\hat{y} \quad (3.2)$$

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + F(t) \quad (3.3)$$

onde

$$A(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{pmatrix},$$

$$F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Sejam  $\phi_1, \dots, \phi_n$  funções escalares de classe  $C^{n-1}$ . Define-se o *Wronskiano* de  $\phi_1, \dots, \phi_n$  como sendo

$$\Delta(\phi_1, \dots, \phi_n)(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \cdots & \phi_n(t) \\ \phi_1^{(1)}(t) & \cdots & \phi_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

**Lema 3.4.1.** *Se  $\phi_1, \dots, \phi_n$  são funções escalares de classe  $C^{(n-1)}$ , definidas num intervalo  $I$ , então  $\phi_1, \dots, \phi_n$  são linearmente independentes se  $\Delta(\phi_1, \dots, \phi_n)(t) \neq 0, \forall t \in I$ .*

**Demonstração.** Supomos que  $\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(t) = 0, \forall t \in I$ . Então  $\sum_{i=1}^n c_i \phi_i^{(k)}(t) = 0, \forall t \in I, k = 1, \dots, n-1$ . Daí

$$\begin{pmatrix} \phi_1(t) & \cdots & \phi_n(t) \\ \phi_1^{(1)}(t) & \cdots & \phi_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como  $\Delta(\phi_1, \dots, \phi_n) \neq 0$  temos que  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ . □

**Observação:** A recíproca não é verdadeira.

**Exemplo 3.4.2.** *Consideremos as seguintes funções*

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 1], \\ \neq 0 & t \in (1, \infty) \end{cases}$$

$$\phi_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \infty), \\ \neq 0 & t \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

*Temos que  $\phi_1, \phi_2$  são linearmente independentes mas  $\Delta(\phi_1, \phi_2)(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ .*

Entretanto quando estivermos considerando soluções de (h), com coeficientes contínuos a recíproca é verdadeira.

**Teorema 3.4.3.** Se  $\phi_1, \dots, \phi_n$  são soluções de (h) em  $\mathbb{R}$  então  $\Delta(\phi_1, \dots, \phi_n)(t) = 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  ou  $\Delta(\phi_1, \dots, \phi_n)(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Mais especificamente,

$$\Delta(\phi_1, \dots, \phi_n)(t) = \Delta(\phi_1, \dots, \phi_n)(0) e^{-\int_0^t a_1(s) ds}$$

**Demonstração.** A fórmula acima segue da fórmula de Liouville para sistemas.  $\square$

### 3.4.1 Fórmula da variação das constantes

Consideremos o pvi

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t) \\ x(a) = \dot{x}(a) = \dots = x^{(n-1)}(a) = 0 \end{cases} \quad (\text{pvinh})$$

Fazendo  $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$  temos o sistema

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + F(t),$$

onde  $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$  com a condição inicial  $\hat{x}(a) = 0$ .

Da fórmula da variação das constantes para sistemas temos:

$$\hat{x}(t) = \Phi(t) \int_a^t \Phi^{-1}(s) F(s) ds$$

onde

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \dots & \phi_n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \phi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

e  $\phi_1, \dots, \phi_n$  são soluções linearmente independentes de (h).

Como só nos interessa a primeira componente de  $\hat{x}$ , vemos que só precisamos de uma parte de  $\Phi^{-1}(s)$ , isto é, se

$$\Phi^{-1}(s) = \frac{1}{\det \Phi(s)} \begin{pmatrix} w_1(s) \\ ? \\ \vdots \\ w_n(s) \end{pmatrix}$$

temos

$$\Phi^{-1}(s)F(s) = \frac{1}{\det \Phi(s)} \begin{pmatrix} w_1(s)f(s) \\ \vdots \\ w_n(s)f(s) \end{pmatrix}.$$

Então

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(t) \int_a^t \frac{w_i(s)}{\Delta(\phi_1, \dots, \phi_n)(s)} f(s) ds$$

onde

$$w_i(s) = \begin{vmatrix} \phi_1(s) & 0 & \phi_n(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(s) & 1 & \phi_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}$$

**Observação:** Para encontrar a solução de (nh) tal que  $x(a) = \alpha_1$ ,  $\dot{x}(a) = \alpha_2$ ,  $\dots$ ,  $x^{(n-1)}(a) = \alpha_n$  basta encontrar a solução de (h) com essas condições iniciais e somar a solução de (nh), dada acima, com condições iniciais nulas.

**Exercício 3.4.1.** Resolver a equação  $x^{(4)} + x = f(t)$ ,  $x(0) = a$ ,  $\dot{x}(0) = b$ ,  $\ddot{x}(0) = c$ ,  $\dddot{x}(0) = d$ .

### 3.4.2 Equação adjunta de uma equação escalar de ordem $n$

$$\dot{w} = -wA$$

$$(\dot{w}_1 \ \dots \ \dot{w}_n) = -(w_1 \ \dots \ w_n) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= a_n w_n \\ \dot{w}_2 &= -w_1 + a_{n-1} w_n \\ &\vdots \\ \dot{w}_n &= -w_{n-1} + a_1 w_n. \end{aligned}$$

Para facilitar consideremos  $n = 3$ ,  $D = \frac{d}{dt}$

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= a_3 w_3 \\ \dot{w}_2 &= -w_1 + a_2 w_3 \\ \dot{w}_3 &= -w_2 + a_1 w_3. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\ddot{w}_2 &= -\dot{w}_1 + D(a_2w_3) = -a_3w_3 + D(a_2w_3) \\ \ddot{w}_3 &= -\dot{w}_2 + D^2(a_1w_3) = a_3w_3 - D(a_2w_3) + D^2(a_1w_3).\end{aligned}$$

Portanto

$$\ddot{w}_3 - D^2(a_1w_3) + D(a_2w_3) - a_3w_3 = 0.$$

Fazendo  $z = w_3$  temos

$$\ddot{z} - D^2(a_1z) + D(a_2z) - a_3z = 0$$

que é a adjunta de

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y + a_3y = 0.$$

De maneira geral a adjunta de (h) é dada por

$$D^n z - D^{n-1}(a_1z) + \dots + (-1)^n a_n z = 0.$$

Quando a equação tem coeficientes constantes temos uma equação semelhante a (h), com mudança de sinais em alguns coeficientes.

### 3.5 Sistemas lineares com coeficientes constantes

Sejam  $A$  e  $f(t)$  matrizes reais ou complexas de ordem  $n \times n$  e  $n \times 1$  respectivamente com  $f$  contínua em  $\mathbb{R}$ . Consideremos os seguintes sistemas

$$\dot{x} = Ax \quad (\text{H})$$

$$\dot{y} = Ay + f(t) \quad (\text{NH})$$

$$\dot{y} = -yA \quad (\text{Adj})$$

Se  $P$  é a matriz principal de (H), i.e,  $P(0) = I$ , temos  $P(t+s) = P(t)P(s)$ ,  $\forall t, s \in \mathbb{R}$ . Este fato segue da unicidade de solução do PVI. Isto sugere  $P$  comporta-se como uma exponencial. Colocamos assim por definição:

$$P(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{At}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Propriedades:**

$$(i) \quad e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$$

$$(ii) \quad (e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

$$(iii) \quad \frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$$

$$(iv) \quad e^{At} = I + At + \dots + \frac{A^n}{n!} t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n$$

(v) A solução geral de (H) é dada por  $e^{At}c$ , onde  $c$  é uma matriz de ordem  $n \times 1$

(vi) Se  $X(t)$  é mf de (H) então  $e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$ .

**Demonstração.** (i) Já foi provada (unicidade).

(ii) Verifica-se facilmente que  $(e^{At})^{-1}$ ,  $e^{(-A)t}$  e  $e^{A(-t)}$  são mf de (Adj), que valem  $I$  para  $t = 0$ . Notação:  $e^{-At} = e^{(-A)t}$ .

(iii) Basta utilizar a definição de  $e^{At}$  e observar que  $e^{At}A$  e  $Ae^{At}$  são soluções de  $\dot{X} = AX$  que valem  $A$  para  $t = 0$ .

(v) Já foi discutida anteriormente.

(vi)  $e^{At}$  e  $X(t)X^{-1}(0)$  são mp.

(iv) Como  $\frac{|(At)^n|}{n!} \leq \frac{|A|^n |t|^n}{n!}$ . Segue do critério de *Comparação de Weierstrass* segue que a série  $I + At + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots$  converge absolutamente e uniformemente para  $t$  em intervalos limitados de  $\mathbb{R}$ .

Como  $P(t) = e^{At}$  é matriz principal de (H) em  $t = 0$ , temos que  $P(t)$  satisfaz a equação integral

$$P(t) = I + \int_0^t A P(s) ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Vamos agora resolver a equação (3.4) pelo *Método das Aproximações Sucessivas*. Definamos a seguinte sequência

$$P_0 = I, \\ P_{n+1}(t) = I + \int_0^t A P_n(s) ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad n \geq 0.$$

Por indução mostra-se que  $P_n(t) = I + At + \dots + \frac{(At)^n}{n!}$ . Assim  $P_n(t)$  é a  $n$ -ésima soma parcial da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$ , a qual sabemos converge absolutamente e uniformemente em intervalos limitados de  $\mathbb{R}$ .

Denotemos por  $Q(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t)$ . Da definição de  $P_n(t)$  segue, passando ao limite, que  $Q(t) = I + \int_0^t A Q(s) ds, \forall t \in \mathbb{R}$ . Logo  $Q(t)$  é mp de (H). Portanto

$$Q(t) = P(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

□

**Observação:**  $e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$  nos dá um método para determinarmos  $e^{At}$ , quando conhecemos uma matriz fundamental  $X(t)$ .

**Exercício 3.5.1.** Prove que  $Be^{At} = e^{At}B$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  se e somente se  $AB = BA$ .

**Exercício 3.5.2.** Prove que  $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  se e somente se  $AB = BA$ .

**Definição 3.5.1.** Definimos o colchete de Lie de duas matrizes  $A, B$   $n \times n$  por

$$[A, B] = AB - BA.$$

**Observação 3.5.1.** Claramente,  $AB = BA$  se e somente se  $[A, B] = 0$ .

### Fórmula de Baker-Campbell-Dynkin-Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}, \text{ se } [A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0.$$

Mais geralmente

$$e^{L_1} e^{L_2} \dots e^{L_n} = e^{L_1+L_2+\dots+L_n+\frac{1}{2}\sum_{1 \leq i < j \leq n} [L_i, L_j]}, \text{ se } [L_i, [L_i, L_j]] = 0, \text{ para todo } i, j.$$

## 3.5.1 Autovalores e autovetores

Para calcular mf de (H), em particular  $e^{At}$ , podemos utilizar autovalores e autovetores de  $A$ .

**Motivação:** Procuraremos soluções de (H) da forma  $x(t) = e^{\lambda t}v$ , onde  $0 \neq v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$  é

um vetor constante.

Temos que  $x(t)$  é solução de (H) se e somente se  $Ae^{\lambda t}v = \dot{x} = \lambda e^{\lambda t}v$ ; isto é, se e somente se  $Av = \lambda v$ , ou seja,  $\lambda$  é autovalor de  $A$  e  $v$  é autovetor associado.

**Lema 3.5.2.**  $x(t) = e^{\lambda t}v \neq 0$  é solução de (H) se e somente se  $\lambda$  é autovalor de  $A$  e  $v$  é autovetor associado a  $\lambda$ .

De agora para frente, vamos supor  $A$  matriz complexa. Vamos recordar os seguintes resultado de Álgebra Linear.

**Proposição 3.5.3.** Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  ( $p \leq n$ ) são autovalores distintos de  $A$ , associados aos autovetores  $v_1, \dots, v_p$ , então  $v_1, \dots, v_p$  são linearmente independentes.

**Lema 3.5.4.** Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  os autovalores (não necessariamente distintos) de  $A$  e  $v_1, \dots, v_n$  os autovetores correspondentes. Se  $v_1, \dots, v_n$  forem linearmente independentes então  $e^{\lambda_1 t}v_1, \dots, e^{\lambda_n t}v_n$  é uma base de soluções de (H),  $X(t) = (e^{\lambda_1 t}v_1, \dots, e^{\lambda_n t}v_n)$  é mf de (H) e  $e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$ .

**Demonstração.** Basta ver que  $\det X(0) \neq 0$ , pois  $v_1, \dots, v_n$  são linearmente independentes e usar o Lema 3.5.2.  $\square$



### 3.5.2 Soluções reais

Mostraremos a seguir, quando  $A$  é real, como encontrar soluções reais.

Se  $\lambda$  é autovalor de  $A$  associado a  $v$ , temos  $Av = \lambda v$ . Logo  $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$ . Então  $\bar{\lambda}$  é autovalor associado ao autovetor  $\bar{v}$ .

Suponhamos que  $\lambda = \alpha + i\beta$  com  $\beta \neq 0$  então que

$$\frac{e^{\lambda t}v + \overline{e^{\lambda t}v}}{2} = \operatorname{Re} e^{\lambda t}v = u(t)$$

$$\frac{e^{\lambda t}v - \overline{e^{\lambda t}v}}{2i} = \operatorname{Im} e^{\lambda t}v = v(t)$$

são soluções de (H).

Lembremos ainda o fato que *dois vetores  $u_1, u_2$  são linearmente independentes se e somente se  $u_1 + u_2$  e  $u_1 - u_2$  são linearmente independentes*.

Como  $e^{\lambda t}v$  e  $\overline{e^{\lambda t}v}$  são linearmente independentes (pois  $\lambda \neq \bar{\lambda}$ ) temos que  $u(t)$  e  $v(t)$  são linearmente independentes e são reais. Assim, no lugar de  $e^{\lambda t}v$ ,  $e^{\bar{\lambda}t}\bar{v}$  colocamos  $u(t)$ ,  $v(t)$ .

Este procedimento pode ser estendido a número finito de autovalores.

**Exemplo 3.5.5.** Considere o sistema  $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$ .

Os autovalores são da matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  são  $\lambda = \pm i$ . Os respectivos autovetores são

$$A - iI = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ é autovetor associado a } \lambda = i$$

$$e^{\lambda t}v = e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} u(t) + iv(t)$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad e \quad v(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

são soluções linearmente independentes e

$$e^{At} = (u(t) \ v(t)) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

### 3.5.3 Determinação de matriz fundamental de $\dot{x} = Ax$

Sejam  $\mathbb{C}^n$  o espaço complexo  $n$ -dimensional,  $S_1$  e  $S_2$  subespaços vetoriais de  $\mathbb{C}^n$ .

Dizemos que  $S_1$  e  $S_2$  são *linearmente independentes* se  $\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 = 0$ , com  $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$  implica que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

A soma direta  $S_1 \oplus S_2$  dos subespaços linearmente independentes  $S_1$  e  $S_2$  é o subespaço vetorial  $S$  de  $\mathbb{C}^n$  cujos elementos são da forma  $s_1 + s_2$ , onde  $s_1 \in S_1$  e  $s_2 \in S_2$ .

Sejam  $B$  uma matriz complexa de ordem  $n \times n$  e  $S \subset \mathbb{C}^n$  um subespaço vetorial. Dizemos que  $S$  é *invariante com relação a  $B$*  se para qualquer  $s \in S$  tem-se que  $Bs \in S$ .

O *espaço nulo* de  $B$ , denotado por  $N(B)$  é o conjunto  $N(B) = \{x \in \mathbb{C}^n : Bx = 0\}$  o qual também é chamado *núcleo* de  $B$ .

**Propriedades:**

- (a)  $N(B) \subset N(B^2) \subset \dots$
- (b)  $N(B^k)$  é invariante com relação a  $B^m$ , i.e,  $B^m(N(B^k)) \subset N(B^k)$
- (c) Existe  $k \geq 0$  tal que  $N(B^k) = N(B^{k+1})$ .

**Demonstração.** (a)  $x \in N(B) \Rightarrow Bx = 0 \Rightarrow B^2x = 0 \Rightarrow x \in N(B^2)$ .

(b)  $x \in N(B^k) \Rightarrow B^kx = 0 \Rightarrow B^k(B^m x) = B^m(B^k x) = 0 \Rightarrow B^m x \in N(B^k)$ .

(3) Imediato pois  $N(B^m) \subset \mathbb{C}^n, \forall m$ . □

Seja  $r(\lambda) = \min\{m : N((A - \lambda I)^m) = N((A - \lambda I)^{m+1})\}$ .

**Exemplo 3.5.6.** Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

O autovalor  $\lambda = 4$  tem multiplicidade algébrica 3.

$$(A - 4I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A - 4I)^2 = 0.$$

$$N(A - 4I) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

$$N((A - 4I)^2) = \mathbb{C}^3.$$

Logo  $r(4) = 2$ .

**Exercício 3.5.3.** Analisar a seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se  $\lambda$  é autovalor de  $A$ , definimos o *autoespaço generalizado*  $M_\lambda(A)$ , como sendo

$$M_\lambda(A) := N((A - \lambda I)^{r(\lambda)})$$

onde  $r(\lambda)$  definido como acima.

**Definição 3.5.2.** Dizemos que  $v \neq 0$  é um autovetor generalizado se  $(A - \lambda I)^{r(\lambda)}v = 0$ .

Dizemos que o autovalor  $\lambda$  tem divisores elementares simples se  $r(\lambda) = 1$ , em outras palavras se

$$M_\lambda(A) := N((A - \lambda I)).$$

A dimensão de  $M_\lambda(A)$  é igual à *multiplicidade algébrica* de  $\lambda$ , isto é, multiplicidade de  $\lambda$  como zero do polinômio característico,  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ .

A *multiplicidade geométrica* de  $\lambda$  é a dimensão do subespaço  $N(A - \lambda I)$ .

**Exemplo 3.5.7.** Consideremos  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

O autovalor  $\lambda = 1$  tem multiplicidade algébrica 2, multiplicidade geométrica 2 e tem divisores elementares simples.

**Exemplo 3.5.8.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 1$  é autovalor com multiplicidade algébrica 2, multiplicidade geométrica 1 e não tem divisores elementares simples,  $r(\lambda) = r(1) = 2$ .

**Lema 3.5.9.**  $M_\lambda(A)$  é invariante com relação a  $A$  e  $e^{At}$ .

**Demonstração.** A primeira parte é imediata. A segunda segue de

$$e^{At}(A - \lambda I)^{r(\lambda)} = (A - \lambda I)^{r(\lambda)}e^{At}.$$

□

**Lema 3.5.10.** Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  complexa e  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  são os autovalores distintos de  $A$  então  $\mathbb{C}^n = M_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus M_{\lambda_q}(A)$ .

Sejam  $P_1, \dots, P_q$  as projeções determinadas pela decomposição dada no Lema 3.5.10.

Se  $x_0 \in \mathbb{C}^n$ , temos

$$\begin{aligned} e^{At}x_0 &= e^{At} \sum_{j=1}^q P_j x_0 = \sum_{j=1}^q e^{At} P_j x_0 = \sum_{j=1}^q e^{\lambda_j It + (A - \lambda_j I)t} P_j x_0 \\ &= \sum_{j=1}^q e^{\lambda_j t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A - \lambda_j I)^k}{k!} t^k P_j x_0 \\ &= \sum_{j=1}^q e^{\lambda_j t} \sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} \frac{(A - \lambda_j I)^k}{k!} t^k P_j x_0 \end{aligned}$$

Pois  $(A - \lambda_j I)^k P_j x_0 = 0$  se  $k \geq r(\lambda_j)$ . Provamos assim o seguinte teorema:

**Teorema 3.5.11.** *Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  são autovalores distintos de  $A$  e  $P_j$  são as projeções definidas pela decomposição  $\mathbb{C}^n = M_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus M_{\lambda_q}(A)$ , então a solução do PVI  $\dot{x} = Ax$ ,  $x(0) = x_0$  é dada por*

$$e^{At} x_0 = \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} e^{\lambda_j t} \frac{(A - \lambda_j I)^k}{k!} t^k P_j x_0.$$

**Observação:** A maior potência de  $t$  que comparece junto com  $e^{\lambda_j t}$  é  $t^{r(\lambda_j)-1}$ .

**Observação:** As projeções  $P_i$  acima podem ser encontradas da seguinte maneira:

$$P_i = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_i} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

onde  $\gamma_i$  é uma curva retificável fechada, que possui somente o autovalor  $\lambda_i$  em seu interior e não passa por nenhum autovalor.

**Lema 3.5.12.** (a) *Se  $\operatorname{Re} \lambda < \alpha \in \mathbb{R}$ , para todo autovalor  $\lambda$  de  $A$  então existe constante  $k > 0$  tal que  $|e^{At} x_0| \leq K e^{\alpha t} |x_0|$ ,  $\forall t \geq 0$ ,  $\forall x_0 \in \mathbb{C}$ .*

(b) *Se  $\operatorname{Re} \lambda \leq \alpha \in \mathbb{R}$ , para todo autovalor  $\lambda$  de  $A$ . Suponhamos que  $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda = \alpha\} \neq \emptyset$  e seja  $m = \max\{r(\lambda_j) : \operatorname{Re} \lambda_j = \alpha\}$ . Então existe constante  $k > 0$  tal que  $|e^{At} x_0| \leq K t^{m-1} e^{\alpha t} |x_0|$ ,  $\forall t \geq 1$ ,  $\forall x_0 \in \mathbb{C}$ .*

**Demonstração.** (a) Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  os autovalores distintos de  $A$ . Então existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\operatorname{Re} \lambda_j + \epsilon < \alpha$ ,  $\forall j = 1, \dots, q$ . Logo do Teorema 3.5.11,

$$|e^{At} x_0| \leq \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} e^{\operatorname{Re} \lambda_j t} \frac{|A - \lambda_j I|^k}{k!} t^k |P_j x_0|.$$

Fazendo  $M \geq \max_{1 \leq j \leq q} \max_{0 \leq k \leq r(\lambda_j)-1} \frac{|A - \lambda_j I|^k}{k!} |P_j|$

$$|e^{At} x_0| \leq M \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} t^k e^{-ct} e^{(\operatorname{Re} \lambda_j + \epsilon)t} |x_0| \leq e^{\alpha t} |x_0| M \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} t^k e^{-ct}.$$

Como  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^k e^{-ct} = 0$ , segue que existe  $L > 0$  tal que  $t^k e^{-ct} \leq L$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Seja  $K > 0$  tal que  $\sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} t^k e^{-ct} M \leq K$ ,  $t \geq 0$ . Logo  $|e^{At} x_0| \leq K e^{\alpha t} |x_0|$ ,  $t \geq 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{C}$ .

(b) Da parte (a) temos

$$\begin{aligned}
 |e^{At}x_0| &\leq M \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} t^k e^{\operatorname{Re}\lambda_j t} |x_0| = M \sum_{\substack{j \\ \operatorname{Re}\lambda_j < \alpha}} \sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} t^k e^{\operatorname{Re}\lambda_j t} |x_0| + M \sum_{\substack{j \\ \operatorname{Re}\lambda_j = \alpha}} \sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} t^k e^{\operatorname{Re}\lambda_j t} |x_0| \\
 &\leq M_1 t^{m-1} \sum_{\substack{j \\ \operatorname{Re}\lambda_j < \alpha}} \sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} e^{\alpha t} |x_0| + M_2 \sum_{\substack{j \\ \operatorname{Re}\lambda_j = \alpha}} \sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} t^{m-1} e^{\alpha t} |x_0| \\
 &\leq K t^{m-1} e^{\alpha t} |x_0|, \quad t \geq 1,
 \end{aligned}$$

onde  $K = M_1 \sum_{\substack{j \\ \operatorname{Re}\lambda_j < \alpha}} \sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} + M_2 \sum_{\substack{j \\ \operatorname{Re}\lambda_j = \alpha}} \sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1}$ .

□

### 3.5.4 Método para achar a base de $M_\lambda(A)$

Seja  $\lambda$  autovalor de  $A$ .

- Acha-se vetores  $a \neq 0$  tal que  $(A - \lambda I)a = 0$
- Acha-se vetores  $b$  tal que  $(A - \lambda I)b = a$  para cada  $a$  encontrado anteriormente. Teremos então que  $b \neq 0$  e  $(A - \lambda I)^2 b = 0$ .
- Acha-se vetores  $c$  tal que  $(A - \lambda I)c = b$  para cada  $b$  encontrado anteriormente. Temos então  $(A - \lambda I)^3 c = 0$ .

Esse procedimento é repetido até conseguirmos  $m$  vetores linearmente independentes que serão a base de  $M_\lambda(A)$ , onde  $m$  é a multiplicidade de  $\lambda$ .

**Exemplo 3.5.13.** Consideremos as seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

O autovalor  $\lambda = 4$  tem multiplicidade algébrica 3.

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - 4I)a = 0, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}.$$

Então  $a_2 = a_4 = 0$ . Logo todo vetor não nulo da forma  $\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \\ 0 \end{pmatrix}$  é autovetor.

$$(A - 4I)b = a, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \\ 0 \\ -2b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b_2 = a_1, b_4 = 0.$$

Temos assim que  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  dão uma base para  $M_4(A)$ . É fácil ver que  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  é base para  $M_2(A)$ .

Utilizando os vetores acima é possível determinar uma base de soluções de (H)

- Toma-se primeiro soluções da forma  $e^{\lambda t}a$  onde  $(A - \lambda I)a = 0$ .
- Se for possível determinar  $b$  tal que  $(A - \lambda I)b = a$ , toma-se soluções da forma  $te^{\lambda t}a + e^{\lambda t}b$ .
- Se for possível encontrar  $c$  tal que  $(A - \lambda I)c = b$ , toma-se soluções da forma  $\frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}a + te^{\lambda t}b + e^{\lambda t}c$ .

e assim por diante até completar  $m$  soluções onde  $m$  é a multiplicidade de  $\lambda$ .

**Exemplo 3.5.14.** No exemplo anterior temos

$$e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, te^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

é uma base de soluções de (H). A matriz fundamental é

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} & te^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

### 3.5.5 Forma canônica de Jordan

Seja  $A$  uma matriz complexa de ordem  $n \times n$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  os autovalores distintos de  $A$ . Então existe matriz não singular  $C$  tal que

$$C^{-1}AC = J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{\lambda_q} \end{pmatrix}$$

onde

$$J_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_1^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & J_s^i \end{pmatrix}$$

a ordem de  $J_{\lambda_i}$  =multiplicidade de  $\lambda_i$ .

$$J_k^i = \lambda_i I + R_k^i,$$

$$R_k^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou

$$J_k^i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Temos que  $e^{At} = e^{CJC^{-1}t} = Ce^{Jt}C^{-1}$  e

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_{\lambda_1}t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{J_{\lambda_q}t} \end{pmatrix}$$

**Observação:** Se  $J = C^{-1}AC$  então a mudança  $x = Cy$  reduz o sistema  $\dot{x} = Ax$  no sistema  $\dot{y} = Jy$ , pois

$$\dot{y} = C^{-1}\dot{x} = C^{-1}ACy = Jy.$$

**Exercício 3.5.4.** (a) Explicar a forma canônica de Jordan real. Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Forma canônica real =  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

(b) Determinar a forma canônica real de  $A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ .

Se

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ ordem } s$$

$$e^{J_\lambda t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3.5.6 Equações de ordem $n$ com coeficientes Constantes

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \quad (h)$$

$$\dot{\hat{y}} = A\hat{y} \quad (H)$$

$p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n$  polinômio característico de (h).

Para determinar uma base de soluções complexas de (h), procede-se da seguinte maneira: Para cada zero  $\lambda$  de  $p(\lambda) = 0$ , com multiplicidade  $m$ , considera-se as soluções linearmente independentes  $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$ . Utilizando todos os zeros de  $p(\lambda) = 0$  encontra-se a base de soluções complexas de (h).

Se os coeficientes  $a_i, i = 1, 2, \dots, n$  são reais, para determinar base de soluções reais, procede-se da seguinte maneira:

(a) Para os zeros reais procede-se como acima

(b) Se  $\lambda = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$  é solução de  $p(\lambda) = 0$  então  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  também é solução. Correspondente a  $\lambda$  (multiplicidade  $m$ ) e  $\bar{\lambda}$  (multiplicidade  $m$ ) tomamos as soluções:

$$e^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{m-1} e^{\alpha t} \cos \beta t$$

$$e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{m-1} e^{\alpha t} \sin \beta t$$

**Exercício 3.5.5.** Achar uma base de soluções reais de  $y^{(4)} - y = 0$ .



### 3.6 Sistemas lineares autônomos bidimensionais

Consideremos  $A$  uma matriz real de ordem  $2 \times 2$  com  $\det A \neq 0$  (assim  $\lambda = 0$  não é autovalor) e  $\dot{x} = Ax$ .

Sejam  $\lambda_1, \lambda_2$  autovalores de  $A$ .

**Caso 1.** Autovalores reais.

**Caso 1a: Nó estável.** Sejam  $\lambda_1, \lambda_2$  autovalores reais com  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ . Sejam  $v_1, v_2$  autovalores associados a  $\lambda_1, \lambda_2$ , respectivamente. Então a solução geral de (H) é dada por  $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ .

Se  $c_1 = 0$  (resp.  $c_2 = 0$ ) então a órbita tende a zero seguindo a direção de  $v_2$  (resp.  $v_1$ ).

Consideremos agora o caso em que ambos são não nulos.

Temos para  $c_1 \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|} &= \frac{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2}{e^{\lambda_1 t}} \frac{e^{\lambda_1 t}}{|\dot{x}(t)|} \\ &= (\lambda_1 c_1 v_1 + \lambda_2 c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} v_2) \frac{e^{\lambda_1 t}}{|\dot{x}(t)|} \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1 c_1 v_1}{|\lambda_1 c_1 v_1|}. \end{aligned}$$

Assim se  $c_1 \neq 0$  as órbitas tendem a zero seguindo a direção de  $v_1$ .

Para lembrar qual direção as órbitas preferem, basta lembrar “quem vai mais rápido vai sozinho”.

Também

$$\frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|} = \frac{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2}{e^{\lambda_2 t}} \frac{e^{\lambda_2 t}}{|\dot{x}(t)|} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \frac{\lambda_2 c_2 v_2}{|\lambda_2 c_2 v_2|}.$$

O retrato de fase para este caso é mostrado na Figura 3.1.

Figura 3.1: Nó estável

**Caso 1b: Nó instável.** Neste caso temos  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , a análise é semelhante, bastando para isso inverter as flechas.

Figura 3.2: Nó instável

**Caso 1c: Ponto de Sela.** Neste caso temos  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ . Para  $c_1 \neq 0$  temos

$$\frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|} = \frac{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2}{e^{\lambda_1 t}} \frac{e^{\lambda_1 t}}{|\dot{x}(t)|} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1 c_1 v_1}{|\lambda_1 c_1 v_1|}.$$

Idem quando  $t \rightarrow -\infty$ . Ver Figura 3.3.

Figura 3.3: Ponto de sela

**Caso 2:** Autovalores complexos puros  $\lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ . Sejam  $w$  e  $\bar{w}$  autovetores associados a  $\lambda$  e  $\bar{\lambda}$ ,  $w = u + iv$  onde  $u$  e  $v$  são vetores reais.

Procuramos  $x(t)$  solução real de (H). Então

$$e^{\lambda t}w = e^{\alpha t}[\cos \beta t + i \sin \beta t] [u + iv] = e^{\alpha t}[\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)v] + ie^{\alpha t}[\cos(\beta t)v + \sin(\beta t)u].$$

Então  $e^{\alpha t}[\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)v]$  e  $e^{\alpha t}[\cos(\beta t)v + \sin(\beta t)u]$  são soluções reais de (H) e são linearmente independentes.

Tomando  $c_1 \stackrel{\text{def}}{=} \rho \cos(-\delta)$ ,  $c_2 \stackrel{\text{def}}{=} \rho \sin(-\delta)$ , temos que a solução geral de (H) é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t} \{ \rho \cos \delta \cos(\beta t)u - \rho \cos \delta \sin(\beta t)v - \rho \sin \delta \cos(\beta t)v - \rho \sin \delta \sin(\beta t)u \} \\ &= e^{\alpha t} \rho [\cos(\beta t + \delta)u - \sin(\beta t + \delta)v]. \end{aligned}$$

Para os valores de  $t$  tal que  $\beta t + \delta = k\pi$  a órbita corta a reta definida pelo vetor  $u$  e para  $\beta t + \delta = k\pi + \pi/2$  a órbita corta linha definida pelo vetor  $v$ .

Assim a órbita gira em torno da origem, conforme mostra a Figura 3.4.

Figura 3.4: Orientação da origem

**Caso 2a:(Centro)**  $\alpha = 0$ . Neste caso a solução geral é dada por

$$x(t) = \rho [u \cos(\beta t + \delta) - v \sin(\beta t + \delta)],$$

onde  $\rho > 0$  e  $\delta$  são constantes arbitrárias.

As órbitas são curvas fechadas,  $\frac{2\pi}{\beta}$ -periódicas. Ver Figura 3.5,  $\beta > 0$ .

Figura 3.5: Centro

**Caso 2b:(Foco estável)**  $\alpha < 0$ . As órbitas tendem a  $(0, 0)$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . Figura 3.6,  $\beta > 0$ .

**Caso 2c:(Foco instável)**  $\alpha > 0$ . As órbitas tendem a  $(0, 0)$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Figura 3.7,  $\beta > 0$ .

**Caso 3.** Autovalores reais e iguais  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

Figura 3.6: Foco estável

Figura 3.7: Foco instável

**Caso 3a:(Nó impróprio)**  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$  e existem dois autovalores linearmente independentes associados a  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Logo todo vetor não nulo é autovetor. Neste caso  $\lambda_1 = \lambda_2$  tem divisores elementares simples ( $r(\lambda_1) = 1$ ) e a solução geral é dada por  $x(t) = e^{\lambda_1 t}(c_1 v_1 + c_2 v_2)$ . VER FIGURA?.

O caso  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$  é semelhante, bastando inverter as flechas na figura?.

Figura 3.8: Nó impróprio

**Caso 3b:(Nó impróprio estável)**  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$  mas não é possível achar 2 autovetores linearmente independentes ( $r(\lambda_1) = 2$ ), isto é, não tem divisores elementares simples. Assim  $\mathcal{N}(A - \lambda I)^2 \supsetneq \mathcal{N}(A - \lambda I)$  e daí existe vetor  $w \neq 0$  tal que  $(A - \lambda I)^2 w = 0$  e  $(A - \lambda I)w = v \neq 0$ . Temos, então que  $v$  é autovetor. Assim  $e^{\lambda t} v$  e  $te^{\lambda t} v + e^{\lambda t} w$  são soluções linearmente independentes de (H).

A solução geral de (H) é então dada por  $x(t) = ae^{\lambda t} v + b(te^{\lambda t} v + e^{\lambda t} w)$ . Se  $b \neq 0$ , como  $\dot{x} = a\lambda e^{\lambda t} v + b[\lambda te^{\lambda t} v + e^{\lambda t} v + e^{\lambda t} w]$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|} &= \frac{\dot{x}(t)}{te^{\lambda t}} \frac{te^{\lambda t}}{|\dot{x}|} \\ &= \frac{a\lambda e^{\lambda t} v + b[\lambda te^{\lambda t} v + e^{\lambda t} v + e^{\lambda t} w]}{te^{\lambda t}} \frac{te^{\lambda t}}{|\dot{x}|} \\ &= \left( \frac{a\lambda v}{t} + \frac{b[\lambda tv + v + w]}{t} \right) \frac{te^{\lambda t}}{|\dot{x}|} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{b\lambda v}{|b\lambda v|}. \end{aligned}$$

Assim as órbitas tendem a zero na direção do autovetor  $v$ .

O caso do nó impróprio instável é semelhante ao acima com  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ , bastando inverter as setas na Figura 3.9.

Figura 3.9: Nó impróprio instável

### 3.7 Sistemas lineares periódicos: teoria de Floquet

**Lema 3.7.1.** Se  $C$  é uma matriz de ordem  $n \times n$  com  $\det C \neq 0$  então existe matriz  $B$  tal que  $e^B = C$ .

**Demonstração.** Como  $P^{-1}e^B P = e^{P^{-1}BP}$ , podemos supor  $C$  na forma canônica de Jordan.

$$\text{Se } J = \begin{pmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_p \end{pmatrix} \text{ então } e^J = \begin{pmatrix} e^{J_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{J_p} \end{pmatrix}. \text{ Assim podemos supor que}$$

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \text{ ou } C = \lambda I + R \text{ onde } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ com ordem } R = m.$$

Observamos que  $R^m = 0$ .

Temos que  $C = \lambda(I + \frac{R}{\lambda})$ . Se encontrarmos  $S$  tal que  $e^S = I + \frac{R}{\lambda}$ , tomamos  $B = (\ln \lambda)I + S$  e teremos  $e^B = e^{(\ln \lambda)I + S} = \lambda e^S = \lambda I + R = C$ .

Procuraremos assim  $S$  tal que  $e^S = I + \frac{R}{\lambda}$ . Sabemos que

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n} + \cdots \\ e^{\ln(1+z)} &= 1+z, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

Isso nos motiva tomar

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{R}{\lambda}\right)^n = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{R}{\lambda}\right)^n \stackrel{\text{def}}{=} \ln\left(I + \frac{R}{\lambda}\right).$$

Fazendo  $Z = \frac{R}{\lambda}$  temos que  $S = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} Z^n$  é um polinômio em  $Z$  sem termo constante.

Assim mostra-se que  $S^m = 0$ .

Assim  $e^S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^n}{n!} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{S^n}{n!}$ . Na verdade um polinômio de grau  $m-1$  em  $S$ . Logo

$$\begin{aligned} e^S &= I + S + \frac{S^2}{2!} + \cdots + \frac{S^{m-1}}{(m-1)!} \\ &= I + \left(Z - \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}Z^{m-1}}{(m-1)}\right) + \frac{1}{2!} \left(Z - \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}Z^{m-1}}{(m-1)}\right)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} \left(Z - \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}Z^{m-1}}{(m-1)}\right)^{m-1} \\ &= I + Z. \end{aligned}$$

Assim  $e^S = e^{\ln(I+\frac{R}{\lambda})} = e^{\ln(I+Z)} = I + Z = I + \frac{R}{\lambda}$ .  $\square$

**Exercício 3.7.1.** *Seja  $D$  matriz real com  $\det D \neq 0$ . Mostre que existe matriz  $B$  real tal que  $e^B = D^2$ . Se  $C$  é matriz real no Lema 3.7.1, existe sempre matriz real  $B$  tal que  $e^B = C$ ?*

**Teorema 3.7.2** (Floquet, 1883). *Toda matriz fundamental  $X(t)$  de*

$$\dot{x} = A(t)x \quad (\text{H})$$

onde  $A(t)$  é contínua com  $A(t+T) = A(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , pode ser escrita na forma  $X(t) = P(t)e^{Bt}$  onde  $P(t)$  é  $T$ -periódica ( $T > 0$ ), de ordem  $n \times n$  e  $B$  é matriz constante de ordem  $n \times n$ .

**Demonstração.**  $X(t+T)$  é mf de (H). Logo existe matriz não singular  $C$  tal que  $X(t+T) = X(t)C$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Seja  $B$  tal que  $e^{BT} = C$  (Lema 3.7.1) e  $P(t) \stackrel{\text{def}}{=} X(t)e^{-Bt}$ . Temos que

$$\begin{aligned} P(t+T) &= X(t+T)e^{-B(t+T)} = X(t)Ce^{-BT}e^{-Bt} \\ &= X(t)e^{-Bt} = P(t). \end{aligned}$$

$\square$

**Corolário 3.7.3** (Liapunov, 1907). *Nas condições do Teorema 3.7.2, existe uma mudança de variáveis que reduz  $\dot{x} = A(t)x$  a um sistema com coeficientes constantes.*

**Demonstração.** Consideremos  $x \stackrel{\text{def}}{=} P(t)y$  e temos:

$$\begin{aligned} A(t)P(t)y &= \dot{x} = \dot{P}y + P\dot{y} \\ (AP - \dot{P})y &= P\dot{y} \\ P^{-1}(AP - \dot{P})y &= \dot{y} \end{aligned}$$

Garantimos que  $P^{-1}(AP - \dot{P}) = B$ . De  $X = P(t)e^{Bt}$  segue que

$$\begin{aligned} AX &= \dot{X} = \dot{P}e^{Bt} + PBe^{Bt} \\ APe^{Bt} &= \dot{P}e^{Bt} + PBe^{Bt}. \end{aligned}$$

Logo  $AP = \dot{P} + PB$  e daí  $B = P^{-1}(AP - \dot{P})$ .  $\square$

**Exercício 3.7.2.** *Prove que  $B$ , nos resultados acima pode ser tomado real, desde que exigamos que  $A(t)$  seja real e que  $P(t+2T) = P(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .*

**Observação:** Do Teorema 3.7.2 segue que toda solução de  $\dot{x} = A(t)x$ , com  $A(t)$   $T$ -periódica, é combinação linear de termos da forma  $p(t)t^m e^{\lambda t}$  com  $p(t+T) = p(t)$ .

Basta portanto observar que se  $J$  é forma canônica de Jordan de  $B$  então  $P(t)e^{Bt} = P(t)C^{-1}e^{Jt}C$  e daí segue o resultado.

**Definição 3.7.1** (Matriz Monodromia). *Uma matriz monodromia é qualquer matriz não singular  $C$  tal que  $X(t+T) = X(t)C$ .*

Se  $X(t)$  mp então  $X(T) = C = e^{BT}$ .

**Definição 3.7.2** (Multiplicadores Característicos). *Os multiplicadores característicos são os autovalores de uma matriz monodromia  $C$ .*

**Observação:** Se  $X(t)$  é mp então os multiplicadores característicos serão os autovalores de  $X(T)$ .

**Observação:** Se  $X(t)$  e  $Y(t)$  são mf de (H) e  $X(t+T) = X(t)C$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , então existe matriz não singular  $D$  tal que  $Y(t) = X(t)D$ . Logo  $Y(t+T) = X(t+T)D = X(t)CD = Y(t)D^{-1}CD$  e assim  $D^{-1}CD$  é matriz monodromia relativamente a  $Y(t)$ .

Assim as matrizes monodromias relativas a matrizes fundamentais são similares, possuindo assim os mesmos autovalores.

Concluimos assim que os multiplicadores característicos são unívocamente determinados.

**Definição 3.7.3** (Expoente Característico). *Um expoente característico é qualquer número complexo  $\lambda$  tal que  $e^{\lambda T}$  é multiplicador característico.*

**Observação:** Se  $\lambda$  é expoente característico então  $\lambda + \frac{2n\pi i}{T}$  também é expoente característico pois  $e^{(\lambda + \frac{2n\pi i}{T})T} = e^{\lambda T + 2n\pi i} = e^{\lambda T}$ .

Assim  $\lambda \in \mathbb{C}$  é expoente característico se, e somente se,  $e^{\lambda T}$  é autovalor de  $e^{BT}$ .

**Lema 3.7.4.** (a).  $\lambda \in \mathbb{C}$  é expoente característico se e somente se existe solução não trivial de (H) da forma  $p(t)e^{\lambda t}$  com  $p(t+T) = p(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

(b). *Existe solução  $T$ -periódica não trivial se e somente se  $+1$  é multiplicador característico.*

(c). *Existe solução  $2T$ -periódica mas não  $T$ -periódica se e somente se  $-1$  é multiplicador característico.*

**Demonstração.** (a) ( $\Leftarrow$ ). Supomos que  $e^{\lambda t}p(t) \neq 0$  é solução de (H) com  $p(t)$   $T$ -periódica.

Assim existe  $x_0 \neq 0$  tal que  $p(t)e^{\lambda t} = P(t)e^{Bt}x_0$ . Logo  $p(t) = P(t)e^{(B-\lambda I)t}x_0$ . Assim,

$$p(0) = p(T) \Rightarrow e^{(B-\lambda I)T}x_0 = x_0 \Rightarrow e^{BT}x_0 = e^{\lambda T}x_0.$$

Assim  $\lambda$  é expoente característico.

( $\Rightarrow$ ).  $\lambda$  expoente característico  $\Rightarrow e^{\lambda T}$  número característico  $\Rightarrow$  existe  $x_0 \neq 0$  tal que  $e^{(B-\lambda I)T}x_0 = x_0$ .

Consideremos então a solução  $P(t)e^{Bt}x_0$  e tomamos  $p(t) \stackrel{def}{=} P(t)e^{(B-\lambda I)t}x_0$ . Assim,

$$\begin{aligned} p(t+T) &= P(t+T)e^{(B-\lambda I)(t+T)}x_0 = P(t)e^{(B-\lambda I)t}e^{(B-\lambda I)T}x_0 \\ &= P(t)e^{(B-\lambda I)t}x_0 = p(t) \end{aligned}$$

(b) ( $\Leftarrow$ ).  $1 = \text{multiplicador característico} \Rightarrow 0 = \text{expoente característico} \stackrel{(a)}{\Rightarrow}$  existe solução da forma  $p(t)e^{0t} = p(t)$ ,  $T$ -periódica.

( $\Rightarrow$ ). Seja  $P(t)e^{Bt}x_0$  solução  $T$ -periódica. Logo  $P(0)e^{B0}x_0 = P(T)e^{BT}x_0$  e daí  $e^{BT}x_0 = x_0$ . Assim  $1$  é multiplicador característico.

(c) ( $\Leftarrow$ ).  $-1 = e^{(\frac{\pi i}{T})T} = \text{multiplicador característico} \Rightarrow \frac{\pi i}{T} = \text{expoente característico} \stackrel{(a)}{\Rightarrow}$  existe solução da forma  $p(t)e^{(\frac{\pi i}{T})t}$  que é  $2T$ -periódica mas não é  $T$ -periódica.

( $\Rightarrow$ ). Supomos que existe solução  $P(t)e^{Bt}x_0$   $2T$ -periódica que não é  $T$ -periódica. Podemos supor essa solução na forma  $P(t)e^{Jt}x_0$  onde  $J$  está na forma canônica de Jordan. Como é  $2T$ -periódica então  $P(2T)e^{J2T}x_0 = P(0)x_0$  e daí  $e^{2TJ}x_0 = x_0$  e assim para todo bloco de Jordan  $J_i$  temos  $e^{2TJ_i}x_0^i = x_0^i$ .

Por outro lado como a solução não é  $T$ -periódica existe  $j$  tal que  $e^{TJ_j}x_0^j \neq x_0^j$ . Daí segue que existe um bloco que ainda indicaremos por  $J$  e vetor  $x$  tal que  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , tal que

$e^{2TJ}x = x$  mas  $e^{TJ}x \neq x$ , onde

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad e^{2TJ} = e^{2T\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 2T & \cdots & \frac{(2T)^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & \frac{(2T)^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2T \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

O caso em que  $\dim J = 1$  é mais simples e será feito a seguir.

Garantimos que  $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$  e  $x_1 \neq 0$ . Suponhamos que  $x_n \neq 0$ ,  $n \geq 2$ . De  $e^{2TJ}x = x$  segue que  $e^{2T\lambda}x_n = x_n$ . Logo  $e^{2T\lambda} = 1$ . Também multiplicando a penúltima linha de  $e^{2TJ}$  por  $x$  temos:  $e^{2T\lambda}(x_{n-1} + 2Tx_n) = x_{n-1}$ ,  $2Tx_n = 0$  absurdo.

Supomos agora  $x_n = 0$  e  $x_{n-1} \neq 0$  com  $n \geq 3$ . De  $e^{2TJ}x = x$  temos  $e^{2T\lambda}x_{n-1} = x_{n-1}$ . Daí  $e^{2T\lambda} = 1$ . Também  $e^{2T\lambda}(x_{n-2} + 2Tx_{n-1}) = x_{n-2}$  e daí  $x_{n-1} = 0$  o que é uma contradição.

Provamos assim que  $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$ . Como  $x \neq 0$  temos que  $x_1 \neq 0$  e

$$e^{2T\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 2T & \cdots & \frac{(2T)^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & \frac{(2T)^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2T \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

implica que  $e^{2T\lambda} = 1$  mas  $e^{T\lambda}x_1 \neq x_1$ . Assim  $2T\lambda = 2m\pi i$ . Logo  $\lambda = \frac{m\pi i}{T}$ .

Afirmo que  $m$  não pode ser par. Se  $m$  fosse par teríamos  $e^{\lambda T} = e^{\frac{m\pi i}{T}T} = 1$  o que é uma contradição.

Logo  $m$  é ímpar e daí  $e^{\lambda T} = -1$  e então  $-1$  é multiplicador característico.  $\square$

**Lema 3.7.5.** Se  $\rho_j = e^{\lambda_j T}$ ,  $j = 1, \dots, n$  são os multiplicadores característicos de  $\dot{x} = A(t)x$ ,  $A(t+T) = A(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , então

$$\prod_{j=1}^n \rho_j = e^{\int_0^T \text{tr} A(s) ds}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = \frac{1}{T} \int_0^T \text{tr} A(s) ds \pmod{\frac{2\pi i}{T}}$$

**Demonstração.** Se  $X(t)$  é mp então da fórmula de Liouville temos

$$\prod_{j=1}^n \rho_j = \det X(T) = \det X(0) e^{\int_0^T \text{tr} A(s) ds}.$$

Como  $\rho = e^{\lambda t}$  temos que

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = \frac{1}{T} \int_0^T \text{tr} A(s) ds \pmod{\frac{2\pi i}{T}}.$$

$\square$

**Teorema 3.7.6.** Consideremos  $\dot{x} = A(t)x$  onde  $A(t)$ ,  $n \times n$  é contínua para  $t \in \mathbb{R}$ ,  $A(t+T) = A(t)$ ,  $T > 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Então

(i). Toda solução é limitada em  $[0, \infty)$  se e somente se todos os multiplicadores característicos tem módulo  $\leq 1$  (expoente característico tem parte real  $\leq 0$ ) e aqueles que têm módulo = 1 tem divisores elementares simples.

(ii). Se os multiplicadores característicos têm módulo  $< 1$  (expoente característico  $< 0$ ) então existe uma constante  $\alpha > 0$  tal que

$$|X(t)X^{-1}(s)| \leq K e^{-\alpha(t-s)}, \quad t \geq s.$$

**Demonstração.** Exercício.  $\square$

**Exemplo 3.7.7** (Hale, pg. 121). Seja  $\ddot{y} + (a + \phi(t))y = 0$ ,  $\phi(t + \pi) = \phi(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Esta equação pode ser escrita como

$$\dot{x} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\phi(t) & 0 \end{pmatrix} \right] x.$$

Seja  $X(t)$  mp. Os multiplicadores característicos são soluções de  $\det(X(\pi) - \rho I) = 0$ , onde

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}.$$



Daí segue  $\rho^2 - [x_1(\pi) + \dot{x}_2(\pi)]\rho + x_1(\pi)\dot{x}_2(\pi) - \dot{x}_1(\pi)x_2(\pi) = 0$ ,  $2B(a) = \text{tr}X(\pi)$ . Assim os números característicos são soluções de  $\rho^2 - 2B(a)\rho + 1 = 0$  e  $B(a) = x_1(\pi) + \dot{x}_2(\pi)$ .

Do Lema 3.7.4 segue que se  $\rho_1, \rho_2$  são os expoentes característicos então  $\rho_1 \cdot \rho_2 = 1$ . Assim todas as soluções de

$$\dot{x} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\phi(t) & 0 \end{pmatrix} \right] x.$$

são limitadas em  $\mathbb{R}$  se e somente se  $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$

**Exercício 3.7.3.** Seja  $A(t)$  definida por

$$A(t) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha < \beta \text{ para } 0 \leq t < T - \delta$$

e

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2\delta} \\ -\frac{\pi}{2\delta} & 0 \end{pmatrix} \text{ para } T - \delta \leq t < T$$

onde  $\delta < T$  e  $A(t)$  é  $T$ -periódica. Mostre que os números característicos de  $\dot{x} = A(t)x$  são em modulo menores que 1.



# Estabilidade e instabilidade

## 4.1 Estabilidade de sistemas lineares com coeficientes constantes

Consideremos o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = Ax \tag{H}$$

onde  $A$  é uma matriz complexa  $n \times n$ .

**Teorema 4.1.1.** (i). *O sistema (H) é estável se e somente se todos os autovalores de  $A$  têm parte real  $\leq 0$  e se aqueles que têm parte real  $= 0$  têm divisores elementares simples.*

(ii) *O sistema (H) é assintoticamente estável se e somente se todos os autovalores de  $A$  têm parte real  $< 0$ .*

**Demonstração.** (i). ( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que os autovalores de  $A$  têm parte real  $\leq 0$  e os que têm parte real  $= 0$  tem divisores elementares simples.

Como visto anteriormente existe  $K > 0$  tal que  $|e^{At}x_0| \leq Kt^{m-1}e^{-0t}|x_0|$ ,  $t \geq 1$  sendo que neste caso  $m = 1$ .

Assim  $e^{At}x_0$  é limitada para  $t \geq 0$  para todo  $x_0$ . Logo conclui-se que (H) é estável.

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos agora que o sistema é estável. Se existir autovalor  $\lambda$  com parte real  $> 0$  e se  $v$  é autovetor associado, então  $e^{\lambda t}v$  é uma solução não limitada para  $t \geq 0$ , o que contraria a estabilidade.

Suponhamos que exista autovalor  $\lambda$  com  $\text{Re } \lambda = 0$ , que não tenha divisores elementares simples. Então  $N(A - \lambda I)^2 \supsetneq N(A - \lambda I)$ . Assim existe vetor  $v$  tal que  $(A - \lambda I)^2 v = 0$  e  $(A - \lambda I)v \neq 0$ .

$$\begin{aligned} e^{At}v &= e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t}v = e^{\lambda t}[I + (A - \lambda I)t + \dots]v \\ &= e^{\lambda t}[I + t(A - \lambda I)]v \end{aligned}$$

que é uma solução não limitada.

(ii). ( $\Leftarrow$ ) Do Lema 3.5.12 segue que existem  $\alpha$ ,  $K > 0$  tal que  $|e^{At}x_0| \leq Ke^{-\alpha t}|x_0|$ ,  $t \geq 0$ . Daí segue a estabilidade assintótica.

( $\Rightarrow$ ) Se existir algum autovalor  $\lambda$  com  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$  e  $v$  é autovetor associado então  $e^{\lambda t}v$  não tende a zero, quando  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

## 4.2 Estabilidade de sistemas lineares e perturbados

Seja  $A(t)$  uma matriz de ordem  $n \times n$  e contínua em  $\mathbb{R}$ . Consideremos o sistema

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (\text{H})$$

Devido à linearidade de  $x_0 \rightarrow x(t, t_0, x_0)$ , neste caso, temos que a estabilidade de uma solução qualquer de (H) é equivalente à estabilidade da solução nula de (H) (prove!).

**Teorema 4.2.1.** *Seja  $X(t)$  mf de (H). Então*

(i) (H) é estável se e somente se  $X(t)$  é limitada para  $t \geq 0$ .

(ii) (H) é uniformemente estável se e somente se  $X(t)X^{-1}(s)$  é limitada em

$$\{(t, s) \in [0, \infty) \times [0, \infty) : t \geq s\}.$$

(iii) (H) é assintoticamente estável se e somente se  $X(t) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ .

(iv) (H) é uniformemente assintoticamente estável se e somente se existem constantes  $\alpha$ ,  $K > 0$  tal que

$$|X(t)X^{-1}(s)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad t \geq s \geq 0.$$

**Demonstração.** (i) ( $\Rightarrow$ ) Observamos que  $x(t, 0, x_0) = X(t)X^{-1}(0)x_0$ . Logo existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x_0| < \delta \Rightarrow |X(t)X^{-1}(0)x_0| < 1, \quad t \geq 0.$$

Se  $|y_0| < 1$  então  $|\delta y_0| < \delta$  e  $|X(t)X^{-1}(0)\delta y_0| < 1$ . Logo

$$|X(t)X^{-1}(0)| = \sup_{|y_0| < 1} |X(t)X^{-1}(0)y_0| \leq 1/\delta.$$

Daí segue que  $X(t) = |X(t)X^{-1}(0)X(0)|$  é limitada para  $t \geq 0$ .

( $\Leftarrow$ ). Seja  $K$  tal que  $|X(t)| \leq K$ ,  $t \geq 0$ . Logo  $|X(t)X^{-1}(t_0)x_0| \leq K|X^{-1}(t_0)x_0|$ . Daí segue a estabilidade, pois dado  $\epsilon > 0$  tomamos  $\delta < \frac{\epsilon}{K|X^{-1}(t_0)|}$ ,  $\delta = \delta(t_0, \epsilon)$ .

(ii). ( $\Rightarrow$ ) Existe  $\delta > 0$  (independente de  $t_0$ ) tal que  $|x_0| < \delta \Rightarrow |X(t)X^{-1}(t_0)x_0| < 1$ ,  $t \geq t_0$ . Dado  $|y_0| < 1$ ,  $|X(t)X^{-1}(t_0)\delta y_0| < 1$ ,  $t \geq t_0$ , daí  $|X(t)X^{-1}(t_0)y_0| < 1/\delta$ . Logo  $|X(t)X^{-1}(t_0)| = \sup_{|y_0| < 1} |X(t)X^{-1}(t_0)y_0| \leq 1/\delta$  para  $t \geq t_0$ .

( $\Leftarrow$ ). Seja  $K$  tal que  $|X(t)X^{-1}(t_0)| \leq K$ , para  $t \geq t_0 \geq 0$ . Dado  $\epsilon > 0$ , tomamos  $\delta = \epsilon/K$  e daí segue que (H) é U.S.

(iii). ( $\Rightarrow$ ) Seja

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De A.S. segue que existe  $\rho(t_0) > 0$  tal que  $|x_0| \leq \rho$ . Então  $|x(t, t_0, x_0)| = |X(t)X^{-1}(t_0)x_0| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ . Assim  $X(t)X^{-1}(t_0)\rho e_i \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ . Logo  $X(t)X^{-1}(t_0) \rightarrow 0$  e daí  $X(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .

( $\Leftarrow$ ). Como  $X(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$  e é contínua em  $[0, \infty)$ , temos que  $X(t)$  é limitada. Daí segue a estabilidade.

Dado  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é fácil ver que  $X(t)X^{-1}(t_0)x_0 \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .

(iv). ( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que existem  $\alpha, K > 0$  tal que

$$|X(t)X^{-1}(t_0)x_0| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|x_0|, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Dado  $\epsilon > 0$ , tomamos  $T = \frac{\ln(K/\epsilon)}{\alpha}$  assim para  $t \geq t_0 + T$  temos

$$-\alpha(t - t_0) \leq -\alpha T = -\ln(K/\epsilon) = \ln(\epsilon/K).$$

Logo

$$|X(t)X^{-1}(t_0)x_0| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|x_0| \leq (K\epsilon/K)|x_0|.$$

Fazendo  $|x_0| < 1$  segue que  $|x(t, t_0, x_0)| \leq \epsilon$ , para  $t \geq t_0 + T$ .

É trivial demonstrar que (H) é US.

( $\Rightarrow$ ). Mostremos primeiro que dado  $\eta > 0, \exists T = T(\eta)$  tal que se  $t \geq \tau + T$  então  $|X(t)X^{-1}(\tau)| \leq \eta$ .

UAS  $\Rightarrow \exists \rho > 0$  de modo que, dado  $\eta > 0$ , existe  $T = T(\eta) > 0$  tal que  $|X(t)X^{-1}(\tau)x_0| < \eta\rho$  se  $t \geq \tau + T$  e  $|x_0| \leq \rho$ .

Se  $|x_0| < 1$  então  $|X(t)X^{-1}(\tau)\rho x_0| < \eta\rho$  e daí  $|X(t)X^{-1}(\tau)x_0| < (\rho\eta)/\rho = \eta$ . Daí segue que  $|X(t)X^{-1}(\tau)| \leq \eta, t \geq \tau + T$ .

Tomemos  $\eta < 1$ . US.  $\Rightarrow \exists M > 0$  tal que  $|X(t)X^{-1}(\tau)| \leq M, t \geq \tau \geq 0$ . Logo

$$|X(\tau + 2T)X^{-1}(\tau)| \leq |X(\tau + 2T)X^{-1}(\tau + T)| |X(\tau + T)X^{-1}(\tau)| \leq \eta^2.$$

Mais geralmente

$$|X(\tau + kT)X^{-1}(\tau)| \leq \eta^k, \text{ para } k \geq 1.$$

Fixemos  $t, s$  com  $t \geq s$ . Existe inteiro  $k$  tal que  $kT \leq t - s \leq (k + 1)T$ . Logo  $-\alpha(t - s) \geq -\alpha(kT + T)$  e daí

$$e^{-\alpha(t-s)}e^{\alpha T} \geq e^{-\alpha kT}. \quad (4.1)$$

Logo,

$$\begin{aligned} |X(t)X^{-1}(s)| &\leq |X(t)X^{-1}(s+kT)| |X(s+kT)X^{-1}(s)| \\ &\leq M\eta^k = Me^{k\ln\eta}, \quad t \geq s+kT. \end{aligned}$$

Tomando  $0 > -\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln \eta}{T}$ , temos

$$\begin{aligned} |X(t)X^{-1}(s)| &\leq Me^{-\alpha kT} \stackrel{(4.1)}{\leq} Me^{-\alpha(t-s-T)} \\ &\leq Me^{\alpha T} e^{-\alpha(t-s)} \\ &\leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad t \geq s \geq 0, \end{aligned}$$

onde  $K := Me^{\alpha T}$ . □

### 4.2.1 Estabilidade de sistemas perturbados

**Teorema 4.2.2.** *Suponhamos que (H) é US e que  $\int_0^{\infty} |B(s)| ds < \infty$ . Então*

$$\dot{x} = [A(t) + B(t)]x \tag{4.2}$$

é US, onde  $B(t)$  é uma matriz de ordem  $n \times n$ , contínua para  $t \geq 0$ .

**Demonstração.** Seja  $\varphi(t) = x(t, t_0, x_0)$  solução de  $\dot{y} = A(t)y + B(t)\varphi(t)$ . Da fórmula da variação das constantes, temos

$$\varphi(t) = X(t)[X^{-1}(t_0)\varphi(t_0) + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)B(s)\varphi(s)ds]$$

onde  $X(t)$  é mf de (H). Logo

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &\leq |X(t)X^{-1}(t_0)| |\varphi(t_0)| + \int_{t_0}^t |X(t)X^{-1}(s)| |B(s)| |\varphi(s)| ds, \quad \text{para } t \geq t_0 \\ &\leq K|\varphi(t_0)| + \int_{t_0}^t K|B(s)| |\varphi(s)| ds, \quad \text{para } t \geq t_0. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Gronwall segue que:

$$|\varphi(t)| \leq K|\varphi(t_0)| e^{K \int_{t_0}^t |B(s)| ds} \leq K|\varphi(t_0)| e^{K \int_{t_0}^{\infty} |B(s)| ds}$$

Daí decorre que  $\dot{x} = [A(t) + B(t)]x$  é U.S. □

**Teorema 4.2.3.** *Suponhamos que (H) é UAS. Seja  $B(t)$  matriz  $n \times n$  contínua para  $t \geq 0$ .*

*Se  $\int_{t_0}^t |B(s)| ds \leq \gamma(t - t_0) + \tau$ ,  $t \geq t_0 \geq 0$ . Então existe  $r > 0$  tal que se  $\gamma < r$  então*

$$\dot{x} = [A(t) + B(t)]x$$

*é UAS.*

**Demonstração.** Como anteriormente

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &\leq |X(t)X^{-1}(t_0)| |\varphi(t_0)| + \int_{t_0}^t |X(t)X^{-1}(s)| |B(s)| |\varphi(s)| ds, \text{ para } t \geq t_0 \\ &\leq Ke^{-\alpha(t-t_0)} |\varphi(t_0)| + \int_{t_0}^t Ke^{-\alpha(t-s)} |B(s)| |\varphi(s)| ds \\ e^{\alpha t} |\varphi(t)| &\leq Ke^{\alpha t_0} |\varphi(t_0)| + \int_{t_0}^t Ke^{\alpha s} |B(s)| |\varphi(s)| ds. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Gronwall, segue que

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} |\varphi(t)| &\leq Ke^{\alpha t_0} |\varphi(t_0)| e^{K \int_{t_0}^t |B(s)| ds} \\ |\varphi(t)| &\leq Ke^{-\alpha(t-t_0)} |\varphi(t_0)| e^{K(\gamma(t-t_0)+\tau)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$|\varphi(t)| \leq Ke^{K\tau} e^{-(\alpha-K\gamma)(t-t_0)}, \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

Se  $\gamma < \frac{\alpha}{K}$  teremos que  $\dot{x} = [A(t) + B(t)]x$  é U.A.S. □

**Teorema 4.2.4.** *Suponhamos que (H) é UAS. Se  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua, localmente Lipschitziana e se dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon)$  tal que  $|x| < \delta \Rightarrow |f(t, x)| \leq \epsilon|x|$ ,  $t \geq 0$  então a solução  $x = 0$  de*

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x) \tag{P}$$

*é UAS.*

**Demonstração.** Seja  $x_0$  tal que  $|x_0| < \delta$ ,  $t_0 \geq 0$  e  $[t_0, w)$  o intervalo maximal existência à direita de  $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ . Seja  $t_0 \leq a = a(x_0) \leq w$  tal que  $[t_0, a)$  é o maior intervalo tal que  $|x(t)| < \delta$ , para  $t \in [t_0, a)$ . Assim para  $t \in [t_0, a)$ ,

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)f(s, x(s))ds.$$

Logo

$$|x(t)| \leq K e^{-\alpha(t-t_0)} |x_0| + \int_{t_0}^t K e^{-\alpha(t-s)} \epsilon |x(s)| ds.$$

Da desigualdade de Gronwall, supondo  $\alpha > K\epsilon$ , temos

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq K e^{-\alpha(t-t_0)} e^{K\epsilon(t-t_0)} |x_0| \\ &\leq K e^{-(\alpha-K\epsilon)(t-t_0)} |x_0| \\ &\leq K |x_0|. \end{aligned}$$

Supomos  $\alpha > K\epsilon$ , i.é,  $\epsilon < \frac{\alpha}{K}$ . Tomando  $0 < \sigma < \frac{\delta}{2K}$  temos que  $|x_0| < \sigma \Rightarrow |x(t)| \leq K \frac{\delta}{2K} = \frac{\delta}{2}$ , para  $t \in [t_0, a)$ . Assim para  $t \in [t_0, a)$ ,  $|x(t)| < \frac{\delta}{2}$ . Assim  $a = w$  e  $w = +\infty$ .

Concluimos que

$$|x(t)| \leq K e^{-(\alpha-K\epsilon)(t-t_0)} |x_0| \leq K |x_0|, \text{ para } t \geq t_0.$$

Daí decorre (como já foi feito antes) que (P) é UAS. □

**Aplicação:**  $\dot{x} = A(t)x + f(t, x)$ ,  $f(t, x) = o(|x|)$ ,  $|x| \rightarrow 0$

**Observação:** Apesar de os resultados serem relativamente simples é preciso tomar cuidado pois certas perturbações aparentemente pequenas podem destruir a estabilidade.

Ver o exemplo a seguir

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

é US.

Consideremos o sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2/t \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t - t \cos t \\ t \sin t \end{pmatrix}$$

é solução de (4.4) e é não limitada para  $t \geq 0$ . Logo (4.4) não é estável.

Observamos que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2/t \end{pmatrix}$$

fica pequeno para valores grandes.

Ver outro exemplo Hale, pag. 87 e Coppel.



## 4.3 A propriedade do ponto de sela

### 4.3.1 Motivação

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 \\ \dot{y}_2 = -y_2 \end{cases} \quad (\text{H})$$

cujo retrato de fase é apresentado na Figura 4.1.

Figura 4.1: Retrato de fase de (H)

Consideremos agora o sistema perturbado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^3 \end{cases} \quad (\text{P})$$

Figura 4.2: Retrato de fase de (P)

A solução de (P) que para  $t = 0$  vale  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  é dada por

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^t a \\ x_2(t) &= e^{-t} \left( b - \frac{a^3}{4} \right) + \frac{a^3}{4} e^{3t}. \end{aligned}$$

Temos que  $x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \Leftrightarrow a = 0$  e  $x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty \Leftrightarrow b = \frac{a^3}{4}$ . Mais precisamente se  $a \neq 0$  então  $|x(t)| \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$ .

Se  $b = \frac{a^3}{4}$  então  $x_2(t) = \frac{x_1^3(t)}{4}$ . O retrato de fase de (P) é mostrado na Figura 4.2. Pode-se nela observar o efeito da perturbação.

Começemos analisando um sistema autônomo

$$\dot{x} = Ax \quad (\text{H})$$

com  $A$   $n \times n$ , complexa.

Supomos que existam  $k$  autovalores (não necessariamente distintos) com parte real positiva e que  $A$  não tenha autovalores com parte real zero.

Então  $\mathbb{C}^n$  pode ser descomposto como  $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}_+^n \oplus \mathbb{C}_-^n$  onde

$$\mathbb{C}_+^n = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma(A) \\ \operatorname{Re} \lambda > 0}} \mathcal{M}_\lambda(A), \quad \mathbb{C}_-^n = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma(A) \\ \operatorname{Re} \lambda < 0}} \mathcal{M}_\lambda(A)$$

onde  $\sigma(A)$  indica o espectro de  $A$ , ou o conjunto de autovalores de  $A$  e  $\mathcal{M}_\lambda(A)$  indica o autoespaço generalizado associado a  $\lambda$ .

Vimos anteriormente  $\mathbb{C}_+^n$  e  $\mathbb{C}_-^n$ , respectivamente variedade instável e variedade estável de (H), são invariantes com relação a  $A$  e  $e^{At}$ . Sejam  $\Pi_+$  e  $\Pi_-$  as projeções definidas pela decomposição acima.

Logo temos que existem constantes  $K, \alpha > 0$  tal que

$$\begin{aligned} |e^{At}\Pi_+x_0| &\leq Ke^{\alpha t}|x_0|, \quad t \leq 0 \\ |e^{At}\Pi_-x_0| &\leq Ke^{-\alpha t}|x_0|, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Figura 4.3: ???

Vamos provar a seguir, que se  $f(x)$  for pequena para  $x$  próximo de zero, então existe variedade estável (S) e variedade instável (U), locais de  $\dot{x} = Ax + f(x)$  (P).

**Lema 4.3.1.** *Seja  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  contínua e supomos que  $A$  não tenha autovalores com parte real zero. Sejam  $\Pi_+$  e  $\Pi_-$  as projeções definidas acima. Se  $x(t)$  é solução de (P), limitada para  $t \geq 0$  (resp.  $t \leq 0$ ) então existe  $x_- \in \mathbb{C}_-^n$  tal que  $x(t)$  satisfaz à equação integral*

$$x(t) = e^{At}x_- + \int_0^t e^{A(t-s)}\Pi_-f(x(s))ds + \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)}\Pi_+f(x(s))ds, \quad t \geq 0$$

$$(resp. \ x(t) = e^{At}x_+ + \int_0^t e^{A(t-s)}\Pi_+f(x(s))ds + \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)}\Pi_-f(x(s))ds, \quad t \leq 0).$$

Reciprocamente, se  $x(t)$  é contínua e limitada para  $t \geq 0$  e satisfaz a equação integral acima então  $x(t)$  é solução de (P).

**Demonstração.** Suponhamos que  $x(t)$  é solução de (P) limitada para  $t \geq 0$ . Da fórmula da variação das constantes temos

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}f(x(s))ds.$$

Daí segue que

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}\Pi_-f(x(s))ds + \int_0^t e^{A(t-s)}\Pi_+f(x(s))ds \\
 &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}\Pi_-f(x(s))ds + \int_0^\infty e^{A(t-s)}\Pi_+f(x(s))ds + \int_\infty^t e^{A(t-s)}\Pi_+f(x(s))ds \\
 &= e^{At}[x(0) + \int_0^\infty e^{-As}\Pi_+f(x(s))ds] + \int_0^t e^{A(t-s)}\Pi_-f(x(s))ds + \int_\infty^t e^{A(t-s)}\Pi_+f(x(s))ds.
 \end{aligned}$$

A convergência absoluta das integrais acima segue do argumento abaixo.

Garantimos que as duas últimas integrais dão funções limitadas de  $t$  para  $t \geq 0$ . De fato,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^t e^{A(t-s)}\Pi_-f(x(s))ds \right| &\leq \int_0^t |e^{A(t-s)}\Pi_-||f(x(s))|ds \\
 &\leq K \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}|f(x(s))|ds.
 \end{aligned}$$

Como  $f$  é contínua em  $\mathbb{C}^n$  ela leva conjuntos limitados em conjuntos limitados de  $\mathbb{C}^n$ . Daí

$$\sup_{s \in [0, \infty)} |f(x(s))| < \infty.$$

Logo

$$\left| \int_0^t e^{A(t-s)}\Pi_-f(x(s))ds \right| \leq \frac{K}{\alpha} e^{-\alpha t} [e^{\alpha t} - 1] \sup_{s \in [0, \infty)} |f(x(s))| \leq \frac{K}{\alpha} \sup_{s \in [0, \infty)} |f(x(s))|.$$

Como  $x(t)$  é limitada para  $t \geq 0$ , temos que  $e^{At}[x(0) + \int_0^\infty f(x(s))ds]$  é limitada para  $t \geq 0$ .

Daí decorre que  $x(0) + \int_0^\infty f(x(s))ds \in \mathbb{C}_-^n$ .

Suponhamos agora que  $x(t)$  é solução da equação integral, contínua e limitada para  $t \geq 0$ . Uma análise direta na equação integral mostra que  $x(t)$  é solução de (P).  $\square$

**Exercício 4.3.1.** Mostre que se  $c \in \mathbb{C}_+^n$ ,  $c \neq 0$ , então  $|e^{At}c| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Sugestão:**  $\Pi_+c = c \neq 0$ ,  $t \geq 0$

$$|c| \leq |e^{A(-t)}e^{At}c| \leq Ke^{-\gamma t}|e^{At}c|$$

então

$$|e^{At}c| \geq \frac{1}{K}|c|e^{\gamma t}, \quad t \geq 0.$$

**Exercício 4.3.2.** Mostre que se  $\Pi_+x_0 \neq 0$  então  $|e^{At}x_0| \geq Ne^{\gamma t}$ , onde  $N, \gamma > 0$  e  $t \geq 0$ .

### 4.3.2 Desigualdade integral

**Lema 4.3.2.** Sejam  $\alpha, \gamma > 0$ ,  $K, L, M \geq 0$  e  $u(t)$  solução não negativa contínua e limitada para  $t \geq 0$

$$u(t) \leq Ke^{-\alpha t} + L \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}u(s)ds + M \int_t^\infty e^{\gamma(t-s)}u(s)ds. \quad (4.5)$$

Supomos que  $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L}{\alpha} + \frac{M}{\gamma} < 1$ . Então

$$u(t) \leq \frac{1}{1-\beta}Ke^{-(\alpha-\frac{L}{1-\beta})t}, \quad t \geq 0.$$

Se  $u(t)$  é solução não negativa e limitada para  $t \leq 0$  de

$$u(t) \leq Ke^{\alpha t} + L \int_t^0 e^{\alpha(t-s)}u(s)ds + M \int_\infty^t e^{-\gamma(t-s)}u(s)ds. \quad (4.6)$$

então

$$u(t) \leq \frac{1}{1-\beta}Ke^{(\alpha-\frac{L}{1-\beta})t}, \quad t \leq 0.$$

**Demonstração.** Analisaremos somente (4.5). Mostremos primeiro que  $u(t) \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . Seja  $\delta = \limsup_{t \rightarrow \infty} u(t)$ . Supomos que  $\delta > 0$ . Então existe  $t_1 > 0$  tal que  $u(t) \leq \frac{\delta}{\theta}$ , onde  $\beta < \theta < 1$ , para  $t \geq t_1$ .

Figura 4.4:  $\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) = \delta$

Assim para  $t \geq t_1$  temos

$$\begin{aligned} u(t) &\leq Ke^{-\alpha t} + L \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} u(s) ds + M \int_t^\infty e^{\gamma(t-s)} u(s) ds \\ &\leq Ke^{-\alpha t} + L \int_0^{t_1} e^{-\alpha(t-s)} u(s) ds + \frac{M\delta}{\gamma\theta} + L \int_{t_1}^t e^{-\alpha(t-s)} u(s) ds \\ &\leq Ke^{-\alpha t} + L \int_0^{t_1} e^{-\alpha(t-s)} u(s) ds + \left(\frac{L}{\alpha} + \frac{M}{\gamma}\right) \frac{\delta}{\theta} \end{aligned}$$

$\delta = \limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) \leq \beta \frac{\delta}{\theta} < \delta$  o que é uma contradição. Logo  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ .

Seja agora  $v(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{s \geq t} u(s)$ . Temos que  $v(t)$  está bem definida e é decrescente.

Dado  $t \in [0, \infty)$  existe  $t_1 \geq t$  tal que  $v(t) = v(s) = u(t_1)$ , para  $t \leq s \leq t_1$  e  $v(s) < v(t_1)$  se  $s > t_1$ . Isto segue do fato que  $u(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Figura 4.5:  $v(t)$

Logo, como  $t_1 \geq t$ , temos

$$\begin{aligned} v(t) = u(t_1) &\leq Ke^{-\alpha t_1} + L \int_0^{t_1} e^{-\alpha(t_1-s)} u(s) ds + M \int_{t_1}^\infty e^{\gamma(t_1-s)} u(s) ds \\ &\leq Ke^{-\alpha t_1} + L \int_0^t e^{-\alpha(t_1-s)} v(s) ds + L \int_t^{t_1} e^{-\alpha(t_1-s)} v(s) ds \\ &\quad + M \int_t^\infty e^{\gamma(t_1-s)} v(s) ds \\ &\leq Ke^{-\alpha t_1} + L \int_0^t e^{-\alpha(t_1-s)} v(s) ds + \left(\frac{L}{\alpha} + \frac{M}{\gamma}\right) v(t) \\ &\leq Ke^{-\alpha t} + L \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} v(s) ds + \beta v(t). \end{aligned}$$

Assim

$$(1 - \beta)v(t) \leq Ke^{-\alpha t} + L \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} v(s) ds.$$

Da desigualdade de Gronwall segue que

$$v(t) \leq \frac{K}{1-\beta} e^{-\alpha t} e^{\int_0^t \frac{L}{1-\beta} ds}.$$

Assim

$$u(t) \leq v(t) \leq \frac{K}{1-\beta} e^{-(\alpha - \frac{L}{1-\beta})t}, \quad t \geq 0.$$

□

Seja  $\eta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  uma função contínua, crescente tal que  $\eta(0) = 0$ . Definimos  $\mathcal{Lip}(\eta) = \{f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n : f(0) = 0, |f(x) - f(y)| \leq \eta(\sigma)|x - y|, \forall x, y \text{ tal que } |x|, |y| \leq \sigma\}$ .

**Exercício 4.3.3.** *Seja  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tal que  $f(0) = 0, f'(0) = 0$ . Mostre que existe  $\eta$  tal que  $f \in \mathcal{Lip}(\eta)$ .*

**Teorema 4.3.3.** *Seja  $f \in \mathcal{Lip}(\eta)$ . Supomos que  $A$  é matriz complexa  $n \times n$  tal que  $A$  não tenha autovalores com parte real zero.*

*Sejam  $\mathbb{C}_+^n$  e  $\mathbb{C}_-^n$  definidos como anteriormente,  $\Pi_+$  e  $\Pi_-$  as projeções correspondentes. Supomos  $K > 1, \alpha > 0$  tais que*

$$\begin{aligned} |e^{At}\Pi_+x_0| &\leq Ke^{\alpha t}|x_0|, \quad t \leq 0 \\ |e^{At}\Pi_-x_0| &\leq Ke^{-\alpha t}|x_0|, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Então existe  $\delta > 0$  e conjunto  $S$ ,

$$S = S_\delta = \{x_0 : |\Pi_-x_0| \leq \frac{\delta}{2K} \text{ e } |x(t, x_0)| \leq \delta, \quad t \geq 0\}$$

onde  $x(t, x_0)$  é a solução do PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (P) \quad (4.7)$$

Além disso  $S$  é homeomorfo (sendo  $\Pi_-|_S$  o homeomorfismo) a uma bola de raio  $\frac{\delta}{2K}$  de  $\mathbb{C}_-^n$ ,  $S$  é tangente a  $\mathbb{C}_-^n$  (isto é,  $\frac{|\Pi_+x|}{|\Pi_-x|} \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow 0, x \in S$ ) e existem constantes  $M, \gamma > 0$  tal que

$$|x(t, x_0)| \leq Me^{-\gamma t}|x_0|, \quad x_0 \in S, \quad t \geq 0.$$

Vale resultado semelhante para variedade instável.

Figura 4.6: Decomposição de  $\mathbb{C}^n$

**Demonstração.** Seja  $L$  tal que  $|\Pi_{\pm}| \leq L$ . Procuraremos soluções limitadas para  $t \geq 0$ . Do lema 4.3.1 segue que existe  $x_- \in \mathbb{C}^n$  tal que

$$x(t) = e^{At}x_- + \int_0^t e^{A(t-s)}\Pi_-f(x(s))ds + \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)}\Pi_+f(x(s))ds.$$

Procuramos soluções pequenas  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , da equação integral acima.

Para cada  $x_- \in \mathbb{C}^n$  seja então  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{x_-}$  o operador definido por

$$(\mathcal{T}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{At}x_- + \int_0^t e^{A(t-s)}\Pi_-f(x(s))ds + \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)}\Pi_+f(x(s))ds.$$

Seja  $\overline{B}_\delta$  a bola fechada de raio  $\delta > 0$  no espaço de Banach

$$\mathcal{BC}([0, \infty), \mathbb{C}^n) = \{\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n : \varphi \text{ é contínua e limitada}\},$$

com a norma do sup.

Mostremos que para  $\delta$  suficientemente pequeno  $\mathcal{T}$  deixa  $\overline{B}_\delta$  invariante. Se  $x(\cdot) \in \overline{B}_\delta$  temos:

$$\begin{aligned} |(\mathcal{T}x)(t)| &\leq Ke^{-\alpha t}|x_-| + K\delta\eta(\delta)e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s}ds + K\delta\eta(\delta)e^{\alpha t} \int_t^\infty e^{-\alpha s}ds \\ &\leq K|x_-| + \frac{2}{\alpha}K\delta\eta(\delta). \end{aligned}$$

Seja  $\delta$  suficientemente pequeno tal que  $\frac{2}{\alpha}K\eta(\delta) < \frac{1}{2}$  e seja  $x_-$  tal que  $K|x_-| \leq \frac{\delta}{2}$  (isto é,  $|x_-| \leq \frac{\delta}{2K}$ ).

Desse modo temos  $|(\mathcal{T}x)(t)| < \delta$ ,  $\forall t \geq 0$  e assim  $\mathcal{T}$  deixa invariante  $\overline{B}_\delta$ , pois a função  $t \rightarrow (\mathcal{T}x)(t)$  é obviamente contínua para  $t \geq 0$ .

Estimativas semelhantes mostram que se  $x, y \in \overline{B}_\delta$  então

$$|(\mathcal{T}x)(t) - (\mathcal{T}y)(t)| \leq \frac{2}{\alpha}K\eta(\delta) \sup_{t \geq 0} |x(t) - y(t)|$$

e assim  $\mathcal{T}$  é uma contração uniforme relativamente a  $x_- \in \overline{B}_{\frac{\delta}{2K}}$ .

Logo existe um único ponto fixo em  $\overline{B}_\delta$ , que indicaremos por  $x^*(t) = x_{x_-}^*(t)$  para  $|x_-| \leq \frac{\delta}{2K}$ .

Consideremos o valor inicial  $x^*(0)$ , que é dado por

$$g(x_-) \stackrel{\text{def}}{=} x_- - \int_0^\infty e^{-As}\Pi_+f(x_{x_-}^*(s))ds.$$

Temos que  $\Pi_-g(x_-) = x_-$ ,  $g : \overline{B}_{\frac{\delta}{2K}} \subset \mathbb{C}_-^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ .

Seja  $\mathcal{S} := g(\overline{B}_{\frac{\delta}{2K}})$ . Temos que  $g$  é bijetiva.

Assim  $g$  é um homeomorfismo. Observamos que quando  $f$  é  $\mathcal{C}^1$  então  $g$  é um difeomorfismo.

Mostremos que  $\mathcal{S} = S$ . Se  $x_0 \in S$  temos que  $|x(t, x_0)| \leq \delta$  e  $|\Pi_-x_0| \leq \frac{\delta}{2K}$ .

Procedendo como na demonstração do lema 4.3.1, temos que

$$x(t, x_0) = e^{At}[x_0 + \int_0^\infty e^{-As}\Pi_+f(x(s))ds] + \int_0^t e^{A(t-s)}\Pi_-f(x(s))ds + \int_\infty^t e^{A(t-s)}\Pi_+f(x(s))ds.$$

Da demonstração do lema 4.3.1 segue também que  $x_0 + \int_0^\infty e^{-As}\Pi_+f(x(s))ds \in \mathbb{C}_-^n$ .

Indiquemos por  $x_-$  esse valor.

Assim  $|x_-| = |\Pi_-x_0| \leq \frac{\delta}{2K}$ . Como para cada  $x_-$ , com  $|x_-| \leq \frac{\delta}{2K}$  existe uma única solução da equação integral de norma  $\leq \delta$ , temos que  $x(t, x_0) = x_{x_-}^*(t)$  e  $g(x_-) = x_- - \int_0^\infty e^{-As}\Pi_+f(x(s))ds = x_0$ . Logo  $x_0 \in g(\overline{B}_{\frac{\delta}{2K}}) = \mathcal{S}$ .

Reciprocamente se  $x_0 \in \mathcal{S}$  então existe  $x_- \in \overline{B}_{\frac{\delta}{2K}}$  tal que  $g(x_-) = x_0$ . Como foi verificado anteriormente,

$$|x_{x_-}^*(t)| = |(Tx^*)_{x_-}(t)| \leq K|x_-| + \frac{2}{\alpha}KL\delta\eta(\delta) < \delta$$

e  $x_{x_-}^*(0) = x_0$ . Logo  $x_0 \in S$ . Assim  $\mathcal{S} = S$ .

O Teorema de Ponto fixo de Banach-Cacciopoli implica que  $x_- \mapsto x_{x_-}^*(\cdot)$  é contínua. Temos também que  $x_0^*(t) = 0$ .

Nosso próximo objetivo é provar que as soluções que começam em  $S$  decaem exponencialmente.

Seja  $x_0 \in S$ , isto é,  $x_0 = g(x_-) = x_- - \int_0^\infty e^{-As}f(x_{x_-}^*(s))ds$ . Como vimos acima  $x(t, x_0) = x_{x_-}^*(t)$ .

Estimativas semelhantes às efetuadas acima mostram que

$$|x(t, x_0)| \leq Ke^{-\alpha t}|x_-| + KL\eta(\delta)e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s}|x(s, x_0)|ds + KL\eta(\delta)e^{\alpha T} \int_0^t e^{-\alpha s}|x(s, x_0)|ds.$$

Como  $\beta = \frac{2}{\alpha}KL\eta(\delta) < \frac{1}{2}$ , para  $\delta$  suficientemente pequeno, temos do Lema 4.3.2 que

$$|x(t, x_0)| \leq \frac{K}{1 - \frac{2}{\alpha}KL\eta(\delta)} e^{-\left[\alpha - \frac{KL\eta(\delta)}{1 - \frac{2}{\alpha}KL\eta(\delta)}\right]t} |x_-|$$



para  $t \geq 0$ . Como  $\Pi_- x_0 = \Pi_- g(x_-) = x_-$  e como  $|\Pi_-| \leq L$  temos  $|x_-| \leq L|x_0|$ .

Para  $\delta$  suficientemente pequeno teremos  $\frac{KL\eta(\delta)}{1-\frac{2}{\alpha}KL\eta(\delta)} < \frac{\alpha}{2}$ . Como  $\frac{2}{\alpha}KL\eta(\delta) < \frac{1}{2}$  temos,

Logo

$$|x(t, x_0)| \leq 2Ke^{-\frac{\alpha}{2}t}|x_-| \leq 2KLe^{-\frac{\alpha}{2}t}|x_0|, \quad t \geq 0 \quad (+)$$

o que prova o decaimento exponencial.

Verifiquemos agora que  $S$  é tangente a  $\mathbb{C}^n$ , pela origem.

$$|g(x_-) - x_-| = \left| \int_0^\infty e^{-As} \Pi_+ f(x_{x_-}^*(s)) ds \right|.$$

Como  $|x^*(s)| = |x(s, x_0)| \stackrel{(+)}{\leq} 2KLe^{-\frac{\alpha}{2}s}|x_-|$  temos

$$\begin{aligned} |g(x_-) - x_-| &\leq KL\eta(2K|x_-|) \int_0^\infty e^{-\alpha s} |x^*(s)| ds \\ &\leq KL\eta(2K|x_-|) 2K \int_0^\infty e^{-\alpha s} e^{-\frac{\alpha}{2}s} |x_-| ds \\ &\leq \frac{KL\eta(2K|x_-|) 2K|x_-|}{\frac{3}{2}\alpha}. \end{aligned}$$

Mas  $|x_-| \leq L|x_0|$  e  $|x_0| = |g(x_-)| = |x_- + g(x_-) - x_-| \leq |x_-|(1 + \frac{|g(x_-) - x_-|}{|x_-|})$ . Assim  $x_0 \rightarrow 0 \Leftrightarrow x_- \rightarrow 0$ . Mas  $x_0 = x_- + g(x_-) - x_-$  e daí

$$\frac{\Pi_+ x_0}{|\Pi_- x_0|} = \frac{g(x_-) - x_-}{|x_-|} \rightarrow 0,$$

quando  $x_- \rightarrow 0$  (ou quando  $x_0 \rightarrow 0$ ). Daí segue a tangência.  $\square$

**Exercício 4.3.4.** *Mostre que se  $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  é sobrejetiva e  $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  é tal que  $h \circ g = I_{\mathcal{A}}$  então  $g$  é bijetiva e  $g \circ h = I_{\mathcal{B}}$ , isto é  $h = g^{-1}$ .*

**Observação:**

(1). Se quisermos tomar uma variedade invariante, basta considerar  $\tilde{S} = \{x(t, x_0), t \geq 0, x_0 \in S\}$ .

(2). Para o caso da variedade instável a demonstração é análoga.

**Corolário 4.3.4.** *Seja  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , contínua com  $f(x) = o(|x|)$ , quando  $x \rightarrow 0$ . Se todos os autovalores de  $A$  têm parte real  $< 0$  então a solução  $x \equiv 0$  de  $\dot{x} = Ax + f(x)$  é U.A.S. Se pelo menos um autovalor de  $A$  tiver parte real  $> 0$  então a solução  $x \equiv 0$  é instável.*

**Demonstração.** No caso de instabilidade basta observar que existe solução que tende a zero, quando  $t \rightarrow -\infty$ .  $\square$

- Analisar o exemplo de C. Olech (pag. 117 do livro de J. Hale).

## 4.4 Estabilidade: método direto de Liapunov

### 4.4.1 Introdução

A idéia que está por trás do Teorema de estabilidade de Liapunov está relacionada a um Teorema enunciado por Lagrange (1736-1813) em 1788 (Mawhin).

“Num sistema conservativo se um ponto de equilíbrio é um mínimo isolado da energia potencial então ele é estável”.

Esse resultado foi provado por Dirichlet (1805-1859) em 1846. Baseado nas idéias de Dirichlet, Liapunov (1857-1918) que estabeleceu o Teorema de Estabilidade.

Liapunov também provou o seguinte resultado de Instabilidade.

“Num sistema conservativo se um ponto de equilíbrio for um máximo da energia potencial então ele é instável”.

Mais tarde em 1934, Cetaev provou que “num sistema conservativo se um ponto de equilíbrio não é mínimo da energia potencial então ele é instável”.

Consideremos o exemplo

$$\ddot{x} + g(x) = 0 \quad (\text{pêndulo } \ddot{x} + \frac{g}{L} \sin x = 0)$$

$$\text{Energia total} = T(\dot{x}) + U(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \int_0^x g(s) ds$$

### 4.4.2 Método direto de Liapunov

Seja  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e supomos que  $0 \in \Omega$ .

**Definição 4.4.1.** Dizemos que  $V$  é definida positiva em  $\Omega$  se  $V$  é contínua em  $\Omega$ ,  $V(0) = 0$  e  $V(x) > 0$ ,  $x \neq 0$ ,  $x \in \Omega$ .

**Exemplo 4.4.1.** Seja  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

**Definição 4.4.2.**  $V$  é definida negativa em  $\Omega$  se  $-V$  for definida positiva em  $\Omega$ .

Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $\Omega$ . Consideremos a sistema  $\dot{x} = f(x)$  e indiquemos por  $x(t, x_0)$  a solução que para  $t = 0$  vale  $x_0$ .

Seja  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$

**Definição 4.4.3.** Definimos a derivada de  $V$  ao longo da solução  $x(t, x_0)$  para  $t = 0$  como sendo

$$\dot{V} = \frac{d}{dt} V(x(t, x_0)) \Big|_{t=0}, \quad x_0 \in \Omega.$$

Da regra da cadeia segue que

$$\dot{V}(x_0) = \text{grad } V(x_0) \cdot f(x_0)$$

**Exemplo 4.4.2.**

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x^2 \end{cases} \quad V(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_0, y_0) &= \text{grad } V(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0) \\ &= (2x_0, 2y_0) \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0^2 \end{pmatrix} = 2x_0y_0 + 2y_0x_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2xy + 2yx^2 \\ \dot{V}(x_0, y_0) &= 2x_0y_0 + 2y_0x_0^2. \end{aligned}$$

### 4.4.3 Teorema de estabilidade e estabilidade assintótica de Liapunov

**Teorema 4.4.3.** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  onde  $\Omega$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$  com  $0 \in \Omega$ . Consideremos os sistema  $\dot{x} = f(x)$ .*

(a). *Se  $V$  for definida positiva e  $\mathcal{C}^1$  com  $\dot{V} \leq 0$  em  $\Omega$  então  $x \equiv 0$  é solução de  $\dot{x} = f(x)$  e é estável.*

(b). *Se  $V$  for definida positiva,  $\mathcal{C}^1$  e  $\dot{V}$  for definida negativa em  $\Omega$  então  $x \equiv 0$  é solução assintoticamente estável de  $\dot{x} = f(x)$ .*

**Demonstração.** (a). Seja  $\epsilon > 0$  tal que  $\overline{B_\epsilon(0)} \subset \Omega$  e  $\mu = \mu(\epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{|x|=\epsilon} V(x) > 0$ .

Figura 4.7: ???

Como  $V$  é contínua em  $x = 0$ , existe  $\delta > 0$ ,  $\delta < \epsilon$  tal que se  $|x_0| < \delta$  então  $V(x_0) < \mu$ . Assim,

$$\dot{V}(x(t, x_0)) = \left( \frac{d}{ds} V(x(s, x_0)) \right)_{s=t} \leq 0, \quad \forall t \in [0, w_+)$$

onde  $[0, w_+)$  é o intervalo maximal de existência à direita.

Daí segue que a função  $t \in [0, w_+) \rightarrow V(x(t, x_0))$  é decrescente e portanto  $V(x(t, x_0)) \leq V(x_0) < \mu$ ,  $t \in [0, w_+)$ . Assim  $V(x(t, 0)) \leq V(0) = 0$ . Logo  $x(t, 0) = 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Se para algum  $\tilde{t}$ ,  $x(\tilde{t}, x_0)$  tocasse na esfera  $|x| = \epsilon$ , teríamos,  $V(x(\tilde{t}, x_0)) \geq \mu$  o que contraria o fato que  $V(x(t, x_0))$  é decrescente.

Logo  $|x(t, x_0)| < \epsilon \forall t \in [0, w_+)$  o que implica que  $w_+ = +\infty$  e  $|x(t, x_0)| < \epsilon \forall t \geq 0$ . Temos assim a estabilidade de  $x \equiv 0$ .

(b). Sejam  $\epsilon$  e  $\delta$  dados como em (a). Logo  $|x_0| < \delta \Rightarrow |x(t, x_0)| < \epsilon, \forall t \geq 0$ .

Provemos primeiramente que  $V(x(t, x_0)) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$  e depois que  $x(t, x_0) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ .

Como  $\dot{V}(x(t, x_0)) \leq 0$  temos que  $V(x(t, x_0))$  é decrescente em  $t$ . Então  $V(x(t, x_0)) \rightarrow l \geq 0$ . Suponhamos que  $l > 0$ . Consideremos o compacto  $A = \{x : |x| \leq \epsilon \text{ e } V(x) \geq l\}$ . Temos então que  $x(t, x_0) \in A$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Seja  $0 < \eta \stackrel{\text{def}}{=} \min\{-\dot{V}(x), x \in A\}$ . Logo  $-\dot{V}(x(t, x_0)) \geq \eta$ ,  $\forall t \geq 0$ . Daí integrando, temos

$$V(x(t, x_0)) - V(x_0) \leq -\eta t, \quad \forall t \geq 0.$$

Como  $V$  é definida positiva temos assim uma contradição. Logo  $l = 0$  e  $V(x(t, x_0)) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ .

Mostremos agora que  $x(t, x_0) \rightarrow 0$ . Suponhamos que não. Logo existe sequência  $(t_m)$ ,  $t_m \rightarrow \infty$  tal que  $|x(t_m, x_0)| \geq \rho > 0$ ,  $\forall m$ . Como  $A$  é compacto pode-se encontrar uma subsequência  $(\tau_m)$  tal que  $x(\tau_m, x_0) \rightarrow y$ , com  $\|y\| > 0$ . Daí  $V(x(\tau_m, x_0)) \rightarrow V(y) > 0$  o que é uma contradição. Provamos assim que  $x \equiv 0$  é A.S.  $\square$

Exemplos:

(1).

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$V$  é definida positiva  $\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} = xy - yx = 0$ . Assim o equilíbrio  $(0, 0)$  é estável.

(2).

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = -x - y \end{cases} \quad V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$V$  é definida positiva  $\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} = x(y - x) + y(-x - y) = -(x^2 + y^2)$ . Daí  $\dot{V}$  é definida negativa. Logo o equilíbrio  $(0, 0)$  é assintoticamente estável.

**Lema 4.4.4.** Se  $V(x) = V_p(x) + W(x)$  é  $C^1$  com  $W(x) = o(|x|^p)$ , quando  $x \rightarrow 0$ , onde  $V_p(x)$  é um polinômio homogêneo de grau  $p$ , definido positivo numa vizinhança suficientemente pequena de  $x = 0$ , então  $V(x)$  é definida positiva, numa vizinhança suficientemente pequena de  $x = 0$ .

**Demonstração.** Seja  $k = \min_{|x|=1} V_p(x)$ . Assim  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ ,

$$V_p(x) = V_p\left(|x| \frac{x}{|x|}\right) = |x|^p V_p\left(\frac{x}{|x|}\right) \geq k|x|^p.$$

Logo  $V_p(x) \geq k|x|^p$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . Numa vizinhança suficientemente pequena de  $x = 0$ , temos,

$$V(x) = V_p(x) + W(x) \geq k|x|^p + W(x) = |x|^p \left(k + \frac{W(x)}{|x|^p}\right) \geq |x|^p \frac{k}{2}$$

o que implica que  $V$  é definida positiva.  $\square$

**Lema 4.4.5.** Se  $V_p(x)$  é um polinômio homogêneo de grau ímpar então  $V_p(x)$  não é definida positiva.

**Demonstração.**  $V(t, \dots, t) = t^p V(1, 1, \dots, 1)$ . Se  $V(1, \dots, 1) = 0$  então  $V$  não é definida positiva. Se  $V(1, \dots, 1) \neq 0$ ,  $V(t, \dots, t)$  troca de sinal em  $t = 0$ .  $\square$

**Exemplo 4.4.6.**

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - x + f_1(x, y) \\ \dot{y} &= -x - y + f_2(x, y) \end{cases}$$

onde  $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções de classe  $C^1$  com  $f_i(x, y) = o(|x| + |y|)$ ,  $i = 1, 2$ , quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

$$\text{Seja } V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x\dot{x} + y\dot{y} = x(y - x + f_1(x, y)) + y(-x - y + f_2(x, y)) \\ &= -x^2 - y^2 + xf_1(x, y) + yf_2(x, y). \end{aligned}$$

Como  $xf_1(x, y) + yf_2(x, y)$  é  $o(|x| + |y|)^2$  do Lema 4.4.4 segue que  $\dot{V}(x, y)$  é negativa definida em alguma vizinhança suficientemente pequena de  $(0, 0)$ .

Do Teorema da Estabilidade Assintótica de Liapunov segue que a solução  $(x, y) = (0, 0)$  é assintoticamente estável.

**Observação:** Posteriormente, veremos uma situação mais geral do que o exemplo acima.

**Lema 4.4.7** (Critério de Sylvester). Seja  $A$  matriz real  $n \times n$ , simétrica. Então a forma quadrática  $x'Ax = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$  é definida positiva se e somente se a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

tem subdeterminantes principais positivos.

**Exercício 4.4.1.** Mostrar que a origem  $(x, \dot{x}) = (0, 0)$  é assintoticamente estável para  $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ . Tentar primeiro o funcional  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ . Tentar a seguir ajustar o funcional  $W(x, y) = x^2 + axy + by^2$ , com valores convenientes de  $a$  e  $b$ .

**Lema 4.4.8** (Liapunov). Seja  $A$  matriz  $n \times n$  real. Então a equação  $A'B + BA = -I$  tem uma solução  $B$  simétrica definida positiva (isto é,  $x'Bx$  é definida positiva) se e somente se todos os autovalores de  $A$  tem parte real  $< 0$ .

**Demonstração.** ( $\Rightarrow$ ). Tomamos  $V(x) = x'Bx$  e temos

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}'Bx + x'B\dot{x} = x'(A'B + BA)x \\ &= -x'x = -|x|^2,\end{aligned}$$

aqui  $'$  = transposta.  $V$  definida positiva e  $\dot{V}$  definida negativa implicam que  $\dot{x} = Ax$  é A.S e daí segue que todo autovalor de  $A$  deve ter parte real  $< 0$ .  
( $\Leftarrow$ ),

$$\frac{d}{dt}(e^{A't}e^{At}) = A'e^{A't}e^{At} + e^{A't}e^{At}A.$$

Como  $|e^{At}| \leq ke^{-\alpha t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $k, \alpha > 0$ , temos, integrando

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{A't}e^{At})dt &= A' \int_0^\infty e^{A't}e^{At}dt + \int_0^\infty e^{A't}e^{At}dtA \\ -I &= A'B + BA,\end{aligned}$$

onde  $B \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{A't}e^{At}dt$  está bem definida e é definida positiva pois

$$\begin{aligned}x_0 \neq 0 \Rightarrow x_0'Bx_0 &= \int_0^\infty (e^{At}x_0)'(e^{At}x_0)dt \\ &= \int_0^\infty |e^{At}x_0|^2 dt > 0.\end{aligned}$$

□

**Observação:** O mesmo resultado vale colocando  $C$  em lugar de  $I$  (ver Hale , pag. 315), com  $C$  definida positiva.

**Teorema 4.4.9.** *Seja  $A$  matriz real  $n \times n$  tal que  $\text{Re } \sigma(A) < 0$ . Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$  tal que  $0 \in \Omega$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f_x(0) = 0$ . Então a solução  $x = 0$  de  $\dot{x} = Ax + f(x)$  é U.A.S (P).*

**Demonstração.** Do Lema 4.4.8 segue que existe  $B$  definida positiva tal que  $A'B + BA = -I$ .

Seja  $V(x) = x'Bx$ , que é definida positiva. temos

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= [Ax + f(x)]'Bx + x'B[Ax + f(x)] \\ &= x'[A'B + BA]x + f(x)'Bx + x'Bf(x) \\ &= -|x|^2 + f(x)'Bx + x'Bf(x), \quad f(x)'Bx + x'Bf(x) = 2f(x)'Bx = o(|x|^2).\end{aligned}$$

Assim do Lema 4.4.4 segue que  $\dot{V}$  é definida negativa em alguma vizinhança suficientemente pequena da origem. □

**Exemplos:**

(1)  $\ddot{x} + g(x) = 0$  é equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases}$$

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x g(s) ds = T(y) + U(x)$$

$T$  é a energia cinética do sistema e  $U$  é a energia potencial do sistema.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

Suponhamos que  $U(x)$  tenha um mínimo isolado em  $x = 0$ .

Tomando a função  $H(x, y)$  temos que  $H$  é definida positiva

$$\dot{H}(x, y) = y\dot{y} + g(x)\dot{x} = -yg(x) + g(x)y = 0.$$

Assim  $(0, 0)$  é estável.

**Observação:** Esse resultado pode ser estendido a sistemas Hamiltonianos com  $n$  graus de liberdade.

(2)  $\ddot{x} + \dot{x} + g(x) = 0$ , com  $U(x) = \int_0^x g(s) ds$  com  $g \in C^1$  e  $xg(x) > 0$ ,  $x \neq 0$ .

$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x g(s) ds$  é definida positiva

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y - g(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{H}(x, y) &= y\dot{y} + g(x)\dot{x} = y(-y - g(x)) + g(x)y \\ &= -y^2 \end{aligned}$$

Logo  $\dot{H}$  não é definida negativa.

Mas claramente  $(x, \dot{x}) = (0, 0)$  é assintoticamente estável.

Tentemos então uma função do tipo

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x g(s) ds + \beta g(x)y, \quad \beta > 0.$$

Como  $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  temos que para  $x \neq 0$

$$V(x, y) \geq \frac{y^2}{2} + \int_0^x g(s) ds - \frac{\beta}{2}[g(x)^2 + y^2]$$

$$V(x, y) \geq \frac{y^2}{2}(1 - \beta) + \int_0^x g(s) ds \left[1 - \frac{\beta}{2} \frac{g(x)^2}{\int_0^x g(s) ds}\right].$$

Como  $1 - \frac{\beta}{2} \frac{g(x)^2}{\int_0^x g(s) ds} \xrightarrow{L'Hospital} 1 - \beta g'(0)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

Se  $1 - \beta > 0$ ,  $1 - \beta g'(0) > 0$ , podemos escolher uma vizinhança suficientemente pequena de  $(x, y) = (0, 0)$  de modo que  $V$  seja definida positiva.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= y\dot{y} + g(x)y + \beta g'(x)y^2 + \beta g(x)\dot{y} \\ &= y(-y - g(x)) + g(x)y + \beta g'(x)y^2 + \beta g(x)(-y - g(x)) \\ &= -y^2(1 - \beta g'(x)) - \beta g(x)y - \beta g(x)^2 \\ &= -[y^2(1 - \beta g'(x)) + \beta g(x)y + \beta g(x)^2]. \end{aligned}$$

Assim

$$-\dot{V}(x, y) = y^2(1 - \beta g'(x)) + \beta g(x)y + \beta g(x)^2.$$

Mas  $\beta g(x)y \geq -\frac{\beta}{2}(g(x)^2 + y^2)$ . Logo

$$-\dot{V}(x, y) \geq y^2(1 - \beta g'(x) - \frac{\beta}{2}) + \frac{\beta}{2}g(x)^2.$$

$1 - \beta g'(x) - \frac{\beta}{2} \rightarrow 1 - \beta g'(0) - \frac{\beta}{2}$ ,  $x \rightarrow 0$ . Além das hipóteses acima  $1 - \beta > 0$ ,  $1 - \beta g'(0) > 0$  supomos que  $1 - \beta g'(0) - \frac{\beta}{2} > 0$  e teremos então que  $-\dot{V}(x, y)$  será definida positiva numa vizinhança suficientemente pequena de  $(x, y) = (0, 0)$ . Logo  $(0, 0)$  é A. S.

## 4.5 Instabilidade

### 4.5.1 Primeiro teorema de instabilidade de Liapunov

**Teorema 4.5.1.** *Seja  $0 \in \Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ ,  $f(0) = 0$ . Supomos que  $\dot{V}$  é contínua, definida positiva,  $V(0) = 0$  e que assume valores positivos em pontos arbitrariamente próximos de 0. Então a origem é instável.*

**Demonstração.** Seja  $\epsilon > 0$  tal que  $\overline{B_\epsilon(0)} \subset \Omega$ . Seja  $0 < \delta < \epsilon$  e  $a \in B_\delta(0)$  tal que  $V(a) > 0$  e  $a \neq 0$ .



Afirmo que  $x(t, a)$  escapa de  $\overline{B_\epsilon(0)}$ .

Suponhamos que não. Então  $x(t, a)$  está definida para  $t \geq 0$  e  $|x(t, a)| \leq \epsilon, \forall t \geq 0$ .

Como  $\dot{V}$  é definida positiva, concluímos que  $V(x(t, a))$  é estritamente crescente em  $t$ . Assim  $V(x(t, a)) \geq V(a) > 0, \forall t \geq 0$ .

Consideremos o conjunto  $K = \{x \in \overline{B_\epsilon(0)} : V(a) \leq V(x)\}$ .  $K$  é compacto,  $x(t, a) \in K, \forall t \geq 0$  e  $0 \notin K, (V(0) = 0)$

Seja  $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\dot{V}(x) : x \in K\}, \mu > 0$  pois  $\dot{V}$  é contínua em  $K$  e  $0 \notin K$ .

Logo  $\dot{V}(x(t, a)) \geq \mu$ . Logo integrando  $V(x(t, a)) - V(a) \geq \mu t$  e daí  $V(x(t, a)) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$  o que contraria o fato que  $V$  é limitada em  $K$ .  $\square$

### Exemplo 4.5.2.

$$\begin{cases} \dot{x} &= \beta x + f(x, y) \\ \dot{y} &= -\gamma y + g(x, y), \quad \beta, \gamma > 0 \end{cases}$$

onde  $f, g$  são de classe  $C^1$  numa vizinhança  $\Omega$  de  $(0, 0)$  e  $f, g = o(\sqrt{x^2 + y^2})$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

Tomarmos  $V(x, y) = x^2 - y^2$  e temos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x(\beta x + f(x, y)) - 2y(-\gamma y + g(x, y)) \\ &= 2\beta x^2 + 2\gamma y^2 + 2xf(x, y) - 2yg(x, y). \end{aligned}$$

Como  $2xf(x, y) - 2yg(x, y) = o(x^2 + y^2)$ .

Do Lema 4.4.4 segue que  $\dot{V}$  é definida positiva em alguma vizinhança suficientemente pequena de  $(0, 0)$ .

Como  $V(x, 0) = x^2$  assume valores positivos para pontos  $x$  arbitrariamente próximos de  $(0, 0)$  então  $(0, 0)$  é instável.

**Exemplo 4.5.3.**  $\ddot{x} + g(x) = 0$ , onde  $g$  é  $C^1$ ,  $xg(x) < 0, x \neq 0$ . Seja  $U(x) = \int_0^x g(s)ds$  (energia potencial).  $x = 0$  é ponto de máximo da energia potencial.

Tomemos  $V(x, y) = xy$ . Como

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x). \end{cases}$$

Temos  $\dot{V}(x, y) = y^2 + x(-g(x)) = y^2 - xg(x)$ . Logo  $\dot{V}$  é definida positiva. Como  $V(0, 0) = 0$  e  $V(x, y) = xy$  assume valores positivos arbitrariamente próximos de  $(x, y) = (0, 0)$  do Primeiro teorema de Liapunov segue que  $(0, 0)$  é instável.

**Observação:** Esse resultado pode ser estendido a sistemas Hamiltonianos com  $n$  graus de liberdade da forma

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{cases}$$

## 4.5.2 Segundo teorema de instabilidade de Liapunov

**Teorema 4.5.4.** *Seja  $0 \in \Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $U \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  tal que*

(i).  *$V$  assume valores positivos arbitrariamente próximo de 0*

(ii).  *$\dot{V} = \lambda V + U$  onde  $\lambda > 0$  é uma constantes e  $U(x) \geq 0$  em  $\Omega$ . Então  $x \equiv 0$  é instável.*

**Demonstração.** Seja  $\epsilon > 0$  tal que  $\overline{B_\epsilon(0)} \subset \Omega$ . Seja  $0 < \delta < \epsilon$  e  $a \in B_\delta(0)$  tal que  $V(a) > 0$ .

Afirmamos que  $x(t, a)$  escapa de  $\overline{B_\epsilon(0)}$ . Suponhamos que não. Então  $x(t, a)$  está definida para  $t \geq 0$  e  $x(t, a) \in \overline{B_\epsilon(0)}$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Temos que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t, a)) &= \lambda V(x(t, a)) + U(x(t, a)) \\ \dot{V}(x(t, a)) - \lambda V(x(t, a)) &= U(x(t, a)) \end{aligned}$$

multiplicando por  $e^{-\lambda t}$ , temos

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \dot{V}(x(t, a)) - \lambda e^{-\lambda t} V(x(t, a)) &= e^{-\lambda t} U(x(t, a)) \\ \frac{d}{dt} e^{-\lambda t} V(x(t, a)) &= e^{-\lambda t} U(x(t, a)). \end{aligned}$$

Integrando de  $a$  até  $t$ , temos:

$$e^{-\lambda t} V(x(t, a)) = V(a) + \int_0^t e^{-\lambda s} U(x(s, a)) ds.$$

Assim

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} V(x(t, a)) &\geq V(a) > 0 \\ V(x(t, a)) &\geq e^{\lambda t} V(a) \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

o que é absurdo pois  $V$  é limitada em  $\overline{B_\epsilon(0)}$ . □

**Exemplo 4.5.5.**

$$\begin{cases} \dot{x} &= x + xy^2 \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{cases}$$

onde  $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $\Omega$  aberto de  $\mathbb{R}^2$ ,  $0 \in \Omega$ .

Tomamos  $V(x, y) = x^2$ .

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= 2x\dot{x} = 2x(x + xy^2) \\ &= 2x^2 + 2x^2y^2 \stackrel{\text{def}}{=} 2V + U(x, y). \end{aligned}$$

Logo  $(0, 0)$  é instável.

**Exemplo 4.5.6.** Consideremos um sistema da forma  $\dot{x} = Ax + f(x)$ , onde  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $0 \in \Omega$  aberto de  $\mathbb{R}^n$  e que  $f(x) = o(|x|)$ ,  $x \rightarrow 0$ . A real  $n \times n$ .

Supomos que  $A$  tem pelo menos um autovalor com parte real  $> 0$ .

**Demonstração.** Vamos mostrar, usando o método direto de Liapunov que a origem é instável.

Utilizaremos o seguinte teorema (Mawhin-Rouché, pag. 30).

**Teorema 4.5.7.** Se pelo menos um autovalor de  $A$  tem parte real  $> 0$ , a toda forma quadrática  $U(x)$ , definida positiva, corresponde uma forma quadrática  $V(x)$  que assume valores positivos arbitrariamente próximo de 0 e constante  $c > 0$  tal que

$$\text{grad } V \cdot Ax = cV + U.$$

Voltando ao sistema  $\dot{x} = Ax + f(x)$ , consideramos a função  $V(x)$  e temos

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \text{grad } V(Ax + f(x)) \\ &= \text{grad } VAx + \text{grad } Vf(x) \\ &= cV(x) + U(x) + \text{grad } Vf(x) \\ &= cV(x) + W(x) \end{aligned}$$

onde pelo Lema 4.4.4  $W(x)$  é definida positiva em alguma vizinhança suficientemente pequena da origem.

Do segundo Teorema de Instabilidade de Liapunov segue que a origem é instável.  $\square$

### 4.5.3 Teorema de instabilidade de Cetaev

**Teorema 4.5.8.** Seja  $\rho > 0$ ,  $f \in C^1(B_\rho(0), \mathbb{R}^n)$ ,  $B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f(0) = 0$  e consideremos o sistema  $\dot{x} = f(x)$ .

Supomos que existe aberto e conexo  $U$  tal que  $0 \in \partial U$ ,  $U \subset B_\rho(0)$  ( $\partial U$  = fronteira relativa a  $B_\rho(0)$ ).

Figura 4.8: ???

Seja  $V \in C^1(B_\rho(0), \mathbb{R})$  tal que

(i).  $V(x) > 0, \dot{V}(x) > 0, x \in U$

(ii).  $V = 0$  em  $\partial U$ .

Então  $x = 0$  é instável. Mais precisamente dado  $r > 0, r < \rho$ , se  $a \in B_r(0) \cap U$  então  $x(t, a)$  deixa  $B_r(0)$  em tempo finito.

**Demonstração.** Seja  $\delta > 0, \delta < r$ . Existe  $a \in B_\delta(0)$  com  $V(a) > 0$ .

Figura 4.9: ???

Consideremos  $x(t, a)$  e suponhamos que  $x(t, a)$  não sai de  $\overline{B_r(0)}$ . Logo  $x(t, a)$  está definida para  $t \geq 0$ . Como  $\dot{V} > 0$  em  $U$  temos que  $V(x(t, a))$  será crescente enquanto  $x(t, a)$  permanecer em  $\overline{B_r(0)} \cap U$ . Assim  $V(x(t, a)) \geq V(a) > 0$ .

Como  $V = 0$  em  $\partial U$  e como  $V(x(t, a)) \geq V(a) > 0$ , temos que  $x(t, a)$  não pode cortar  $\partial U$ . Logo  $x(t, a) \in U, \forall t \geq 0$  e portanto  $x(t, a) \in U \cap \overline{B_r(0)}, \forall t \geq 0$ .

Seja  $K = \{x \in U \cap \overline{B_r(0)} : V(x) \geq V(a) > 0\}$ . Temos que  $K$  é compacto. De fato, seja  $x_n \in K, n \in \mathbb{N}$ . Como  $|x_n| \leq r$  existe subsequência que ainda indicaremos por  $(x_n)$  tal que  $x_n \rightarrow x \in \overline{B_r(0)}$ . Temos  $V(x_n) \rightarrow V(x)$  e daí  $V(x) \geq V(a) > 0$ . Por outro lado  $x \notin \partial U$  pois  $V = 0$  em  $\partial U$ . Logo  $x \in U$ . Assim  $K$  é fechado em  $\overline{B_r(0)}$  e portanto é compacto.

Seja  $\mu = \min_{x \in K} \dot{V}(x)$ . Como  $\dot{V} > 0, \dot{V}$  é contínua e  $K$  é compacto temos que  $\mu > 0$ .

Além disso  $x(t, a) \in K, t \geq 0$ . Logo  $\dot{V}(x(t, a)) \geq \mu > 0$  e integrando de 0 até  $t$  temos

$$V(x(t, a)) \geq V(a) + \mu t.$$

Fazendo  $t \rightarrow \infty$  temos  $V(x(t, a)) \rightarrow \infty$  o que é contradição pois  $V$  é contínua e portanto limitada em  $K$ .  $\square$

**Exemplo 4.5.9** (Sotomayor, pag.276). Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= x + f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{cases}$$

onde  $f, g$  são  $C^1$  numa vizinhança da origem,  $f = o(|x| + |y|), g = o(|x| + |y|)$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

Consideremos  $V(x, y) = x^2 - y^2$ . Temos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x\dot{x} - 2y\dot{y} = 2x(x + f(x, y)) - 2yg(x, y) \\ &= 2x^2 \left[ 1 + \frac{f(x, y)}{x} - \frac{y}{x^2}g(x, y) \right]. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (|x| + |y|)F(x, y) \\ g(x, y) &= (|x| + |y|)G(x, y) \end{aligned}$$

onde  $F(x, y), G(x, y) \rightarrow 0, |x| + |y| \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Para } x > 0 \text{ e } |y| < x \text{ temos } \left| \frac{f(x, y)}{x} \right| &= \left( \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{x} \right) |F(x, y)| \rightarrow 0, \quad (x, y) \rightarrow (0, 0). \\ \left| \frac{y}{x^2} g(x, y) \right| &= \left| \frac{y}{x} \left[ \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{x} \right] \right| |G(x, y)| \rightarrow 0, \quad (x, y) \rightarrow (0, 0). \end{aligned}$$

Assim existe  $\rho > 0$  tal que  $\dot{V}(x, y) > 0$  para  $x > 0, |y| < x, (x, y) \in B_\rho(0)$ .

Seja  $U = \{(x, y) \in B_\rho(0) : 0 < |y| < x\}$ . Também  $V > 0$  em  $U, 0 \in \partial U$ .

Figura 4.10: ???

Do Teorema de Cetaev segue que  $(0, 0)$  é instável.

**Exemplo 4.5.10.** Seja  $g$  uma função  $C^1$  numa vizinhança de  $x = 0$ , tal que  $g(x) < 0, x \neq 0, g(0) = 0$ .

Consideremos a equação  $\ddot{x} + g(x) = 0$  ou o sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x) \end{cases}$$

Consideremos o funcional  $V(x, y) = xy$ . Temos  $\dot{V}(x, y) = y^2 - xg(x)$ . Temos que  $\dot{V}(x, y) > 0$  se  $x > 0$ .

Seja  $\rho > 0$  qualquer e tomemos  $U = \{(x, y) : |(x, y)| < \rho : x > 0, y > 0\}$ .

Temos  $V, \dot{V} > 0$  em  $U, 0 \in \partial U$ . O teorema de Cetaev implica 0 instável.

## 4.6 Invariância e estabilidade: teoria de La Salle

### 4.6.1 Introdução

O teorema de estabilidade assintótica de Liapunov dá informação local mas não dá estimativa para o centro de atração do ponto de equilíbrio.

Um outro ponto a destacar é que para a equação  $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$  que tem equilíbrio  $(x, \dot{x}) = (0, 0)$  claramente assintoticamente estável, se tomarmos como funcional a energia total  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  e considerarmos o sistema equivalente  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x - y$ , temos  $V$  definida positiva e  $\dot{V}(x, y) = -y^2$  que não é definida negativa. Assim podemos, via teoremas de Liapunov, somente concluir estabilidade, mas não estabilidade assintótica de  $(0, 0)$ .

Figura 4.11: ???

Essas parecem ter sido as principais motivações que levaram La Salle a desenvolver métodos que corrigissem esses pontos.

### 4.6.2 Apresentação do método

Seja  $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , com  $V(0) = 0$  e seja  $l > 0$ . Consideremos  $\Omega_l = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < l\}$ .

Seja  $\tilde{\Omega}_l$  a componente conexa de 0 em  $\Omega_l$ .

**Observação:** Como  $\Omega_l$  é aberto ser conexo é equivalente a ser conexo por caminhos.

Seja  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $E \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \tilde{\Omega}_l : \dot{V}(x) = 0\}$  e  $M$  o maior conjunto invariante contido em  $E$ .

Observamos que  $\{0\} \subset E$  e  $\{0\}$  é invariante.

**Teorema 4.6.1** (La Salle). *Nas condições acima se*

(a)  $\tilde{\Omega}_l$  é limitado

(b)  $\dot{V}(x) \leq 0$  em  $\tilde{\Omega}_l$

então  $\tilde{\Omega}_l$  é positivamente invariante e se  $x(0) \in \tilde{\Omega}_l$  então  $x(t) \rightarrow M$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Demonstração.** Seja  $x_0 \in \tilde{\Omega}_l$  e seja  $x(t) = x(t, x_0)$ . Seja  $[0, t_+)$  o intervalo maximal de existência de  $x(t)$ . Se  $x(t)$  saísse de  $\tilde{\Omega}_l$  então existiria  $\tau > 0$  tal que  $V(x(\tau)) = l$  e  $x(t) \in \tilde{\Omega}_l$ ,  $0 \leq t \leq \tau$ . Como  $V(x(0)) < l$  temos uma contradição com o fato que  $\dot{V}(x) \leq 0$ , pois existiria  $s \in (0, \tau)$  com  $\dot{V}(x(s)) > 0$ . Além disso

$$x(t) \in A := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq V(x(0)), t \in [0, t_+)\}$$

que é um subconjunto fechado e limitado de  $\tilde{\Omega}_l$ . Logo  $(t_+ = +\infty)$  e  $x(t) \in A$ , para  $t \geq 0$ .

Seja  $\omega$  o conjunto  $\omega$ -limite de  $x(t)$ . Como  $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ , temos que  $V(x(t))$  é decrescente e como  $V$  é limitada em  $\tilde{\Omega}_l$ , temos que existe  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = l_0 \in \mathbb{R}$ .

Afirmamos que  $V \equiv l_0$  em  $\omega$ . Seja  $p \in \omega$ . Então existe  $t_m \rightarrow \infty$  tal que  $x(t_m) \rightarrow p$ . Logo  $V(x(t_m)) \rightarrow V(p)$  e daí  $V(p) = l_0$ . Assim  $V$  é constante em  $\omega$ . Além disso, devido à invariância de  $\omega$  temos que

$$\dot{V}(p) = \frac{d}{dt} V(x(t, p)) \Big|_{t=0} = 0.$$

Assim  $\dot{V} \equiv 0$  em  $\omega$ . Daí segue que  $\omega \subset E$ . Como  $\omega$  é invariante temos que  $\omega \subset M$ .

Como  $x(t) \rightarrow \omega$ , quando  $t \rightarrow \infty$ , temos que  $x(t) \rightarrow M$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . □

**Corolário 4.6.2.** *Sejam  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  tais que  $f(0) = 0$  e*

(a)  *$V$  é definida positiva em  $\tilde{\Omega}_l$*

(b)  *$\dot{V} \leq 0$  em  $\tilde{\Omega}_l$*

(c)  *$\tilde{\Omega}_l$  é limitado*

(d)  *$M = \{0\}$ .*

*Então  $x = 0$  é assintoticamente estável e  $\tilde{\Omega}_l$  está contido no centro de atração da origem.*

**Demonstração.** (a), (b) e o Teorema de Estabilidade de Liapunov implicam que 0 é estável. Do Teorema 4.6.1 segue que toda solução que começa em  $\tilde{\Omega}_l$  tende a  $M = \{0\}$ .  $\square$

**Corolário 4.6.3.** *Sejam  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  tais que  $f(0) = 0$  e*

(a).  *$\tilde{\Omega}_l$  é limitado*

(b)  *$V, -\dot{V}$  definidas positivas em  $\tilde{\Omega}_l$ .*

*Então a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e  $\tilde{\Omega}_l$  está contido no centro de atração da origem.*

**Exemplo 4.6.4** (Equações de Lienard e Van der Pol). *Sejam  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Consideremos a equação  $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$  e o sistema equivalente:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases}$$

*com  $f$  contínua e  $g$  de classe  $C^1$  no intervalo  $I$ . Seja  $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x f(s)ds$ . Temos então*

$$\frac{d}{dt}[\dot{x} + F(x)] = \ddot{x} + f(x)\dot{x}.$$

*Então fazemos  $\dot{x} + F(x) \stackrel{\text{def}}{=} y$  e temos o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases}$$

*que é equivalente à equação de Lienard  $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ .*

*A equação de Van der Pol é dada por  $\ddot{x} + \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$ ,  $\epsilon > 0$  e temos assim o sistema equivalente*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \epsilon(x - \frac{x^3}{3}) \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Vamos mostrar que a a origem é assintoticamente estável e dar uma estimativa para o centro de atração.

Tomemos  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , que é definida positiva. Temos

$$\dot{V}(x, y) = xy - \epsilon(x^2 - \frac{x^4}{3}) - yx = -\epsilon(x^2 - \frac{x^4}{3}) = -\epsilon x^2(1 - \frac{x^2}{3}).$$

Se  $0 \leq |x| \leq \sqrt{3}$  temos que  $\dot{V} \leq 0$ . Afim de excluir os pontos  $(\pm\sqrt{3}, 0)$ , pois neles  $\dot{V} = 0$ , tomamos  $l = V(\pm\sqrt{3}, 0) = \frac{3}{2}$ .

Assim

$$\tilde{\Omega}_l = \Omega_l = \{(x, y) : \frac{1}{2}(x^2 + y^2) < \frac{3}{2}\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 3\}$$

e

$$E = \{(x, y) \in \tilde{\Omega}_l : \dot{V}(x, y) = 0\} = \{(0, y) : \frac{y^2}{2} < \frac{3}{2}\} = \{(0, y) : y^2 < 3\}.$$

Figura 4.12: Circunferência de raio  $\sqrt{3}$

Mostremos que neste caso  $M = \{(0, 0)\}$ . Seja  $(0, y_0) \in E$ , com  $y_0 > 0$  e consideremos a solução  $(x(t), y(t))$ , que começa nesse ponto. Temos então  $\dot{x}(0) = y(0) = y_0 > 0$ . Assim  $x(t)$  é estritamente crescente para  $t$  suficientemente próximo de  $t = 0$ .

Daí decorre que  $(x(t), y(t))$  sai de  $E$ . O mesmo raciocínio se aplica quando  $y_0 < 0$ .

Daí decorre que o maior conjunto invariante contido em  $E$  é  $(0, 0)$ . Logo pelo Corolário 4.6.2 segue que a origem é assintoticamente estável e que  $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 3\}$  está contido no centro de atração, para qualquer valor de  $\epsilon > 0$ .

Ver o retrato de fase no livro de Urabe para os diversos valores de  $\epsilon$ .

Figura 4.13: Ciclos limites

**Exemplo 4.6.5.** Consideremos a equação  $\ddot{x} + \dot{x} + x + x^2 = 0$  ou sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -y - (x + x^2). \end{cases}$$

$$\text{Seja } V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x (s + s^2) ds = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Os pontos críticos são  $(0, 0)$ ,  $(-1, 0)$ , sendo que este último é uma sela, pois os autovalores da linearização

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1 + 2x) & -1 \end{pmatrix}_{x=-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$



são  $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

Precisamos assim evitar o ponto  $(-1, 0)$ , pois queremos achar uma estimativa para o centro de atração de  $(x, y) = (0, 0)$ .

$$V(-1, 0) = \frac{1}{6}. \text{ Tomamos } l = \frac{1}{6}, \Omega_{\frac{1}{6}} = \{(x, y) : \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} < \frac{1}{6}\}.$$

Figura 4.14: ???

$$\dot{V}(x, y) = y(-y - x - x^2) + xy + x^2y = -y^2 \leq 0.$$

$$E = \{(x, y) \in \tilde{\Omega}_{\frac{1}{6}} : \dot{V}(x, y) = 0\} = \{(x, 0) : -1 < x < \frac{1}{2}\}.$$

Como no exercício anterior, mostra-se que  $M = \{(0, 0)\}$ . Logo  $(0, 0)$  é assintoticamente estável e  $\tilde{\Omega}_{\frac{1}{6}}$  está contido no centro de atração.

## 4.7 Estabilidade assintótica global

### 4.7.1 Introdução

Em alguns sistemas que são modelos aplicados torna-se interessante verificar se mesmo que os erros iniciais sejam grandes, as soluções tenderão para um ponto de equilíbrio, quando  $t \rightarrow \infty$ .

Consideremos assim  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $f(0) = 0$ .

**Definição 4.7.1.** Dizemos que a origem é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável de  $\dot{x} = f(x)$  se for estável e para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $x(t, x_0) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ .

### 4.7.2 Apresentação do método

**Teorema 4.7.1.** Sejam  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Consideremos o sistema  $\dot{x} = f(x)$  com  $f(0) = 0$  e  $E \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$ ,  $M \stackrel{\text{def}}{=} \text{o maior conjunto invariante contido em } E$ . Se

(a)  $V \geq 0$  em  $\mathbb{R}^n$

(b)  $\dot{V} \leq 0$  em  $\mathbb{R}^n$

então toda solução definida e limitada para  $t \geq 0$  tende a  $M$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Demonstração.** Seja  $x(t)$  solução limitada para  $t \geq 0$ . Procedendo como no teorema anterior de La Salle, temos de (b) que  $V(x(t))$  é decrescente e tende a um certo  $l_0 \geq 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . Logo  $V \equiv l_0$  em  $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \text{conjunto } \omega\text{-limite de } x(t)$ . Logo  $\dot{V} \equiv 0$  em  $\omega$ . Assim  $\omega \subset E$ . Como  $\omega$  é invariante temos que  $\omega \subset M$ . Como  $x(t) \rightarrow \omega \subset M$  temos que  $x(t) \rightarrow M$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

### 4.7.3 Limitação de soluções

**Lema 4.7.2.** *Seja  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $f(0) = 0$ . Supomos que*

(a).  $\dot{V} \leq 0$  em  $\mathbb{R}^n$

(b).  $V(x) \rightarrow \infty, |x| \rightarrow \infty$ .

Então toda solução de  $\dot{x} = f(x)$  existe e é limitada para  $t \geq 0$ .

**Demonstração.** Supomos que exista solução  $x(t)$  definida no intervalo maximal à direita  $[0, t_+)$  que não seja limitada. Logo existe sequência  $t_m \rightarrow t_+$  tal que  $|x(t_m)| \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$ .

Assim  $V(x(t_m)) \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$ . Mas como  $\dot{V} \leq 0$  em  $\mathbb{R}^n$  temos que  $V(x(t))$  é decrescente e portanto  $V(x(t)) \leq V(x(0))$ , o que dá uma contradição. Logo  $x(t)$  é limitada em  $[0, t_+)$  e daí  $t_+ = +\infty$ .  $\square$

**Corolário 4.7.3.** *Sejam  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  e consideremos o sistema  $\dot{x} = f(x)$ . Supomos que*

(a).  $V$  é definida positiva em  $\mathbb{R}^n$

(b).  $\dot{V} \leq 0$  em  $\mathbb{R}^n$

(c).  $V(x) \rightarrow \infty, |x| \rightarrow \infty$

(d).  $M = \{0\}$ .

Então  $x = 0$  é globalmente assintoticamente estável.

**Observação:** Se supusermos que  $\dot{V}$  é definida negativa em  $\mathbb{R}^n$  então necessariamente  $M = \{0\}$ .

**Exemplo 4.7.4.** *Seja  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e consideremos a equação de Lienard:  $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ , ou o sistema equivalente*

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - \int_0^x f(s)ds \\ \dot{y} &= -g(x). \end{cases}$$

*Supomos que*

(a).  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

(b).  $xg(x) > 0, x \neq 0$  e  $\int_0^x g(s)ds \rightarrow \infty, |x| \rightarrow \infty$ .

*É claro que  $(0, 0)$  é o único ponto de equilíbrio.*

*Então a solução  $(x, y) = (0, 0)$  é globalmente assintoticamente estável.*

Consideremos o funcional  $V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x g(s)ds$  que é definida positiva em  $\mathbb{R}^2$ .

$$\dot{V}(x, y) = -g(x) \int_0^x f(s)ds \leq 0$$

$$\dot{V}(x, y) = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \text{ ou } \int_0^x f(s)ds = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Logo  $E = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ . Como antes, mostra-se que  $M = \{(0, 0)\}$ . Como  $V(x, y) \rightarrow \infty$  quando  $|(x, y)| \rightarrow \infty$  conclui-se que  $(0, 0)$  é globalmente assintoticamente estável.

## 4.8 Teoria de Poincaré-Bendixon

### 4.8.1 Motivação

Seja o seguinte sistema não linear no plano

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= -x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Em coordenada polares temos,

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= -1 \end{cases}$$

e temos as soluções

$$\begin{cases} r(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+ke^{-2t}}} \\ \theta(t) &= -(t - t_0). \end{cases}$$

Em coordenadas cartesianas temos

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{\cos t}{\sqrt{1+ke^{-2t}}} \\ y(t) &= -\frac{\sin t}{\sqrt{1+ke^{-2t}}}. \end{cases}$$

Figura 4.15: ???

O exemplo acima sugere a seguinte questão, para uma equação  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , que é traduzida pelo desenho a seguir. O que acontece no interior da região?.

Consideremos  $f \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $\Omega$  é aberto e  $f$  de classe  $C^1$ . Seja  $\dot{x} = f(x)$ .

**Notação:**  $x(t, q)$  indica a solução tal que  $x(0, q) = q$ .

**Definição 4.8.1** (Segmento Transversal). *É um segmento fechado  $L$  tal que para todo  $p \in L$ ,  $f(p)$  é um vetor não nulo e a direção de  $L$ , geram o  $\mathbb{R}^2$ .*

Figura 4.16: ???

Como consequência da definição acima, todo ponto de um segmento transversal é um ponto regular e  $L$  não é tangente a nenhuma órbita de  $\dot{x} = f(x)$  que o intercepta.

**Lema 4.8.1.** *Nas condições acima sobre  $f$ ,*

(a). *Se  $p \in \Omega$  é regular, então existe segmento transversal  $L$  (que pode ter qualquer direção, exceto a de  $f(p)$ ) tal que  $p$  é interior a  $L$*

Figura 4.17: ???

(b). *Qualquer órbita que intercepte um segmento transversal deve cortá-lo e todas as órbitas que o cortam devem fazê-lo no mesmo sentido.*

Figura 4.18: ???

(c) *Se  $p \in \Omega$  é ponto interior a uma transversal  $L$ , então dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que se  $q \in B_\delta(p)$  então  $x(t, q)$  deve cortar  $L$  num tempo  $t_1$  com  $|t_1| < \epsilon$*

Figura 4.19: ???

(d). *Seja  $\{x(t) : a \leq t \leq b\}$  um arco fechado de órbita. Então esse arco intercepta um segmento transversal em no máximo um número finito de pontos.*

Figura 4.20: ???

**Demonstração.** (a) Seja  $u$  um vetor unitário que não tenha a direção de  $f(p)$  (Ver figura o lado)

Como  $f(p) \neq 0$ , existe vizinhança de  $p$  onde  $f$  não se anula. Para  $q$  numa vizinhança,  $q$  num segmento definido por  $p$  e  $u$ , definimos

$$g(q) = \frac{\langle f(q), u \rangle}{|f(q)|} = \cos \theta.$$

Figura 4.21: ???

Como  $g(p) \neq \pm 1$ , temos que numa vizinhança pequena de  $p$ ,  $g(q) \neq \pm 1$ .

Pode-se assim tomar um pequeno segmento contendo  $p$  no seu interior de modo que ele seja segmento transversal.

(b). Sem perda de generalidade podemos supor que o segmento  $L$  está contido no eixo  $x_1$ . Temos assim se  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$  que  $f_2(q) \neq 0$  para todo  $q \in L$ . Se o segmento fosse cortado em sentidos opostos existiriam  $p$  e  $q$  tal que  $f_2(p) \cdot f_2(q) < 0$  e do Teorema do Valor Intermediário, segue que existiria  $r$  entre  $p$  e  $q$  tal que  $f_2(r) = 0$  o que é uma contradição.

(c). Sem perda de generalidade podemos supor que o segmento transversal  $L$  está contido no eixo  $x_1$  e que  $0$  é ponto interior a  $L$ .

Para cada  $q \in \Omega$  consideremos a solução  $x(t, q) = \begin{pmatrix} x_1(t, q) \\ x_2(t, q) \end{pmatrix}$ .

Como  $x(0, 0) = 0$ , temos que  $x_2(0, 0) = 0$ . Também  $\frac{\partial x_2}{\partial t}(0, 0) = f_2(0, 0)$ . Do Teorema da função Implícita segue que existe uma função  $t = t(q)$  definida numa vizinhança da origem, tal que,  $t(0) = 0$ ,  $x_2(t(q), q) = 0$  onde  $t(q)$  é  $C^1$  em  $q$ .

Assim, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $|q| < \delta$  então  $|t(q)| < \epsilon$ .

(d). Supomos que  $L$  está no eixo  $x_1$ . Suponhamos que o arco de órbita intercepte  $L$  em um número infinito de pontos. Então existe infinitos  $t_n \in [a, b]$  tal que  $x(t_n) \in L$ . Da compacidade de  $[a, b]$  segue que  $t_n$  tem uma subsequência convergente, que ainda indicaremos por  $t_n \rightarrow \bar{t}$ , com  $t_n \neq \bar{t}, \forall n$ . Assim,

$$0 = \frac{x_2(t_n) - x_2(\bar{t})}{t_n - \bar{t}} \longrightarrow \dot{x}_2(\bar{t}) = f_2(x_1(\bar{t}), x_2(\bar{t})).$$

Mas  $f_2(x(\bar{t})) \neq 0$ , pois  $L$  é transversal, o que leva a uma contradição.  $\square$

**Lema 4.8.2.** *Supomos que  $\gamma^+ = \{x(t) : t \geq 0\}$  é tal que  $\gamma^+ \subset K \subset \Omega$  onde  $K$  é compacto. Supomos que  $\omega = \omega(\gamma^+)$  tem um ponto regular  $p$  e que  $L$  seja uma transversal com  $p$  no seu interior.*

*Então existe sequência  $(t_n)$ ,  $t_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  tal que  $L \cap \gamma^+ = \{x(t_n) \stackrel{def}{=} p_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Além disso temos duas possibilidades:*

(a).  $p_1 = p_2$  e então  $p_n = p_1 = p, \forall n$ .

(b).  $p_1 \neq p_2$  e então todos os  $p_n$  são distintos e  $(p_n)$  é uma sequência estritamente monótona em  $L$ .

*Em ambos os casos  $p_n \rightarrow p$ .*

**Demonstração.** Como  $p \in \omega$ , existe sequência  $(\tau_n), \tau_n \rightarrow \infty$  tal que  $x(\tau_n) \rightarrow p$ . Assim do Lema 4.8.1, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para  $q \in B_\delta(p)$  existe  $\bar{t}$ , com  $|\bar{t}| < \epsilon$ , de modo que  $x(\bar{t}, q) \in L$ .

Tomando  $\epsilon = \frac{1}{m}$  por recorrência existe  $n_m > n_{m-1}$  tal que  $x(\tau_{n_m}) \in B_{\frac{1}{m}}(p)$  e então existe  $s_m$  com  $|s_m| < \frac{1}{m}$  de modo que  $x(s_m, x(\tau_{n_m})) \in L$ . Mas  $x(s_m, x(\tau_{n_m})) = x(s_m + \tau_{n_m})$ . Logo

$$\begin{aligned} |x(s_m + \tau_{n_m}) - p| &\leq |x(s_m + \tau_{n_m}) - x(\tau_{n_m})| + |x(\tau_{n_m}) - p| \\ &\leq \sup_{\xi \in [s_m + \tau_{n_m}, \tau_{n_m}]} |\dot{x}(\xi)| |s_m| + |x(\tau_{n_m}) - p| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Assim  $x(s_m + \tau_{n_m}) \rightarrow p$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Assim o conjunto  $\{t \geq 0 : x(t) \in L\}$  tem valores de  $t$  para  $t$  arbitrariamente grande.

Seja  $t_1 \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t \geq 0 : x(t) \in L\}$ . Como  $L$  é fechado temos que  $x(t_1) \in L$ . Seja  $\tau > t_1$  tal que  $x(\tau) \in L$ .

Consideremos o arco de órbita  $\{x(t) : t_1 \leq t \leq \tau\}$ . Do Lema 4.8.1(d) ele intercepta  $L$  em um número finito de pontos.

Seja  $t_2 \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > t_1 : x(t) \in L\}$ . Temos que  $t_2 > t_1$  e  $x(t_2) \in L$ .

Se  $x(t_2) = x(t_1)$  teremos que  $x(t)$  é periódica de período  $t_2 - t_1$  e a primeira alternativa do Lema ocorre.

Figura 4.22: ???

Se  $x(t_2) \neq x(t_1)$ , fazendo  $t_3 \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > t_2 : x(t) \in L\}$ , temos como anteriormente que  $t_3 > t_2$ .

Mostremos que  $x(t_3)$  não pode estar entre  $x(t_1)$  e  $x(t_2)$  no segmento  $L$ .

Consideremos a situação da figura ao lado.

Figura 4.23: ???

Vamos aplicar o

**Teorema 4.8.3** (Jordan). *Se  $J \subset \mathbb{R}^2$  é uma curva fechada simples ( $J$  é imagem homeomorfa de um círculo) então  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  tem duas componentes conexas  $S_i$  (limitada) e  $S_e$  (não limitada) as quais tem  $J$  como fronteira comum.*

Consideremos a curva de Jordan indicada na figura ao lado,

Figura 4.24: ???

isto é, o arco  $\widehat{x(t_1), x(t_2)}$  reunido com o segmento  $\overline{x(t_1)x(t_2)}$ .

Temos que  $\{x(t) : t \geq t_2\} \subset S_i$ , pois não pode escapar pela contramão pelo segmento  $x(t_1)x(t_2)$ , nem cruzar o arco da órbita pois contraria a unicidade. Logo  $x(t_2)$  deve estar entre  $x(t_1)$  e  $x(t_3)$ . Esse procedimento pode ser repetido sucessivamente.

Se considerarmos a relação induzida pela desigualdade  $x(t_2) > x(t_1)$  então a sequência  $p_n = x(t_n)$  será arbitrariamente crescente.

O caso correspondente a figura ao lado (COLOCAR FIGURA)

Figura 4.25: ???

pode ser analisado de maneira semelhante.

Como  $(x(s_m + \tau_{n_m}))$  é uma subsequência de  $(p_n)$  e  $x(s_m + \tau_{n_m}) \rightarrow p$  temos que  $p$  é ponto limite de  $p_n$ . Como  $p_n$  é crescente temos que  $p$  é o único ponto limite de  $(p_n)$ .  $\square$

**Lema 4.8.4.** *Se  $\gamma^+ \subset K \subset \Omega$ , onde  $K$  é um compacto, então  $L$  transversal não pode interceptar  $\omega(\gamma^+)$  em mais do que um ponto.*

**Demonstração.** Seja  $p \in L \cap \omega(\gamma^+)$ . Sem perda de generalidade podemos assumir que  $p$  é interior a  $L$ , pois se não fosse, poderíamos aumentar um pouquinho  $L$  de modo que isso acontecesse.

Do Lema 4.8.2 segue que  $p_n \rightarrow p$ . Se existe  $q \in L \cap \omega(\gamma^+)$  então  $p_n \rightarrow q$  e daí  $p = q$ .  $\square$

**Lema 4.8.5.** *Se  $\gamma^+ \subset K \subset \Omega$  e  $\omega(\gamma^+)$  contém uma órbita periódica  $\Gamma$  então  $\omega(\gamma^+) = \Gamma$ .*

**Demonstração.** Seja  $\gamma^+ = \{x(t) : t \geq 0\}$  e suponhamos que  $\omega \setminus \Gamma \neq \emptyset$ .  $\omega \setminus \Gamma$  não pode ser fechado, pois isso contrariaria o fato que  $\omega$  é conexo.

Assim existe  $q \in \Gamma$  e sequência  $(q_n)$ ,  $q_n \in \omega \setminus \Gamma$  tal que  $q_n \rightarrow q$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Logo  $q$  é regular. Seja  $L$  um segmento transversal com  $q$  no seu interior (existe pelo Lema 4.8.1(a)).

Do Lema 4.8.1(c) segue que dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para  $n_0$  suficientemente grande,  $q_{n_0} \in B_\delta(q)$  e existe  $t_0$ ,  $|t_0| < \epsilon$  tal que  $x(t_0, q_{n_0}) \in L$ .

Figura 4.26: ???

Da invariância de  $\omega$  segue que  $x(t_0, q_{n_0}) \in \omega$ , pois  $x(0, q_{n_0}) = q_{n_0} \in \omega$ . Se  $x(t_0, q_{n_0})$  pertencesse a  $\Gamma$  então  $\{x(t, q_{n_0}) : t \in \mathbb{R}\} = \Gamma$  e daí  $q_{n_0}$  pertenceria a  $\Gamma$ , contra a hipótese.

Logo  $x(t_0, q_{n_0}) \in \omega \cap L$  o que contraria o Lema 4.8.4, que diz que  $\omega$  não pode interceptar  $L$  em mais do que um ponto.  $\square$

**Lema 4.8.6.** *Seja  $\gamma^+ \subset K \subset \Omega$ , onde  $K$  é um compacto. Se  $\omega(\gamma^+)$  contém uma órbita  $\Gamma$  e  $\omega(\Gamma)$  tem pontos regulares então  $\Gamma$  é periódica e  $\Gamma = \omega(\gamma^+)$ .*

**Demonstração.** Temos que  $\omega(\Gamma) \subset \omega(\gamma^+)$  pois  $\omega(\gamma^+)$  é fechado.

Seja  $q \in \omega(\Gamma)$ , regular e  $L$  transversal com  $q$  no seu interior (existe pelo Lema 4.8.1(a)).

Do Lema 4.8.2 aplicado a  $\Gamma$  segue que ou  $\Gamma \cap L = \{q\}$  ou  $\Gamma \cap L$  tem um número infinito pontos. Esta última não pode ocorrer pois implicaria que  $\omega(\gamma^+) \cap L$ , que contém  $\omega(\Gamma) \cap L$ , conteria infinitos pontos, o que contraria o Lema 4.8.4.

Assim  $\Gamma \cap L = \{q\}$  e ainda do Lema 4.8.2 segue que  $\Gamma$  é periódica.

Como  $\Gamma \subset \omega(\gamma^+)$ , do Lema 4.8.5 segue que  $\Gamma = \omega(\gamma^+)$ . □

**Teorema 4.8.7** (Poincaré-Bendixon). *Seja  $\gamma^+ \subset K \subset \Omega$ , onde  $K$  é compacto. Se  $\omega(\gamma^+)$  não tem pontos de equilíbrio então  $\omega(\gamma^+)$  é uma órbita periódica.*

**Demonstração.** Seja  $p \in \omega(\gamma^+)$  e  $\Gamma$  órbita por  $p$ . Então  $\Gamma \subset \omega(\gamma^+)$  devido à invariância de  $\omega(\gamma^+)$ .

Do Lema 4.8.6 segue que  $\Gamma = \omega(\gamma^+)$  e é uma órbita periódica. □

**Teorema 4.8.8.** *Seja  $\gamma^+ = \{x(t) : t \geq 0\}$ ,  $\gamma^+ \subset K \subset \Omega$ , onde  $K$  é compacto. Suponhamos que exista somente um número finito ( $\geq 1$ ) de pontos de equilíbrios em  $\omega(\gamma^+)$ .*

(1). *Se  $\omega(\gamma^+)$  não contém pontos regulares então existe ponto de equilíbrio  $p \in \omega(\gamma^+)$ , tal que  $\omega(\gamma^+) = \{p\}$  e  $x(t) \rightarrow p$  quando  $t \rightarrow \infty$ .*

(2). *Se  $\omega(\gamma^+)$  tem algum ponto regular então  $\omega(\gamma^+)$  consiste de um conjunto finito de pontos de equilíbrio e um conjunto de órbitas que tendem aos pontos de equilíbrio quando  $t \rightarrow \pm\infty$ .*

**Demonstração.** (1). Como  $\omega(\gamma^+)$  só tem um número finito de pontos de equilíbrio e é conexo então tem que conter no máximo um ponto de equilíbrio. Seja  $\omega(\gamma^+) = \{p\}$ . Como  $x(t) \rightarrow \omega(\gamma^+)$ , quando  $t \rightarrow \infty$ , temos que  $x(t) \rightarrow p$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .

(2). Seja  $q \in \omega(\gamma^+)$ ,  $q$  regular e  $\Gamma = \{y(t) : t \in \mathbb{R}\}$  a órbita por  $q$ . Temos que  $\Gamma \subset \omega(\gamma^+)$  pois  $\omega(\gamma^+)$  é invariante.

Garantimos que  $\omega(\Gamma)$  não pode ter pontos regulares. Se isso ocorresse do Lema 4.8.6 seguiria que  $\Gamma = \omega(\gamma^+)$  e  $\Gamma$  é periódica o que contraria o fato que  $\omega(\gamma^+)$  tem pelo menos um ponto de equilíbrio.

Logo  $\omega(\Gamma)$  só tem pontos de equilíbrio e de sua conexão segue que só pode ter um ponto de equilíbrio, para o qual tende  $y(t)$ , quando  $t \rightarrow \infty$ , Análise semelhante pode ser feita quando  $t \rightarrow -\infty$ . □

## 4.9 Aplicações da teoria de Poincaré-Bendixon

Consideremos a equação de Lienard

$$\ddot{u} + g(u)\dot{u} + u = 0$$

e as seguintes hipóteses: Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tal que

(a).  $G(u) = \int_0^u g(s)ds$  é ímpar em  $u$



- (b)  $G(u) \rightarrow \infty$ , quando  $u \rightarrow \infty$  e existe  $\beta > 0$  tal que  $G$  é estritamente crescente para  $u > \beta$  e  $G(\beta) = 0$ .
- (c). Existe  $\alpha > 0$  tal que  $G(u) < 0$  se  $0 < u < \alpha$  e  $G(\alpha) = 0$ .

Figura 4.27: ???

**Teorema 4.9.1.** *Nas condições acima, a equação de Lienard tem uma órbita periódica não constante.*

**Demonstração.** Consideremos a sistema equivalente:

$$\begin{cases} \dot{u} = v - G(u) \\ \dot{v} = -u \end{cases}$$

Como  $G(0) = 0$ , temos que o único ponto de equilíbrio é  $(0, 0)$ .

Garantimos que

- (1). Se  $(u(t), v(t))$  é solução tal que  $v(0) > G(u(0))$  então enquanto  $v(t)$  se mantiver maior que  $G(u(t))$ , teremos que  $u(t)$  será estritamente crescente.

Se  $u(0) > 0$  então  $v(t)$  será estritamente decrescente, enquanto  $u(t)$  se mantiver maior que 0.

Observamos que resultados do tipo acima valem quando são invertidas as desigualdades, com as devidas adaptações.

- (2). O campo  $(v - G(u), -u)$  é horizontal no eixo  $v$  vertical na curva  $v = G(u)$

Figura 4.28: ???

- (3). As órbitas pela reflexão  $(u, v) \rightarrow (-u, -v)$ , isto é, se  $(u(t), v(t))$  for solução então  $(-u(t), -v(t))$  também é solução.

Assim sendo basta saber o que acontece para  $u \geq 0$ .

- (4). Temos que  $v - G(u) > u \Leftrightarrow v > G(u) + u$  e  $G(u) - v > u \Leftrightarrow G(u) - u > v$ .

Abaixo indicamos como aponta o vetor  $(v - G(u), -u)$  em cada uma das regiões.

Figura 4.29: ???

Levando em consideração esses fatos, vemos que se  $v_0$  for suficientemente grande, a órbita que passa por  $A : (0, v_0)$  tem aproximadamente a forma indicada no desenho abaixo.

Mostramos a seguir que se  $v_0$  for suficientemente grande então  $v_1 < v_0$ .

Seja  $W(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ . Para uma solução  $(u(t), v(t))$  temos:

$$\frac{d}{dt}W(u(t), v(t)) = u(v - G(u)) + v(-u) = -u(t)G(u(t)).$$

Figura 4.30: ???

Figura 4.31: ???

Da figura acima segue que

$$\int_{ABCD} dW = W(D) - W(A) = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2).$$

Por outro lado

$$\int_{ABCD} dW = \int_{AB} dW + \int_{CD} dW + \int_{BEC} dW.$$

Em  $\widehat{AB}$  consideramos a parametrização  $u \rightarrow (u, v(u))$  e teremos

$$\begin{aligned} \int_{AB} dW &= \int_0^\beta W'(u) du = \int_0^\beta \left(u + v \frac{dv}{du}\right) du \\ &= \int_0^\beta \left(u + v \frac{dv}{dt} \frac{dt}{du}\right) du \\ &= \int_0^\beta \left[u + v(-u) \frac{1}{v - G(u)}\right] du \\ &= \int_0^\beta \frac{-uG(u)}{v(u) - G(u)} du \end{aligned}$$

Tomamos  $M \stackrel{\text{def}}{=} \max\{u + G(u) : 0 \leq u \leq \beta\}$  e  $N \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|uG(u)| : 0 \leq u \leq \beta\}$  e tomamos  $v_0$  suficientemente grande de modo que  $v(\beta) > M$ . (Ver Figura.)

No intervalo considerado temos:

$$\frac{dv}{du} = \frac{-u}{v - G(u)} > -1 \Rightarrow v(u) \geq v_0 - u.$$

Logo

$$\left| \int_0^\beta \frac{uG(u)}{v(u) - G(u)} du \right| \leq \int_0^\beta \frac{|uG(u)|}{v(u) - G(u)} du \leq \int_0^\beta \frac{uG(u)}{v_0 - (u + G(u))} du.$$

$$0 \leq \left| \int_0^\beta \frac{uG(u)}{v(u) - G(u)} du \right| \leq N \int_0^\beta \frac{du}{v_0 - M} \rightarrow 0 \text{ quando } v_0 \rightarrow \infty.$$

Temos assim que  $\int_{AB} dW \rightarrow 0$  quando  $v_0 \rightarrow \infty$ . Prova-se também que  $\int_{CD} dW \rightarrow 0$  quando  $v_0 \rightarrow \infty$ , pois  $v_0 \rightarrow \infty$  implica que  $v_1 \rightarrow \infty$ .

Analisemos agora  $\int_{BEC} dW$ . Neste caso consideremos a parametrização  $u = u(v), \bar{v} \leq v \leq \tilde{v}$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv}(W(u(v), v)) &= u \frac{du}{dv} + v = u \frac{du}{dt} \frac{dt}{dv} + v \\ &= u(v - G(u)) \left( \frac{-1}{u} \right) + v \\ &= G(u(v)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} - \int_{BEC} dW &= \int_{CEB} dW = \int_{\bar{v}}^{\tilde{v}} G(u(v)) dv \\ &> \int_{\widehat{EK}} G(u(v)) dv \\ &> \int_{\widehat{EK}} \overline{FJ} dv = \overline{FJ} \cdot \overline{EK} \\ &> \overline{FJ} \cdot \overline{FK}. \end{aligned}$$

Mas  $FK \rightarrow \infty$  quando  $v_0 \rightarrow \infty$ . Assim  $\frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) \rightarrow -\infty$  quando  $v_0 \rightarrow \infty$  e daí para  $v_0$  suficientemente grande teremos que  $v_1 < v_0$ .

Para  $(u(0), v(0))$  tal que  $0 < |u(0)| < \alpha$  temos que  $\frac{d}{dt}W(u(t), v(t)) = -u(t)G(u(t)) > 0$  enquanto  $u(t)$  for tal que  $0 < |u(t)| < \alpha$ .

Logo  $(0, 0)$  é uma fonte, isto é, a origem é o conjunto  $\alpha$ -limite de toda órbita que começa suficientemente próximo de  $(0, 0)$ .

Assim sendo as órbitas comportam-se de acordo com a figura?

Figura 4.32: ???

A semiórbita que começa em  $A$  está contida na região limitada definida pela curva de Jordan formada pelo arco ABCD, sua reflexão e os segmentos que ligam esses arcos. Ver figura?. Ela permanece assim no compacto definido pela Figura??

Figura 4.33: ???

onde não há nenhum ponto de equilíbrio.

Do Teorema de Poincaré-Bendixon segue que existe uma órbita periódica não constante.  $\square$

# Teorema de Hartman

## 5.1 Generalidades

Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $L : E \rightarrow E$  um isomorfismo hiperbólico . Isto é,  $E = E^u \oplus E^s$ , o splitting é invariante por  $L$ ,  $L_u = L|_{E^u}$  é uma expansão enquanto  $L_s = L|_{E^s}$  é uma contração:  $\|L_u^{-1}\| < 1$  e  $\|L_s\| < 1$ . Se o espectro de um isomorfismo de  $E$  em  $E$  não intercepta o círculo unitário, não muito difícil de ver que este é hiperbólico para alguma norma em  $E$ .

Por todo este capítulo nós vamos denotar por  $a = \max\{\|L_u^{-1}\|, \|L_s\|\} < 1$  e assumimos que em  $E$  é dada a norma  $|x + y| := \max\{|x|, |y|\}$  para  $x \in E^u, y \in E^s$ . Para qualquer  $\mu > 0$  definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_*^0(E, E) &= \{\text{aplicações uniformemente contínuas, uniformemente limitadas de } E \text{ em } E\} \\ \mathcal{L}_\mu(L) &= \{\Lambda = L + \lambda : \lambda \in \mathcal{C}_*^0(E, E) \text{ é Lipschitziana, limitada por } \mu \text{ e tem constante de} \\ &\quad \text{Lipschitz} \leq \mu\} \\ \mathcal{H} &= \{h = I + g : g \in \mathcal{C}_*^0(E, E)\} \end{aligned}$$

onde  $I$  é a aplicação identidade  $E \rightarrow E$ . Colocando a  $\mathcal{C}^0$  topologia uniforme em  $\mathcal{C}_*^0(E, E)$  faz este um espaço de Banach e faz  $\mathcal{L}_\mu(L), \mathcal{H}$  espaços métricos completos.

**Teorema 5.1.1** (Teorema de Hartman para aplicações). *If  $\mu$  é pequeno then para cada  $\Lambda \in \mathcal{L}_\mu(L)$  existe um único  $h = h_\Lambda \in \mathcal{H}$  tal que  $h\Lambda = Lh$ . Além do mais este  $h_\Lambda$  é um homeomorfismo dependendo continuamente em  $\Lambda \in \mathcal{L}_\mu(L)$ .*

Em particular, isto significa que todo  $\Lambda \in \mathcal{L}_\mu(L)$  são homeomorfismos.

De fato que nós notamos na prova do Teorema da Função inversa que aparece em [5] adapta-se imediatamente para mostrar

**Lema 5.1.2.** *Se  $\mu$  é pequeno então cada  $\Lambda \in \mathcal{L}_\mu(L)$  é um Lipeomorfismo: Um Lipschitz homeomorfismo com inversa Lipschitz. A inversion é contínua.*

Isto não tem nada a ver com o hiperbolicidade de  $L$ .

O seguinte lema se refere a aplicações contrações envolvendo um parâmetro. Sua prova é um exercício fácil em topologia métrica

**Lema 5.1.3.** *Seja  $P$  um espaço topológico,  $Y$  um espaço métrico completo e  $F : P \times Y \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Suponhamos que cada  $F_p := F(p, \cdot) : Y \rightarrow Y$  é uma contração com constante de contração  $k_p < 1$ . Se os  $k_p$  são limitados longe de 1 então único ponto fixo de  $F_p$  depende continuamente em  $p$*

**Demonstração do Teorema 5.1.1.** Para simplificar as coisas, nós provamos envés a afirmação forte:

Para cada par  $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L}_\mu(L)$  corresponde um único  $h \in \mathcal{H}$  tal que  $h\Lambda = \Lambda'h$ .  $h$  é um homeomorfismo dependendo continuamente em  $\Lambda, \Lambda'$ .

A equação  $h\Lambda = \Lambda'h$  para  $h \in \mathcal{H}$  e  $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L}_\mu(L)$  é

$$(I + g)(L + \lambda) = (L + \lambda')(I + g)$$

para  $g \in \mathcal{C}_*^0(E, E)$ . Isto é

$$g\Lambda - Lg = \lambda'(I + g) - \lambda. \quad (5.1)$$

(5.1) é equivalente a  $g = [Lg + \lambda'(I + g) - \lambda]\Lambda^{-1}$ , o qual expandido nas  $E^u \times E^s$  coordenadas, torna-se

$$g_u = [L_u g_u + \lambda'_u(I + g) - \lambda_u]\Lambda^{-1} \quad (5.2)$$

$$g_s = [L_s g_s + \lambda'_s(I + g) - \lambda_s]\Lambda^{-1}. \quad (5.3)$$

Por outro lado, (5.1) também é equivalente a  $g = L^{-1}[g\Lambda + \lambda - \lambda'(I + g)]$  a qual se expande a

$$g_u = L_u^{-1}[g_u\Lambda + \lambda_u - \lambda'_u(I + g)] \quad (5.4)$$

$$g_s = L_s^{-1}[g_s\Lambda + \lambda_s - \lambda'_s(I + g)]. \quad (5.5)$$

Torna-se sendo fútil lidar com (5.2), (5.3) ou (5.4), (5.5) separadamente. Envés de olhar (5.3), (5.4). Para  $\mu > 0$ , (5.3), (5.4) definem uma contração

$$K : \mathcal{C}_*^0(E, E) \rightarrow \mathcal{C}_*^0(E, E)$$

dada por

$$g = (g_u, g_s) \mapsto (L_u^{-1}[g_u\Lambda + \lambda_u - \lambda'_u(I + g)], [L_s g_s + \lambda'_s(I + g) - \lambda_s]\Lambda^{-1})$$

Como

$$\begin{aligned} & \|L_u^{-1}\| [ |g_u\Lambda - g'_u\Lambda| + |\lambda_u - \lambda'_u| + |\lambda'_u(I + g) - \lambda'_u(I + g')| ] \\ & \leq a [ |g_u - g'_u| + \mu |g - g'| ] \leq (a + \mu) |g - g'| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \|L_s\| [ |g_s\Lambda^{-1} - g'_s\Lambda^{-1}| + |(\lambda_s(I + g) - \lambda_s(I + g'))\Lambda^{-1}| ] \\ & \leq a |g_s - g'_s| + \mu |g - g'| \leq (a + \mu) |g - g'| \end{aligned}$$

para toda  $g, g' \in \mathcal{C}_*^0(E, E)$ . Claramente, Lemma 5.1.3 aplica-se então a solução única de (5.3), (5.4),  $g = g_{\Lambda, \Lambda'}$ , depende continuamente em  $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L}_\mu(L)$ . Assim,  $h_{\Lambda, \Lambda'} = I + g_{\Lambda, \Lambda'}$  também faz. Claramente  $h\Lambda = \Lambda'h$  é implicada por (5.3), (5.4).

$h$  é um homeomorfismo: a inversa de  $h_{\Lambda, \Lambda'}$  é  $h_{\Lambda', \Lambda}$ . Para

$$h_{\Lambda, \Lambda'} h_{\Lambda', \Lambda} \Lambda' = h_{\Lambda, \Lambda'} \Lambda h_{\Lambda', \Lambda} = \Lambda' h_{\Lambda, \Lambda'} h_{\Lambda', \Lambda}$$

de modo que pela unicidade de soluções de  $h\Lambda' = \Lambda'h$ ,  $h_{\Lambda, \Lambda'} h_{\Lambda', \Lambda} = I$ . Isto vale para todo  $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L}_\mu(L)$  também isto vale para  $\Lambda, \Lambda'$  invertido. Portanto  $h_{\Lambda', \Lambda}$  é a inversa a direita e a esquerda de  $h_{\Lambda, \Lambda'}$ .  $\square$

**Observação 5.1.4.** *Aí ocorre a seguinte idéia de facilitar a prova de Teorema do Hartman. Podemos mostrar de antemão que qualquer aplicação de Lipschitz próxima a um isomorfismo hiperbólico de um espaço de Banach tem um único ponto fixo. Então podemos esperar resolver*

$$g\Lambda - Lg = \lambda'(I + g) - \lambda$$

por procurar um ponto fixo de  $(\Lambda, \Lambda')_* : \mathcal{C}_*^0(E, E) \rightarrow \mathcal{C}_*^0(E, E)$  definido como

$$g \mapsto L^{-1} [g\Lambda - \lambda'(I + g) + \lambda]$$

ou como

$$g \mapsto [Lg + \Lambda'(I + g) - \lambda] \Lambda^{-1}.$$

Embora  $(L, L)_*$  é hiperbólica relativa a

$$\mathcal{C}_*^0(E, E) = \mathcal{C}_*^0(E, E^u) \oplus \mathcal{C}_*^0(E, E^s)$$

este não é o caso que  $(\Lambda, \Lambda')_*$  está Lipschitz próximo  $(L, L)_*$ . Portanto o ponto fixo de  $(\Lambda, \Lambda')_*$  surge pelas próprias propriedades, antes que aquelas de  $(L, L)_*$ .

**Teorema 5.1.5** (Teorema de Hartman para fluxos). *Se  $\Lambda = L + \lambda$  é considerado como um campo vetorial em  $E$ ,  $e^L$  é hiperbólico respecto a  $E = E^u \oplus E^s$  e  $\nu$  é pequeno, então para cada  $\Lambda \in \mathcal{L}_\nu(L)$  existe um único  $H = H_\Lambda \in \mathcal{H}$  tal que  $H\phi_\Lambda(t, x) = \phi_L(t, Hx)$  para  $x \in E$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $\phi_L, \phi_\Lambda$  são os  $L$  e  $\Lambda$  fluxos.  $H_\Lambda$  é um homeomorfismo dependendo continuamente em  $\Lambda \in \mathcal{L}_\nu(L)$ .*

**Demonstração.** Consideremos as aplicações de tempo um  $\tilde{\phi}_L = \phi_L(1, \cdot)$  e  $\tilde{\phi}_\Lambda = \phi_\Lambda(1, \cdot)$ . A designação  $\Lambda \mapsto \tilde{\phi}_\Lambda$  facilmente é vista ser contínua e então para algum  $\nu > 0$ ,  $\Lambda \in \mathcal{L}_\nu(L) \Rightarrow \tilde{\phi}_\Lambda \in \mathcal{L}_\mu(e^L)$  onde  $\mu$  é como no Teorema de Hartman para aplicações. Assim há um único  $h \in \mathcal{H}$  tal que  $\tilde{\phi}_L h = h \tilde{\phi}_\Lambda$ . Reivindicamos que  $h$  faz  $h\phi_\Lambda(t, x) \equiv \phi_L(t, h(x))$  de modo que afirmamos  $h = H$  faz. Isto é equivalente a provar  $\phi_L(t, h\phi_\Lambda(-t, \cdot)) \equiv h$  que segue da unicidade do Teorema do Hartman para aplicações por observar que  $\phi_L(t, h\phi_\Lambda(-t, \cdot)) \in \mathcal{H}$  e resolve  $\tilde{\phi}_L(\cdot) = (\cdot)\tilde{\phi}_\Lambda$ . Qualquer equivalencia entre  $\phi_L$  e  $\phi_\Lambda$  também é entre  $\tilde{\phi}_L$  e  $\tilde{\phi}_\Lambda$ . Portanto  $H = h$  é único, um homeomorfismo e depende continuamente em  $\Lambda \in \mathcal{L}_\nu(L)$ .  $\square$

**Nota:** É  $e^L$  e não  $L$  o qual é assumido que seja hiperbólico.

## 5.2 Localização

Em aplicações estamos em geral interessados na existência de uma equivalência local de homeomorfismo, dado um fluxo local ou uma aplicação local. Seja  $L$  hiperbólico como acima. Para qualquer disco fechado  $D$  alrededor da origem, seja

$$\mathcal{L}_\mu^D(L) = \{L + \lambda : \lambda \in \mathcal{C}_*^0(D, E) \text{ é Lipschitz, limitada por } \mu \text{ e tem constante de Lipschitz } \leq \mu\}.$$

Há muitos operadores extensão lineares contínuos  $\mathcal{E} : \mathcal{L}_\mu^D(L) \rightarrow \mathcal{L}_{2\mu}(L)$ . Por exemplo, se  $\Lambda = L + \lambda \in \mathcal{L}_\mu^D(L)$ , seja  $\mathcal{E}\Lambda = L + \lambda$  onde

$$\lambda'x = \begin{cases} \lambda x, & \text{se } x \in D \\ \lambda x', & \text{se } x \notin D \end{cases}$$

$x'$  sendo um ponto de  $\partial D$  no segmento de 0 a  $x$ . Uma propriedade muito usada de  $\mathcal{E}$  é que  $\mathcal{E}(\mathcal{L}_\mu^D(L))$  é um subconjunto compacto de  $\mathcal{L}_\mu(L)$  se  $E = \mathbb{R}^n$ .

A equivalência global de homeomorfismos entre  $\mathcal{E}\Lambda$  e  $\mathcal{E}\Lambda'$  restrita a equivalência local de homeomorfismo (num disco menos que  $D$ ) entre (as restrições de)  $\Lambda$  e  $\Lambda'$ . A situação para fluxos locais é similar. Em ambos os casos, entretanto, unicidade da equivalência de homeomorfismos é totalmente perdida. Isto porque a extensão de  $\Lambda$  para  $E$  não é única.

O caso onde  $\Lambda : D \rightarrow E$  está próximo a  $L|_D$  é, naturalmente, é subentendido acima. É bem útil lidar com aplicações de Lipschitz em vez de aplicações de classe  $\mathcal{C}^1$  porque a dificuldade de estender  $\Lambda$  uniformemente  $\mathcal{C}^1$  próximo a  $L$  em  $E$ , se  $E$  é um espaço de Banach geral.



# Exercícios

## 6.1 Lista 1

(1). Seja  $g(t) = \frac{2}{t^2-1}, |t| \neq 1$ .

(a) Mostre que toda solução de  $\dot{x} = g(t)$  é da forma

$$\varphi(t) = c + \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right|$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ .

(b) Faça um esboço destas soluções em  $\Omega = \{t : |t| \neq 1\} \times \mathbb{R}$   
(Sugestão: Note que  $g(t) = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$ ).

(2). Seja  $f(x) = \frac{x^2-1}{2}$ . Mostre que toda solução de  $\dot{x} = f(x)$  diferente das soluções

$\varphi_+ \equiv 1$  e  $\varphi_- \equiv -1$  é da forma  $\varphi(t) = \frac{1+ce^t}{1-e^t}, c \neq 0$ .

Qual é o intervalo máximo  $I_c = (w_-(c), w_+(c))$  de definição destas soluções?. Faça um esboço geométrico das soluções em  $\Omega = \mathbb{R}^2$  e compare com o exercício anterior.

(3). Seja  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tal que  $|f(t, x)| \leq h(t)|x|, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$  ( $h(t) \geq 0$ )  $h(t)$  contínua. Mostre que toda solução não contínua de  $\dot{x} = f(t, x)$  está definida em  $\mathbb{R}$ .

(4).

## 6.2 Lista 2

1. Seja  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e Lipschitziana com relação à segunda variável em  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ .

- (a) Mostre usando aproximações sucessivas que dado  $(t_0, x_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$  o PVI  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  tem uma única solução  $x(t, t_0, x_0)$  definida em  $[a, b]$ .
- (b) Seja  $M$  um espaço métrico completo e  $T : M \rightarrow M$  contínua. Mostre que se para algum  $m \in \mathbb{N}$ ,  $T^m$  for uma contração então existe um único ponto fixo  $p$  de  $T$ . Mostre também que  $p$  é um atrator de  $T$ , isto é, para todo  $x \in M$   $T^n x \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ .
- (c) Mostre (a) utilizando (b).
2. Seja  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e tal que  $f$  é Lipschitziana em cada faixa  $[-a, a] \times \mathbb{R}^n$ ,  $a > 0$ . Mostre que se  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  então o PVI tem uma única solução  $x(t, t_0, x_0)$  definida em  $\mathbb{R}$ .
3. Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  onde  $D$  é um aberto de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Supomos que valha unicidade de solução do PVI. Se  $(t_0, x_0) \in D$  seja  $(w_-, w_+)$  o intervalo de existência da solução não continuável que passa por  $(t_0, x_0)$ . Usando as idéias da demonstração do Teorema 1.6.3, mostre que se  $[a, b] \subset (w_-, w_+)$  então para  $x_1$  suficientemente próximo de  $x_0$ ,  $x(t, t_0, x_0)$  está definida em  $[a, b]$  e a aplicação  $x_1 \rightarrow x(\cdot, t_0, x_1)$  é contínua.
4. Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $D$  é um aberto de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Mostre que se  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial x}$  forem contínuas em  $D$  então  $f$  é localmente Lipschitziana com relação a segunda variável.
5. Seja  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e tal que para cada  $a > 0$   $f$  é Lipschitziana em  $[-a, a] \times \mathbb{R}^n$  com constante de Lipschitz  $L = L_a$ . Mostre que toda solução de  $\dot{x} = f(t, x)$  está definida em  $\mathbb{R}$ .
6. Em cada um dos exemplos, encontre ou demonstre que não existe uma constante de Lipschitz nos domínios indicados
- (a)  $f(t, x) = t|x|$ ,  $|t| < a$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- (b)  $f(t, x) = x^{1/3}$ ,  $|x| < 1$
- (c)  $f(t, x) = 1/x$ ,  $1 \leq x < \infty$
- (d)  $f(t, x) = (x_1^2 x_2, t + x_3, x_3^2)$ ,  $|x| \leq b$ ,  $|t| \leq b$ .
7. Resolver o PVI
- $$\begin{cases} \ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = g(t) \\ y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1 \end{cases}$$
8. Ache a solução real de  $x^4 + x = g(t)$ .
9. Mostre que o Teorema de Schauder é falso se tirarmos ou a compacidade ou a convexidade.
10. Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . Se existir solução  $\varphi(t)$  de  $\dot{x} = f(x)$ ,  $\varphi(t) \neq 0$  tal que  $\varphi(t) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow -\infty$ , mostre que  $x \equiv 0$  é solução instável.

## 6.3 Lista 3

(1) (a). Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , contínua e periódica.

Supomos que existe uma sequência de períodos,  $(T_m)$ , da função  $g$ , tal que  $T_m > 0$  para todo  $m$  e  $T_m \rightarrow 0$ , quando  $m \rightarrow \infty$ . Mostre que  $g$  é constante.

(b). Seja  $\varphi(t)$  solução de  $\dot{x} = f(x)$ , onde  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  e  $\Omega$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ .

Supomos que  $(a, b)$  é intervalo maximal de existência de  $\varphi$ . Mostre que ocorre uma e somente uma das condições abaixo.

(i).  $\varphi : (a, b) \rightarrow \Omega$  é injetiva

(ii).  $a = -\infty, b = +\infty$  e  $\varphi$  é constante

(iii).  $a = -\infty, b = +\infty$ ,  $\varphi$  é periódica e existe um mínimo período  $T > 0$ .

(2). Discuta a estabilidade da solução  $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ , da equação de Van der Pol

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \epsilon \neq 0.$$

(3). Discuta a estabilidade dos pontos críticos de

$$\ddot{x} + x - x^3 = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{x} - x + x^2 = 0.$$

(4). Seja  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  onde  $\Omega$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $\varphi(t)$  solução definida em  $[0, \infty)$  tal que  $\varphi(t) \rightarrow b$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . Mostre que  $b$  é um ponto crítico de  $\dot{x} = f(x)$ .

(5). Desenhe o retrato de fase de cada um dos sistemas de equações diferenciais

$$(a) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} x$$

$$(b) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} x$$

$$(c) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} x$$

$$(d) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} x$$

$$(e) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} x$$

$$(f) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} x$$

(6). Estude a estabilidade da origem para

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2x^3. \end{cases}$$

(7). Considere a equação  $\ddot{x} + \ddot{x} + \dot{x} + ax = 0$  ou o sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -ax - y - z. \end{cases}$$

Ache os valores de  $a$  de modo que a solução nula do sistema seja assintoticamente estável.

(8). Desenhe o retrato de fase

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(9). Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 - xy \\ \dot{y} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{4}xy \end{cases}$$

(a). Determine os pontos críticos.

(b). Esboçar o retrato de fase local aproximado em torno de dois pontos críticos.

**Observação:** Para  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  tal sistema é um modelo da interação de duas culturas de bactérias, sendo  $x(t)$ ,  $y(t)$  a população de cada uma no instante  $t$ .

## 6.4 Lista 4

(1). Determinar base (complexa e real) de  $\dot{x} = Ax$  onde  $A$  é sucessivamente dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2). Calcule  $e^{At}$  para a primeira matriz acima

(3). Ache matrizes  $A$  e  $B$  tal que  $e^{A+B} \neq e^A e^B$ .

(4). Analise a estabilidade de:

$$x = \dot{x} = 0 \text{ de } \ddot{x} + \frac{g}{L} \sin x + c\dot{x} = 0, \quad c > 0$$

$$x = \dot{x} = 0 \text{ de } \ddot{x} + \frac{g}{L} \sin x = 0$$

$$x = \pi, \dot{x} = 0 \text{ de } \ddot{x} + \frac{g}{L} \sin x = 0$$

(5). Mostre que se  $x_0$  é ponto crítico de  $\dot{x} = f(x)$  e se os autovalores de  $f_x(x_0)$  tiverem parte real negativa então a solução  $x(t) = x_0$  é uniformemente assintoticamente estável. Supomos que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e classe  $\mathcal{C}^1$ .

(6). Analise a estabilidade da origem para

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \sin x_2 - 3x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_1^2. \end{cases}$$

(7). Resolver o PVI

$$\begin{cases} \ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = g(t) \\ g(0) = 0, \dot{y}(0) = 1. \end{cases}$$

(8). Ache a solução geral de

$$x^{(4)} + x = g(t).$$

(9). Achar um base de soluções reais de  $\dot{x} = Ax$  onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(10). Dê condições sobre  $a$  de modo que toda solução de  $\dot{x} = Ax$  tenda a zero quando  $t \rightarrow +\infty$ , onde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(11). Construir um exemplo com  $A(t)$  descontínuo de modo que todo autovalor de  $A(t)$  tem parte real  $\leq \alpha < 0$ , para algum  $\alpha$  tal que existe solução de  $\dot{x} = A(t)x$  que não tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Tomar  $A(t)$  periódica. Seguir a idéia do exercício (12).

(12). Calcule os expoentes característicos de  $\dot{y} = [A + B_m(t)]y$ , onde  $B_m(t)$  é  $2m\pi$ -periódica.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B_m(t) = 0, \quad 0 \leq t < 2m\pi - \frac{\pi}{2},$$

$$B_m(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad 2m\pi - \frac{\pi}{2} \leq t < 2m\pi.$$

Analise geometricamente.

## 6.5 Lista 5

(1). Achar  $\mathcal{M}_\lambda(A)$  onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

para cada  $\lambda =$  autovalor de  $A$ .

(2). Achar a forma canônica para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3). Achar base de soluções reais de  $y^{(4)} - y = 0$ .

(4). Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$$

(a). Analise a estabilidade via autovalores

(b). Prove o mesmo fato ajustando uma função de Liapunov para o sistema

(c). Use a mesma função de Liapunov para estudar a estabilidade da origem de

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + xy \\ \dot{y} = -x - y - x^2 - y^3. \end{cases}$$

(5). Supomos que  $g$  é de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $xg(x) > 0$ ,  $x \neq 0$ ,  $|x| \leq \delta$ . Mostre que existe vizinhança  $V$  da origem tal que toda solução de

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x), \end{cases}$$

que começa em  $V$ , permanece em  $V$ . Além disso essa solução é periódica.

(6). Demonstrar que a solução  $(x, \dot{x}) = (0, 0)$  de  $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0$  é assintoticamente estável, usando funcionais de Liapunov,  $\beta, \alpha > 0$ .

(7). Seja

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + f(x),$$

onde  $f(x) = O(|x|^3)$ . Calcule a variedade estável até termo de ordem dois.

(8). Encontre os pontos críticos e discuta a estabilidade dos mesmos, para

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = -x - x^2. \end{cases}$$

(9). Dada a equação  $\dot{x} = Ax$  encontrar as variedades estável e instável da origem onde,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 10 \\ 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

(10). Sejam  $A$  matriz real  $n \times n$ , tal que  $A$  não tem autovalores com parte real zero e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e limitada em  $\mathbb{R}$ . Mostre que a equação  $\dot{x} = Ax + f(t)$  tem uma única solução limitada em  $\mathbb{R}$  e essa solução é dada por

$$x(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)} \Pi_- f(s) ds + \int_{\infty}^t e^{A(t-s)} \Pi_+ f(s) ds$$

onde  $\Pi_-$ ,  $\Pi_+$  são, respectivamente, as projeções sobre a variedade estável e instável de  $\dot{x} = Ax$ .

(11). Mostrar que a origem do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y^2 \\ \dot{y} = xy - y^3 \end{cases}$$

é assintoticamente estável.

(Sugestão: Ajustar a função de Liapunov da forma  $V(x, y) = x^2 + ay^2$ .)

(12). Ajustar a função  $V(x, y) = x^2 - xy + by^2$  de modo a provar a instabilidade da origem para

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -4x + 3y. \end{cases}$$





---

## Referências Bibliográficas

- [1] Nam Parshad Bhatia and Giorgio P. Szegö, *Stability Theory of Dynamical Systems*
- [2] Earl A. Coddington and Norman Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw-hill, 1955.
- [3] Jack K. Hale, *Ordinary Diferential Equations*, Krieger Publishin Company, 1980.
- [4] Philip Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley, 1964.
- [5] Serge Lang, *Introduction to Differentiable Manifolds*, Intersciene, pp. 12–13, 1965.
- [6] Charles C. Pugh, On a Theorem of P. Hartman, *Amer. J. Math.* **91**, 2, pp. 363–367, 1969.
- [7] Jorge Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janiero, 1979.

---

# Índice Remissivo

- aplicação
  - completamente contínua, 8
  - compacta, 7
  - localmente Lipschitziana, 19
- autoespaço generalizado, 69
- autovetor generalizado, 69
- centro, 44, 76
- conjunto
  - $\alpha$ -limite, 47
  - $\omega$ -limite, 47
  - convexo, 7
  - equicontínuo, 9
  - invariante, 49
  - minimal, 51
  - negativamente invariante, 49
  - positivamente invariante, 49
- continuação de solução, 13
- contração uniforme, 19
- Crítério de Sylvester, 104
- derivada
  - de Frechet, 28
  - de Gâteaux, 28
  - direcional, 28
  - parcial, 28
- Desigualdade
  - de Gronwall, 16
  - de Gronwall Generalizada, 17
- divisores elementares simples, 69
- domínio de definição, 20
- espaço
  - de estados, 41
  - de fase, 41
- expoente característico, 81
- extensão de solução, 13
- foco
  - estável, 77
  - instável, 77
- matriz
  - fundamental, 57
  - monodromía, 81
  - principal, 58
  - principal em  $t_0$ , 57
- multiplicadores característicos, 81
- multiplicidade
  - algébrica, 69
  - geométrica, 69
- nó
  - estável, 75
  - impróprio estável, 77
  - impróprio instável, 78
  - instável, 75
- órbita, 41
- ponto
  - crítico, 42
  - de equilíbrio, 42
  - de sela, 75
  - regular, 42
- problema de valor inicial, 5
- prolongamento de solução, 13
- retrato de fase, 42

sistema

autônomo, 41

homogêneo, 56

não-homogêneo, 56

solução

assintoticamente estável, 36

de uma EDO, 5

estável, 35

globalmente assintoticamente estável,  
118

instável, 36

uniformemente estável, 36

solução uniformemente assintoticamente estável,  
36

Teorema

da diferenciabilidade do ponto fixo, 30

da continuação de solução, 14

da existência, unicidade, continuidade  
com relação às condições iniciais, 20

de Áscoli, 9

de Banach-Cacciopoli, 19

de Floquet, 80

de Peano, 10

do ponto fixo de Schauder, 7

trajetória de solução, 20

Wronskiano, 61