# SME0340
# Equações Diferenciais Ordinárias
# Aula 20

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

22 de maio de 2018

## Aula Passada

**Sistemas de EDs**

- Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t)$$

- Sistemas Diagonais;
- Autovalores $\lambda$ e Autovetores $\vec{v}$ da matriz $A$;
- Soluções com autovalores (reais) individuais:

$$\vec{x}^j(t) = e^{\lambda_j t}\vec{v}_j, \quad t \in \mathbb{R}.$$



## Sistemas Homogêneos (cont.)

**Exemplo:** Determine a solução geral de

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\vec{x}(t).$$

**Solução:** Determinemos, primeiro, os autovalores $\lambda$ e autovetores correspondentes $\vec{v}$ da matriz $A$, com $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$:

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = -2$$

$$\text{Para } \lambda_1 = 1: \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T, \; a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \vec{v}_1 = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; a \in \mathbb{R}.$$



## Sistemas Homogêneos (cont.)

**Exemplo:** Determine a solução geral de

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\vec{x}(t).$$

**Solução (cont.):** $\lambda_1 = 1, \; \vec{v}_1 = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \; a \in \mathbb{R}.$

$$\text{Para } \lambda_2 = -2: \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}^T, \; c, d \in \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \vec{v}_2 = c\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \; c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}^1(t) = e^t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}^2(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R} \quad \textbf{(LI?)}$$

$$\therefore \quad \vec{x}(t) = c_1 e^t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

## Sistemas Homogêneos (cont.)

Para cada par de valores **complexos**, $\lambda_1$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, e seus respectivos autovetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, obtemos duas soluções complexas $\vec{z}^{\,1}(t)$ e $\vec{z}^{\,2}(t)$ na forma

$$\vec{z}^{\,1}(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1; \quad \vec{z}^{\,2}(t) = e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2, \quad t \in \mathbb{R},$$

sendo $\vec{z}^{\,2}(t) = \overline{\vec{z}^{\,1}(t)}$.

**Note:** $A\overline{\vec{v}_1} = \overline{A\vec{v}_1} = \overline{\lambda_1 \vec{v}_1} = \overline{\lambda_1}\,\overline{\vec{v}_1} = \lambda_2 \overline{\vec{v}_1} \Rightarrow \vec{v}_2 = \overline{\vec{v}_1}$

Utilizando um teorema equivalente ao visto em EDs de ordem 2 e superiores sobre extração das soluções reais a partir de soluções complexas, obtemos as *soluções reais*

$$\vec{x}^{\,1}(t) = \mathrm{Re}\left(\vec{z}^{\,1}(t)\right); \quad \vec{x}^{\,2}(t) = \mathrm{Im}\left(\vec{z}^{\,1}(t)\right),$$

lembrando que

$$e^{(a \pm ib)t} = e^{at}\left[\cos(bt) \pm i\,\mathrm{sen}(bt)\right].$$



## Sistemas Homogêneos (cont.)

**Exemplo:** Determine a solução geral de

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}(t).$$

**Solução:** (na lousa)

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \mathrm{sen}(2t) \end{bmatrix},$$
$$c_1, c_2, c_3, t \in \mathbb{R}.$$



## Sistemas Homogêneos (cont.)

**Exemplo:** Determine a solução geral $\vec{x}(t)$ de

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

**Solução:** (em parte na lousa)

$$\lambda_1 = 1 + i; \quad \lambda_2 = 1 - i;$$

$$\vec{v}_1 = a\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = c\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \quad a, c \in \mathbb{C}.$$

$$\vec{z}^{\,1}(t) = e^{(1+i)t}\vec{v}_1 \overset{(a=1)}{=} e^t\left(\begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\mathrm{sen}(t) \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} \mathrm{sen}(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}\right) \overset{(c=1)}{=} \overline{\vec{z}^{\,2}(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}^{\,1}(t) = e^t\begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\mathrm{sen}(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{x}^{\,2}(t) = e^t\begin{bmatrix} \mathrm{sen}(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \quad \vec{x}(t) = e^t\begin{bmatrix} c_1\cos(t) + c_2\,\mathrm{sen}(t) \\ -c_1\,\mathrm{sen}(t) + c_2\cos(t) \end{bmatrix}, \quad t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$