SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 12

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

12 de abril de 2018

Aula Passada

EDs de Segunda Ordem

- EDs Lineares Homogêneas:
  Método Geral para Coeficientes Constantes
  $$y'' + a\,y' + b\,y = 0$$
- Revisão de Números Complexos.

Aula Passada (cont.)

A ideia do **Método Geral** é decompor a ED linear de segunda ordem em duas EDs de primeira ordem, tal que, ao resolver o conjunto de equações, obtém-se a solução geral da EDO de segunda ordem.

Como fazer isso?
Se a, b constantes reais em
$$y'' + a\,y' + b\,y = 0,$$
conseguimos achar constantes r_1, r_2 tal que escrevemos a ED como
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - r_1\,y\right) - r_2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - r_1\,y\right) = 0.$$

Separamos em duas EDs lineares de ordem 1.

Aula Passada (cont.)

Proposição: Se $z(t) = u(t) + i\,v(t)$ é uma solução a valores complexos da ED linear homogênea
$$y'' + a\,y' + b\,y = 0,$$
então $u(t)$ e $v(t)$ são soluções reais da ED homogênea.

Quando resolvemos uma ED linear homogênea de segunda ordem com r_1, r_2 complexos, encontraremos uma *solução geral complexa* para a ED, mas desejamos uma solução geral *real*.

Para obtê-la, usamos a Proposição: basta *desenvolver* uma solução complexa para a forma $u(t) + i\,v(t)$ e tomar $y_1(t) = u(t)$ e $y_2(t) = v(t)$ como as duas soluções reais LI da ED linear homogênea:
$$y(t) = C_1\,y_1(t) + C_2\,y_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad y(t) \in \mathbb{R}.$$

Método Geral (cont.)

Exemplo: Determine a solução geral de

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Solução: (na lousa)

Solução *complexa* (com $i = \sqrt{-1}$):

$$w(t) = K_1\, e^{(1+2i)t} + K_2\, e^{(1-2i)t}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R}$$

Escolhemos *uma* solução *não nula* – por exemplo, com $K_1 = 1,\ K_2 = 0$:

$$w_1(t) = e^{(1+2i)t},\ t \in \mathbb{R}$$

e expandimos na *forma padrão de função complexa*, usando a *Fórmula de Euler*:

$$w_1(t) = e^t \cos(2t) + i\, e^t \operatorname{sen}(2t),\ t \in \mathbb{R}$$

Pela Proposição:

$$y(t) = C_1\, e^t \cos(2t) + C_2\, e^t \operatorname{sen}(2t), \quad C_1, C_2, t \in \mathbb{R}.$$

Método Geral (cont.)

Exercício: Determine a solução geral de

$$y'' - 18y = 0.$$

Solução:

$$y(t) = C_1\, e^{3\sqrt{2}\,t} + C_2\, e^{-3\sqrt{2}\,t}, \quad C_1, C_2, t \in \mathbb{R}.$$

Método Geral (cont.)

Exemplo: Determine a solução $y(t)$ de

$$\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$$

Solução: (na lousa)

$$w(t) = K_1\, e^{(3i)t} + K_2\, e^{(-3i)t}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$e^{\pm i(3t)} = \cos(3t) \pm i\,\operatorname{sen}(3t)$$

Por Proposição:

$$y(t) = C_1 \cos(3t) + C_2 \operatorname{sen}(3t), \quad C_1, C_2, t \in \mathbb{R}.$$

Solução do PVI: $\boxed{y(t) = \cos(3t) - \operatorname{sen}(3t), \quad t \in \mathbb{R}.}$

Método Geral (cont.)

A partir de agora, podemos usar a seguinte afirmação:

Afirmação A:

Considerando a ED $\left[\dfrac{dw}{dt} + r\,w = g(t)\right]$ com $w = w(t)$, e sendo r uma constante (real ou complexa), podemos reescrever a ED como

$$\frac{d}{dt}\left[w(t)\, e^{rt}\right] = g(t)\, e^{rt}$$

após multiplicar por e^{rt}, pois $\frac{d}{dt}\left(e^{rt}\right) = r\, e^{rt}$.