SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 5

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

13 de março de 2018

EDs Não Lineares

Estudaremos agora equações diferenciais de primeira ordem

$$y' = f(t, y)$$

não lineares, que podem ser escritas na forma

$$M(t, y) + N(t, y)\, y' = 0,$$

tal que $N(t, y) \neq 0$ em uma região $A \subset \mathbb{R}^2$.

Obs.: As EDs *lineares* de primeira ordem são um subconjunto destas, com $N(t, y) = 1$ e $M(t, y) = a(t)\, y - b(t)$.

Tipos especiais de EDs não lineares:

- EDs com variáveis separáveis;
- EDs exatas;
- EDs homogêneas.

Aula Passada

EDs Lineares de Ordem 1:

$$y' + a(t)\, y = b(t),$$

$$a(t), b(t) \text{ contínuas para } t \in J$$

- Não Homogêneas.
- Casos Especiais: transformar EDs não lineares em EDs lineares.
  - Equação de Bernoulli:
    $$y' + p(t)\, y = q(t)\, y^n$$
    Dividir por y^n e substituir $z(t) = [y(t)]^{1-n}$.
  - Equação de Riccati:
    $$y' + p(t)\, y + q(t)\, y^2 = f(t)$$
    Com solução y_1 conhecida, substituir $y(t) = y_1(t) + \frac{1}{z(t)}$.

Variáveis Separáveis

Para uma ED de primeira ordem na forma

$$M(t, y) + N(t, y)\, y' = 0$$

se podemos escrever

$$M(t, y) = P(t)\, Q(y), \quad N(t, y) = R(t)\, S(y),$$

então

$$P(t)\, Q(y) + R(t)\, S(y)\, y' = 0$$

é uma **ED com Variáveis Separáveis**.

Resolvemos a ED por *separação de variáveis*, se $R(t) \neq 0$ e $Q(y) \neq 0$:

$$P(t)\, Q(y)\, \mathrm{d}t + R(t)\, S(y)\, \mathrm{d}y = 0\, \mathrm{d}t = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{S(y)}{Q(y)} \mathrm{d}y = -\frac{P(t)}{R(t)} \mathrm{d}t$$

Variáveis Separáveis (cont.)

Exemplo: Determine a solução $y(t)$ do PVI

$$\begin{cases} e^y t^2 + \frac{1}{3} y' = 0 \\ y(1) = -\ln(2) \end{cases}.$$

Solução: Se rearranjarmos a ED, com $y' = \frac{dy}{dt}$, temos

$$e^y t^2 + \frac{1}{3}\frac{dy}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\, e^y t^2\, dt + \frac{dy}{dt} dt = 0$$

$$\Rightarrow \quad -e^{-y}\, dy = 3\, t^2\, dt$$

$$-\int e^{-y}\, dy = \int 3\, t^2\, dt \quad \Rightarrow \quad e^{-y} = t^3 + C$$

$$\Rightarrow \quad e^y = \frac{1}{t^3 + C} \quad \Rightarrow \quad y(t) = -\ln\left(t^3 + C\right), \quad t^3 + C > 0$$

$$y(1) = -\ln\left((1)^3 + C\right) = -\ln(2) \quad \Rightarrow \quad C = 2 - 1 = 1$$

$$\therefore \quad y(t) = -\ln\left(t^3 + 1\right), \quad t > -1.$$

EDs Exatas

Observemos, agora, EDs na forma

$$M(t,y) + N(t,y)\, y' = 0 \quad \text{ou} \quad M(t,y)\, dt + N(t,y)\, dy = 0.$$

A ED acima é uma **equação diferencial exata** se, para $(t,y) \in A \subset \mathbb{R}^2$, for possível encontrar uma função $V = V(t,y) : A \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial t} V(t,y) = M(t,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} V(t,y) = N(t,y).$$

Exemplo 1: A ED $2\, t\, y + t^2\, y' = 0$ é exata.

Exemplo 2: $t^2\, y' + 2\, t\, y = 2\, t$ é exata, e $t^2\, y' + 2\, t\, y = 3\, t$ também é.

Obs.: Se a ED é exata, $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} = 0.$

Variáveis Separáveis (cont.)

Exemplo: Resolva $y' + y^2 \cos(t) = 0$.

Solução: (na lousa)

$$y(t) = \frac{1}{\text{sen}(t) + C}, \quad C \in \mathbb{R}, \ \left\{t \in \mathbb{R} : \text{sen}(t) + C \neq 0\right\}.$$

$y \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$ também é solução.

EDs Exatas (cont.)

A função $V(t,y)$ é chamada uma **integral primeira** da ED exata e as *curvas* definidas pela equação $V(t,y) = C$ são chamadas **curvas integrais** da ED exata.

As soluções da ED exata são dadas *implicitamente* por $V(t,y) = C$.

Exemplo: A ED $t^2\, y' + 2\, t\, y = 4\, t$ é exata, pois existe $V(t,y) = t^2\,(y-2)$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[t^2\,(y-2)\right] = 2\, t\,(y-2) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[t^2\,(y-2)\right] = t^2.$$

Então $V(t,y) = t^2\,(y-2)$ é uma integral primeira da ED e $t^2\,(y-2) = C$ são as curvas integrais (solução geral da ED).

EDs Exatas (cont.)

Dada uma ED

$$M(t,y)\,\mathrm{d}t + N(t,y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

como encontrar uma integral primeira $V(t,y)$?

Primeiro precisamos determinar se a ED é exata.

Teorema: Suponhamos que M, M_y, M_t, N, N_y, N_t sejam contínuas num retângulo

$$\mathcal{R} = \left\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 :\; a < t < b,\; c < y < d\right\}.$$

Então a ED é uma ED exata se, e somente se,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

para todo $(t,y) \in \mathcal{R}$. (Prova por Teorema de Schwarz).