SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 2

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

1 de março de 2018

Introdução (cont.)

Existência e Unicidade de Soluções:

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.
Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$F(t) = \int_a^t f(s)\,ds, \quad a \leq t \leq b$$

é diferenciável em (a, b) e $F'(t) = f(t)$ para todo $t \in (a, b)$.

Então, dizemos que $F(t)$, $t \in [a, b]$, é uma solução do **problema de valor inicial (PVI)**

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) \\ y(a) = F(a) = 0 \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

Aula Passada

Apresentação da Disciplina
- Ementa;
- Avaliação;
- Referências.

Introdução
- Definições;
- Aplicações.

Introdução (cont.)

$F(t)$, $t \in [a, b]$ é a *única* solução do PVI

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) \\ y(a) = 0 \end{cases}, \quad t \in [a, b]?$$

Sim, pois se $G(t)$, $t \in [a, b]$, é outra solução, então

$$G'(t) = f(t) = F'(t) \quad \Rightarrow \quad F'(t) - G'(t) = f(t) - f(t) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (F - G)'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad (F - G)(t) = \text{constante}.$$

$$(F - G)(a) = F(a) - G(a) = 0 - 0 = 0.$$

$$\therefore \quad G(t) = F(t) \text{ para todo } t \in [a, b].$$

Mas há PVIs que possuem mais de uma solução.

Exemplo: $\begin{cases} y' = 3\,y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ possui *infinitas* soluções.

Qual a verdade? Somente uma? Mais de uma? Os dois?

Introdução (cont.)

Dado o PVI

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

onde f é definida numa região aberta A de $\mathbb{R}^2$, podemos perguntar:

1. Como sabemos que o PVI *possui* uma solução sem podermos determiná-la? (Existência)
2. Como sabemos que existe *apenas uma* solução do PVI? (Unicidade)
3. O que nos *interessa* saber se o PVI possui apenas uma solução se não sabemos calculá-la?

Introdução (cont.)

Para responder à segunda pergunta ("Como sabemos que existe *apenas uma* solução do PVI?"):

Teorema (Existência e Unicidade Local): Suponha $f(t,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y)$ sejam funções contínuas no retângulo

$$\mathcal{R} = \left\{(t,y) \ : \ t_0 \le t \le t_0 + a; \ |y - y_0| \le b\right\}.$$

Sejam $M = \max\limits_{(t,y)\in\mathcal{R}} |f(t,y)|$ e $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. Então o PVI

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

possui *uma e somente uma* solução $y(t)$ no intervalo $t_0 \le t \le t_0 + \alpha$.

Prova do Teorema pode ser encontrado em Braun, "Equações Diferenciais e suas Aplicações".

Introdução (cont.)

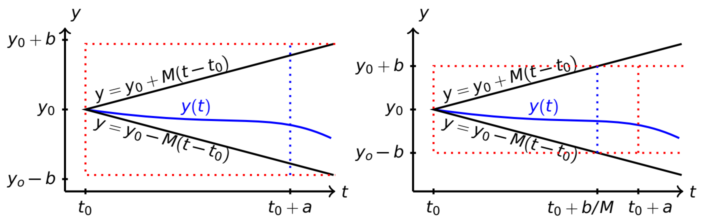
Com o PVI $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, podemos afirmar:

Lema 1: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e consideremos o retângulo

$$\mathcal{R} = \left\{(t,y) \ : \ t_0 \le t \le t_0 + a; \ |y - y_0| \le b\right\}$$

Definimos $M = \max\limits_{(t,y)\in\mathcal{R}} |f(t,y)|$ e $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. Então

$$\left|y(t) - y_0\right| \le M\,|t - t_0| \quad \text{para} \quad t_0 \le t \le t_0 + \alpha.$$



Introdução (cont.)

Exemplo: Determine o maior intervalo de t em que a solução $y(t)$ do PVI

$$\begin{cases} y' = y^2 + \text{sen}(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

existe e é única.

Solução: (na lousa)

Usando o Teorema da Existência e Unicidade Local,

$$0 \le t \le \frac{1}{2}$$

EXERCÍCIO: Mostrar que o máximo de $\frac{b}{b^2+1}$, $b \ge 0$, é igual a $\frac{1}{2}$.