

SME0340

Equações Diferenciais Ordinárias

Aula 28

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
 marialuisa @ icmc . usp . br
 Sala: 3-241

Página: <http://ae4.tidia-ae.usp.br>

15 de junho de 2018



Solução de Sistemas de EDs



Assim como é possível resolver EDs de ordem n com coeficientes constantes, também podemos aplicar a Transformada de Laplace para resolver PVI de **sistemas de EDs** de primeira ordem

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + g_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + g_n(t) \\ x_1(0) = x_1^0, \dots, x_n(0) = x_n^0 \end{cases}$$

COMO?

Aplicamos a Transformada de Laplace a cada ED do sistema (considerando a condição inicial dada), resolvemos o *sistema algébrico* resultante, e aplicamos a Transformada Inversa de Laplace para determinar a solução do sistema.

Aula Passada



Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, s > 0; \quad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0; \quad \mathcal{L}[e^{ct}] = \frac{1}{s-c}, s > c;$$

$$\mathcal{L}[\sin(wt)] = \frac{w}{s^2 + w^2}, s > 0; \quad \mathcal{L}[\cos(wt)] = \frac{s}{s^2 + w^2}, s > 0;$$

Com $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$:

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a), s > s_0 + a;$$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s); \quad \mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

Aplicação em EDs:

- ▶ PVI;
- ▶ Solução Geral;
- ▶ Condição Inicial $t_1 \neq 0$.

Sistemas de EDs (cont.)



Exemplo: Solução $\vec{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ de

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = 9x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_1(0) = 3, \ x_2(0) = -3 \end{cases}$$

Solução: (partes na lousa) Sendo

$$X_1(s) = \mathcal{L}[x_1(t)], \quad X_2(s) = \mathcal{L}[x_2(t)],$$

$$\mathcal{L}[x_1'(t)] = sX_1(s) - 3, \quad \mathcal{L}[x_2'(t)] = sX_2(s) + 3,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sX_1 - 3 = 2X_1 + X_2 \\ sX_2 + 3 = 9X_1 + 2X_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s-2)X_1 - X_2 = 3 & (I) \\ -9X_1 + (s-2)X_2 = -3 & (II) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1(s) = \frac{3s-9}{s^2-4s-5} \\ X_2(s) = \frac{33-3s}{s^2-4s-5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{5t} + 2e^{-t} \\ x_2(t) = 3e^{5t} - 6e^{-t} \end{cases}, t \geq 0$$

Sistemas de EDs (cont.)



Exemplo: Solução $\vec{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ de

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + e^{-t} \\ x_2'(t) = 9x_1(t) + 2x_2(t) - 3e^{-t} \\ x_1(0) = 3, \ x_2(0) = -3 \end{cases}$$

Solução: (na lousa)

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{5t} + 2e^{-t} + te^{-t} \\ 3e^{5t} - 6e^{-t} - 3te^{-t} \end{bmatrix}, \ t \geq 0$$

Sistemas de EDs (cont.)



Assim como para solução de equações diferenciais ordinárias usando Transformada de Laplace:

- ▶ Se quisermos a **solução geral** de um sistema de EDs, assumimos constantes arbitrárias para as condições iniciais.
- ▶ Se as condições iniciais são fornecidas em $t_1 \neq 0$, fazemos uma **mudança de variável** para t , $\tau = t - t_1$.

Sistemas de EDs (cont.)



Exemplo: Solução $\vec{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ de

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ x_1(0) = 3, \ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Solução: (na lousa)

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 3e^t \cos(t) \\ -3e^t \sin(t) \end{bmatrix}, \ t \geq 0.$$