

SME0340

Equações Diferenciais Ordinárias

Aula 20

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
 marialuisa @ icmc . usp . br
 Sala: 3-241

Página: <http://ae4.tidia-ae.usp.br>

11 de maio de 2018



Sistemas Homogêneos (cont.)



Para cada par de valores **complexos**, λ_1 e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, e seus respectivos autovetores \vec{v}_1, \vec{v}_2 , obtemos duas soluções complexas $\vec{z}^1(t)$ e $\vec{z}^2(t)$ na forma

$$\vec{z}^1(t) = e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1; \quad \vec{z}^2(t) = e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2, \quad t \in \mathbb{R},$$

sendo $\vec{z}^2(t) = \overline{\vec{z}^1(t)}$.

Note: $A \vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 = \overline{\lambda_1 \vec{v}_1} = \overline{\lambda_1} \overline{\vec{v}_1} = \lambda_2 \overline{\vec{v}_1} \Rightarrow \vec{v}_2 = \overline{\vec{v}_1}$

Utilizando um teorema equivalente ao visto em EDs de ordem 2 e superiores sobre extração das soluções reais a partir de soluções complexas, obtemos as *soluções reais*

$$\vec{x}^1(t) = \text{Re}(\vec{z}^1(t)); \quad \vec{x}^2(t) = \text{Im}(\vec{z}^1(t)),$$

lembrando que

$$e^{(a \pm ib)t} = e^{at} [\cos(bt) \pm i \text{sen}(bt)].$$

Aula Passada



Sistemas de EDs

- ▶ Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t) \vec{x}(t)$$

- ▶ Sistemas Diagonais;
- ▶ Autovalores λ e Autovetores \vec{v} ;
- ▶ Soluções com autovalores (reais) individuais:

$$\vec{x}^j(t) = e^{\lambda_j t} \vec{v}_j, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sistemas Homogêneos (cont.)



Exemplo: Determine a solução geral $\vec{x}(t)$ de

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Solução: (em parte na lousa)

$$\lambda_1 = 1 + i; \quad \lambda_2 = 1 - i;$$

$$\vec{v}_1 = a \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = c \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \quad a, c \in \mathbb{C}.$$

$$\vec{z}^1(t) = e^{(1+i)t} \vec{v}_1 \stackrel{(a=1)}{=} e^t \left(\begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\text{sen}(t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \text{sen}(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \right) \stackrel{(c=1)}{=} \vec{z}^2(t)$$

$$\Rightarrow \vec{x}^1(t) = e^t \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\text{sen}(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{x}^2(t) = e^t \begin{bmatrix} \text{sen}(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \vec{x}(t) = e^t \begin{bmatrix} c_1 \cos(t) + c_2 \text{sen}(t) \\ -c_1 \text{sen}(t) + c_2 \cos(t) \end{bmatrix}, \quad t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sistemas Homogêneos (cont.)



Exemplo: Determine a solução geral de

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}(t).$$