

SME0340

Equações Diferenciais Ordinárias

Aula 7

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: <http://ae4.tidia-ae.usp.br>

21 de março de 2018



Aula Passada



► Se $u(t, y) = u(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial y} [u(t)M(t, y)] = \frac{\partial}{\partial t} [u(t)N(t, y)]$$

$$\Rightarrow u(t)M_y(t, y) = u'(t)N(t, y) + u(t)N_t(t, y)$$

$$\Rightarrow u'(t) = \frac{M_y(t, y) - N_t(t, y)}{N(t, y)}u(t)$$

► Se $u(t, y) = u(y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y} [u(y)M(t, y)] = \frac{\partial}{\partial t} [u(y)N(t, y)]$$

$$\Rightarrow u'(y)M(t, y) + u(y)M_y(t, y) = u(y)N_t(t, y)$$

$$\Rightarrow u'(y) = \frac{N_t(t, y) - M_y(t, y)}{M(t, y)}u(y)$$

Aula Passada



EDs Não Lineares

$$M(t, y) + N(t, y)y' = 0 \quad \text{ou} \quad M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0$$

► EDs *não exatas*: encontrar $u(t, y) \neq 0$ tal que

$$u(t, y)M(t, y) + u(t, y)N(t, y)y' = 0$$

seja exata.

► Formas do fator integrante $u(t, y)$:

- $u(t, y) = u(t)$;
- $u(t, y) = u(y)$;
- ...

EDs Não Exatas (cont.)



Exemplo: Determine a solução do PVI

$$\begin{cases} ty^3 - e^t yy' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solução: (na lousa)

$$y(t) = \frac{e^t}{t+1}, \quad t > -1.$$

Note que a ED *não é exata* (por quê?), mas é *separável* (por quê?).

EDs Homogêneas



Uma equação diferencial na forma

$$M(t, y) + N(t, y)y' = 0$$

é dita ser **homogênea** (de primeira ordem) se M e N são *funções homogêneas de mesmo grau*, isto é, para qualquer $\lambda > 0$,

$$M(\lambda t, \lambda y) = \lambda^s M(t, y) \quad \text{e} \quad N(\lambda t, \lambda y) = \lambda^s N(t, y).$$

Neste caso M e N são funções homogêneas de grau s .

Exemplo: A ED

$$(2t + y)y - t^2 y' = 0$$

é homogênea. (Por quê?)

EDs Homogêneas (cont.)



Exemplo: Resolver a ED

$$(2t + y)y - t^2 y' = 0.$$

Solução: Já mostramos que a ED é homogênea. Vamos determinar $y(t)$.

Usando $y = tu$, $u = u(t)$, e com $y' = u + tu'$, temos

$$(2t + tu)tu - t^2(u + tu') = 0$$

$$(2 + u)u - (u + tu') = 0, \quad t \neq 0$$

$$u^2 + u = tu' \Rightarrow \frac{du}{u + u^2} = \frac{dt}{t}, \quad u \notin \{0, -1\}$$

$$\int \frac{du}{u + u^2} = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow \ln \left| \frac{u}{1 + u} \right| = \ln |t| + C$$

$$\dots \Rightarrow \ln \left| \frac{y}{t + y} \right| = \ln |t| + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$\text{ou } y(t) = 0, t \in \mathbb{R}, \text{ ou } y(t) = -t, t \in \mathbb{R}.$$

EDs Homogêneas (cont.)



Como resolver uma ED homogênea

$$M(t, y) + N(t, y)y' = 0?$$

Para resolver uma ED homogênea, vamos *transformá-la* em uma ED com *variáveis separáveis*.

Fazemos a *mudança de variável* $y = tu$ onde $u = u(t)$.

Como

$$y' = \frac{dy}{dt} = u + t \frac{du}{dt} = u + tu'$$

e

$$M(t, y) = M(t, tu) = t^s M(1, u),$$

$$N(t, y) = N(t, tu) = t^s N(1, u),$$

substituímos na ED e a transformamos em uma ED com variáveis separáveis dependente de t e u .

Resolvendo para u , obtemos y .

EDs Homogêneas (cont.)



Exemplo: Resolver

$$\begin{cases} (x^2 + y^2) + 3xyy' = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Solução: (na lousa)

$$3 \ln \left| 4 \left(\frac{y}{x} \right)^2 + 1 \right| = -8 \ln |x|$$