

SME0340

Equações Diferenciais Ordinárias

Aula 5

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa@icmc.usp.br
Sala: 3-241

Página: <http://ae4.tidia-ae.usp.br>

14 de março de 2018



EDs Não Lineares



Estudaremos agora equações diferenciais de primeira ordem

$$y' = f(t, y)$$

não lineares, que podem ser escritas na forma

$$M(t, y) + N(t, y)y' = 0,$$

tal que $N(t, y) \neq 0$ em uma região $A \subset \mathbb{R}^2$.

Obs.: As EDs *lineares* de primeira ordem são um subconjunto destas, com $N(t, y) = 1$ e $M(t, y) = a(t)y - b(t)$.

Tipos especiais de EDs não lineares:

- ▶ EDs com variáveis separáveis;
- ▶ EDs exatas;
- ▶ EDs homogêneas.

Aula Passada



EDs Lineares de Ordem 1:

$$y' + a(t)y = b(t),$$

$a(t), b(t)$ contínuas para $t \in J$

- ▶ Não Homogêneas.
- ▶ Casos Especiais: transformar EDs não lineares em EDs lineares.

- ▶ Equação de Bernoulli:

$$y' + p(t)y = q(t)y^n$$

Dividir por y^n e substituir $z(t) = [y(t)]^{1-n}$.

- ▶ Equação de Riccati:

$$y' + p(t)y + q(t)y^2 = f(t)$$

Com solução y_1 conhecida, substituir $y(t) = y_1(t) + \frac{1}{z(t)}$.

Variáveis Separáveis



Para uma ED de primeira ordem na forma

$$M(t, y) + N(t, y)y' = 0$$

se podemos escrever

$$M(t, y) = P(t)Q(y), \quad N(t, y) = R(t)S(y),$$

então

$$P(t)Q(y) + R(t)S(y)y' = 0$$

é uma **ED com Variáveis Separáveis**.

Resolvemos a ED por *separação de variáveis*, se $R(t) \neq 0$ e $Q(y) \neq 0$:

$$P(t)Q(y) dt + R(t)S(y) dy = 0 \quad dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{S(y)}{Q(y)} dy = -\frac{P(t)}{R(t)} dt$$

Variáveis Separáveis (cont.)



Exemplo: Determine a solução $y(t)$ do PVI

$$\begin{cases} e^y t^2 + \frac{1}{3}y' = 0 \\ y(1) = -\ln(2) \end{cases}$$

Solução: Se rearranjarmos a ED, com $y' = \frac{dy}{dt}$, temos

$$e^y t^2 + \frac{1}{3} \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 3e^y t^2 dt + \frac{dy}{dt} dt = 0 \\ \Rightarrow -e^{-y} dy = 3t^2 dt$$

$$-\int e^{-y} dy = \int 3t^2 dt \Rightarrow e^{-y} = t^3 + C$$

$$\Rightarrow e^y = \frac{1}{t^3 + C} \Rightarrow y(t) = -\ln(t^3 + C), \quad t^3 + C > 0$$

$$y(1) = -\ln((1)^3 + C) = -\ln(2) \Rightarrow C = 2 - 1 = 1$$

$$\therefore y(t) = -\ln(t^3 + 1), \quad t > -1.$$

EDs Exatas



Observemos, agora, EDs na forma

$$M(t, y) + N(t, y) y' = 0 \quad \text{ou} \quad M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0.$$

A ED acima é uma **equação diferencial exata** se, para $(t, y) \in A \subset \mathbb{R}^2$, for possível encontrar uma função $V = V(t, y) : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial t} V(t, y) = M(t, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} V(t, y) = N(t, y).$$

Exemplo 1: A ED $2ty + t^2 y' = 0$ é exata.

Exemplo 2: $t^2 y' + 2ty = 2t$ é exata, e $t^2 y' + 2ty = 3t$ também é.

Obs.: Se a ED é exata, $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$.

Variáveis Separáveis (cont.)



Exemplo: Resolva $y' + y^2 \cos(t) = 0$.

Solução: (na lousa)

$$y(t) = \frac{1}{\sin(t) + C}, \quad C \in \mathbb{R}, \{t \in \mathbb{R} : \sin(t) + C \neq 0\}.$$

$y \equiv 0, t \in \mathbb{R}$ também é solução.

EDs Exatas (cont.)



A função $V(t, y)$ é chamada uma **integral primeira** da ED exata e as *curvas* definidas pela equação $V(t, y) = C$ são chamadas **curvas integrais** da ED exata.

As soluções da ED exata são dadas *implicitamente* por $V(t, y) = C$.

Exemplo: A ED $t^2 y' + 2ty = 4t$ é exata, pois existe $V(t, y) = t^2(y - 2)$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial t} [t^2(y - 2)] = 2t(y - 2) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} [t^2(y - 2)] = t^2.$$

Então $V(t, y) = t^2(y - 2)$ é uma integral primeira da ED e $t^2(y - 2) = C$ são as curvas integrais (solução geral da ED).

EDs Exatas (cont.)



Dada uma ED

$$M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0,$$

como encontrar uma integral primeira $V(t, y)$?

Primeiro precisamos determinar se a ED é exata.

Teorema: Suponhamos que M, M_y, M_t, N, N_y, N_t sejam contínuas num retângulo

$$\mathcal{R} = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : a < t < b, c < y < d\}.$$

Então a ED é uma ED exata se, e somente se,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

para todo $(t, y) \in \mathcal{R}$. (Prova por Teorema de Schwarz).

EDs Exatas (cont.)



Exemplo: Resolva a ED $(t^2 + y^2) dt + 2ty dy = 0$.

Solução: (na lousa)

Verificar se é ED exata. Se for, determinar $V(t, y)$ e depois igualar a uma constante para obter a solução geral da ED.

$$t^3 + 3ty^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Obs.: A solução nesse caso é *implícita*, então não incluímos o intervalo de t .

EDs Exatas (cont.)



Então, se a ED é exata, podemos determinar $V(t, y)$ através do seguinte procedimento:

Como $\frac{\partial}{\partial t} V(t, y) = M(t, y)$ e $\frac{\partial}{\partial y} V(t, y) = N(t, y)$, então

$$V(t, y) = \int M(t, y) dt + h(y)$$

com $h(y)$ sendo uma função arbitrária de y . Se derivamos com relação a y ,

$$\frac{\partial V(t, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(t, y) dt + \frac{d}{dy} h(y) = N(t, y),$$

e assim determinamos $h(y)$ e conseqüentemente $V(t, y)$.