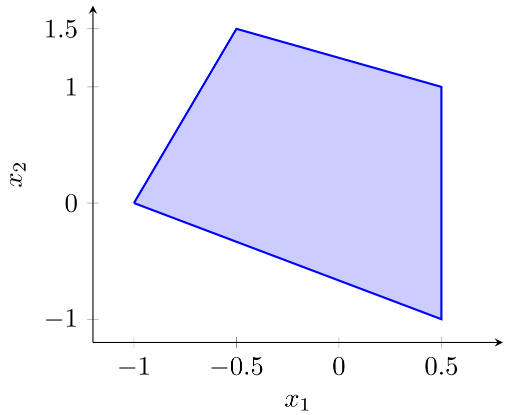
Lista 1 - Modelagem de problemas lineares

Exercício 1.

Considere o problema $min\{c_1x_1 + c_2x_2 \ : \ Ax \leq b\}$ cuja região factível é dada pela figura a seguir.



(a) Determine a matriz A e o vetor b.

(b) Supondo que $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$, escolha quatro pares (c_1, c_2) para obter quatro soluções ótimas diferentes. Indique o ponto (x_1, x_2) e o valor da solução ótima para cada par (c_1, c_2).

(c) Refaça o exercício para o problema $max\{c_1x_1 + c_2x_2 \ : \ Ax \leq b\}$.

Exercício 2.

Dois de seus amigos possuem, cada um, R$ 10.000 para investir. O primeiro deseja escolher entre dois investimentos A e B e o segundo entre os investimentos C e D. Alguns destes investimentos possuem limites mínimos e/ou máximos de quantia a ser investida. Estas informações e o rendimento anual de cada investimento são apresentados na tabela a seguir.

Investimento	**Min**	**Max**	**Rendimento**
A	0	não há limite	9,0%
B	1.000	5.000	11,0%
C	500	não há limite	10,5%
D	0	3.000	11,5%

(a) Modele o problema de decisão do primeiro amigo, $z_1 = max\{c^Tx : Ax \leq b\}$.

(b) Modele o problema de decisão do segundo amigo, $z_2 = max\{c^Tx : Cx \leq d\}$.

(c) Desenhe a região factível dos dois problemas. Qual a solução ótima, z_1 e z_2, de cada um deles?

(d) Você também possui R$ 10.000 e deseja escolher em qual das quatro opções investir. Em outras palavras, você deseja resolver o problema $z_3 = max\{c^Tx : Ax \leq b, Cx \leq d\}$. Qual a relação entre z_1, z_2 e z_3?

Exercício 3.

Um fabricante produz copos e garrafas. Para isso, ele pode utilizar dois processos P_1 e P_2. A produção de copos leva 30 minutos usando o processo P_1 e 20 minutos usando o processo P_2. A produção de garrafas leva 35 minutos com o processo P_1 e 40 com o processo P_2. Devido à mão-de-obra disponível, só se pode utilizar, por semana, 40 horas do processo P_1 e 30 horas do processo P_2. Modele o problema de se organizar a produção de forma a se ter um estoque máximo conjunto de copos e garrafas no fim de semana.

Exercício 4.

Considere um conjunto de líquidos coloridos de diversas cores e um conjunto de recipientes. Cada cor tem uma pontuação associada $\{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ por mililitro utilizado e cada recipiente tem uma capacidade volumétrica $\{v_1, v_2, \ldots, v_M\}$. Escreva um modelo de programação linear para escolher o volume de cada cor a ser posto em cada recipiente para maximizar a pontuação ganha. Suponha que há l_i mililitros disponíveis do líquido com cor c_i e que não há problemas em misturar os líquidos.

Lista 1 - Resolução

Exercício 1.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ -3 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$b = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 3, -1\right]^T$$

(b) $(c_1, c_2)_1 = (-1, -1)$, $(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}, 1)$ e valor da solução igual a $\frac{3}{2}$.
$(c_1, c_2)_2 = (1, -1)$, $(x_1, x_2) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ e valor da solução igual a -2.
$(c_1, c_2)_3 = (1, \frac{1}{100})$, $(x_1, x_2) = (-1, 0)$ e valor da solução igual a -1.
$(c_1, c_2)_4 = (-1, 1)$, $(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}, -1)$ e valor da solução igual a $-\frac{3}{2}$.

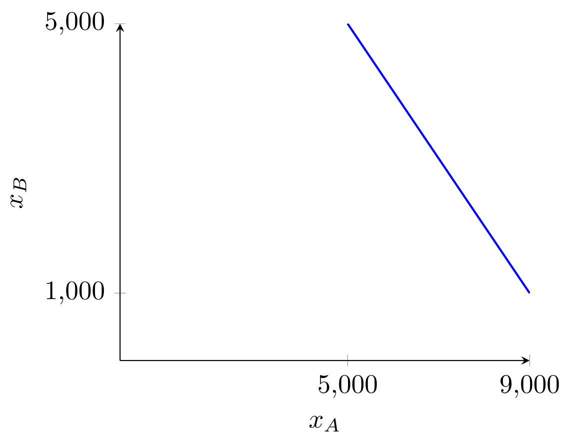
(c) o item (a) permanecesse o mesmo. A solução do item (b) pode ser obtida multiplicando os valores c_1, c_2 e do valor da solução por -1.

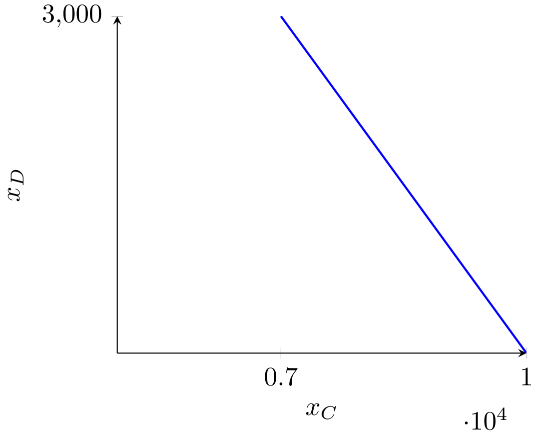
Exercício 2.

(a) $z_1 = \max\ 0,09x_A + 0,11x_B$
sujeito a:
$x_A + x_B = 10.000$
$0 \leq x_A$
$1.000 \leq x_B \leq 5.000$
em que: x_A é a quantia investida em A e x_B é a quantia investida em B.

(b) $z_2 = \max\ 0,105x_C + 0,115x_D$
sujeito a:
$x_C + x_D = 10.000$
$500 \leq x_C$
$0 \leq x_D \leq 3.000$
em que: x_C é a quantia investida em C e x_D é a quantia investida em D.

As regiões factíveis são dadas por:





(d) Senão fosse exigida a aplicação mínima nos investimento, a relação seria dada por $z_3 \geq max\{z_1, z_2\}$. No entanto, como o mínimo é exigido para alguns investimentos, não há uma relação imediata entre z_3, z_2 e z_1.

Exercício 3.

Um modelo possível é:
$z = \max\ x_1 + x_2$
sujeito a:
$30x_1 + 35x_2 \leq 2400,$
$20x_1 + 40x_2 \leq 1800,$
$x_1 \geq 0,$
$x_2 \geq 0,$
em que: x_1 é a quantia de copos a serem produzidas e x_2 é a quantia de garrafas.

Exercício 4.

Um modelo possível é:
$z = \max\ \sum_{r=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} c_i x_{ir}$
sujeito a:
$\sum_{i=1}^{N} x_{ir} \leq v_r$, para $r = 1, \ldots, M$,
$x_{ir} \geq 0$, para $i = 1, \ldots, N$, $r = 1, \ldots M$,
em que: x_{ir} é a volume de líquido da cor i colocada no recipiente r.