

Programação Matemática

Professoras:
Franklina Toledo e Maristela Santos*

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação -
ICMC
Universidade de São Paulo – USP

*Estes slides foram feitos em colaboração com pesquisadores do Laboratório de Otimização.

Ementa:

- Definição e formulação de problemas de programação matemática.
- Teoria da programação linear e o método simplex.
- Programação inteira e o algoritmo de separação e avaliação (branch-and-bound).
- Heurísticas.

Objetivos do curso:

- **Modelagem:** capacitar o aluno a compreender e escrever modelos matemáticos para representar problemas simples de otimização linear (com variáveis contínuas e inteiras).
- **Resolução de problemas:**
 - capacitar o aluno a resolver problemas pequenos lineares e lineares inteiros (método simplex e método *branch-and-bound*);
 - capacitar o aluno a resolver problemas maiores por um software de otimização;
 - capacitar o aluno a compreender e elaborar heurísticas simples.

Material do Curso:

- ARENALES, M; ARMENTANO, V; MORABITO, R E YANASSE, H Pesquisa operacional . Ed. Campus, 2006.
(Livro Texto)
- WINSTON, W.L. – Operations Research – Applications and Algorithms – IE-THOMSON, 2004.
- GOLDBARG, M.C. e LUNA, H.P.L – Otimização Combinatória e Programação Linear – Modelos e Algoritmos – Editora CAMPUS, 2005.
- BERTSIMAS, D. E TSITSIKLIS, J.N. – Introduction to Linear Optimization, Athena Scientific, 1997.
- HILLIER, F.S.; LIEBERMAN, G.J.- Introdução à Pesquisa Operacional, Rio de Janeiro, RJ, Campus, 1988.
- BAZARAA,M.S.; JARVIS,J.J., Linear Programming and Network Flows, John Wiley and Sons, N.Y., 1977.
- **Material de apoio:** aulas no TIDIA

Avaliações:

Provas:

Provas intermediárias (9 provas): 70% nota

Prova Final – 30% nota – (28/11/2016)

Nota: Observem o cronograma disponível no TIDIA.

Lembrem-se: Possíveis alterações do cronograma podem ser realizadas.

Avaliação:

$$\text{NotaFinal} = 0,7 * \text{MProvas} + 0,3 * \text{ProvaFinal}$$

MProvas = média aritmética das 70% melhores provas.

Horário de Atendimento:

Estagiário PAE:

- Confirmar no TIDIA

Professora:

- Confirmar no TIDIA

Vídeo:

www.youtube.com/watch?v=tX6Rw7KJGjE

Um breve histórico de PO

- 1939-1945: Durante a 2a Guerra Mundial, as gerências militares britânica e americana empregaram uma abordagem científica para tratamento de problemas de gerenciamento de recursos escassos (radares, tropas, munição, remédios etc.), de forma eficaz.
- 1936: British military applications: Foi utilizado o termo "operational research".

Programação Matemática

- O que é otimização?
- Será que vocês já resolveram algum problema de otimização antes?
- Otimização tem utilizada prática?

Programação Matemática

Um estudante deseja balancear os alimentos que consome no café da manhã, de modo que minimize o custo. Para isso, ele pretende se alimentar de modo que consuma no mínimo 130mg de cálcio e no máximo 480 kcal. O valor nutritivo e o preço por porção dos alimentos a serem considerados são dados por:

Tipo de alimento	Porção	Cálcio (mg)	Energia (kcal)	Preço (R\$)
Leite achocolatado	100ml	70	83	0,90
Pão de forma	100g	2,5	343	0,10

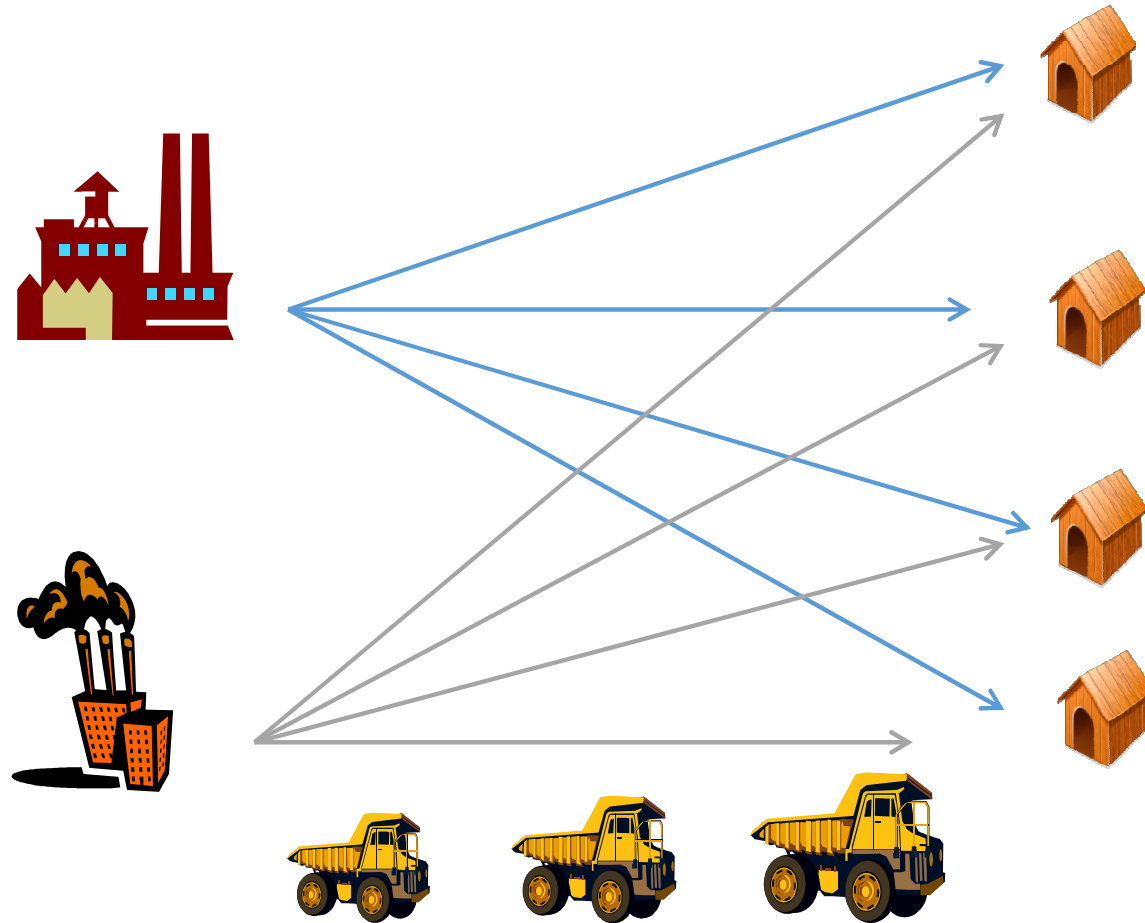
Quanto de cada alimento ele deve consumir?

Programação Matemática:

"Em matemática, o termo otimização, ou programação matemática, refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras dentro de um conjunto viável."

Fonte: Wikipedia.

Programação Matemática



Programação Matemática

- Recursos escassos:
 - Minimizar tempo para realizar tarefas diárias;
 - Minimizar custos;
 - Minimizar o espaço utilizado.
- Melhorar eficiência de empresas.
- Ajudar na organização do planejamento e da produção.

Grande Área: Pesquisa Operacional (Operations Research)

"Pesquisa operacional (PO) é um ramo interdisciplinar da matemática aplicada que faz uso de modelos matemáticos, estatísticos e de algoritmos na ajuda à tomada de decisões. É usada sobretudo para analisar sistemas complexos do mundo real, tipicamente com o objetivo de melhorar ou otimizar a performance."

Fonte: Wikipedia

Um breve histórico de PO

- 1939-1945: Durante a 2a Guerra Mundial, as gerências militares britânica e americana empregaram uma abordagem científica para tratamento de problemas de gerenciamento de recursos escassos (radares, tropas, munição, remédios etc.), de forma eficaz.
- 1936: British military applications: Foi utilizado o termo "operational research".

Um breve histórico de PO

- 1947: Início do interesse das indústrias na utilização das técnicas desenvolvidas na área militar, para auxiliar no planejamento e controle da produção.
- A maioria desses problemas é formulada por meio de modelos matemáticos lineares

Um breve histórico de PO

- 1947: George B. Dantzig propôs um método prático para solução de modelos lineares (paper: Programming in a Linear Structure).
- Em 1979, Leonid Khachiyan desenvolveu um novo algoritmo para resolver modelos de programação linear: o Algoritmo Elipsóide (tempo polinomial porém mais lento do que o Simplex).
- Em 1984, surge mais um método de se resolver problemas lineares: Algoritmo dos Pontos Interiores, criado por Narendra Karmarkar (tempo polinomial e competia com o Simplex).
- mais datas(<http://www.lionhrtpub.com/orms/orms-10-02/frhistorysb1.html>)

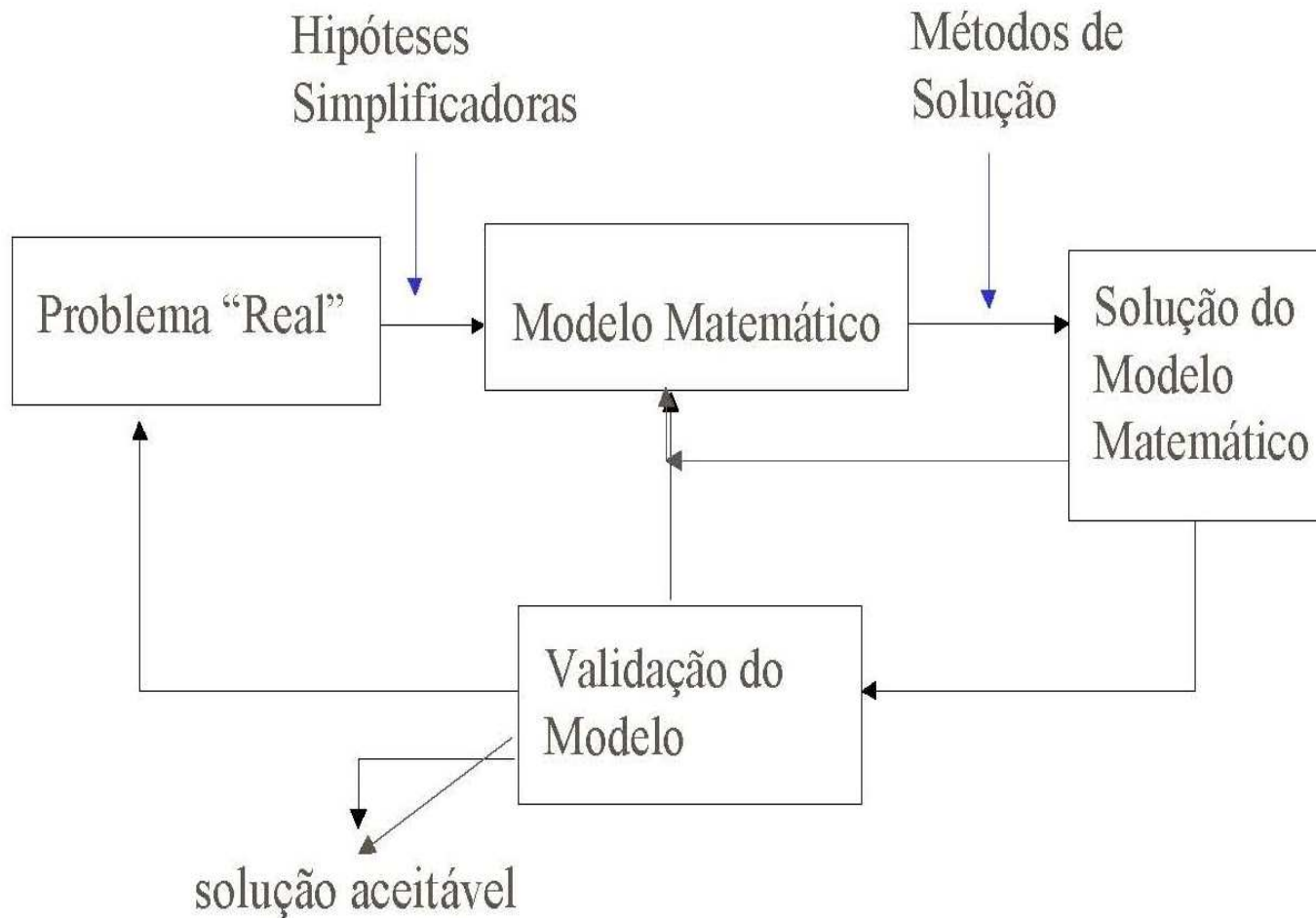
Problema da dieta George Stigler (Historia)

- Primeiro problema de computação de grande escala com o método simplex de George B. Dantzig.
- Em 1945, George Stigler apresentou o problema (Stigler, 1945): para um homem mediano pesando aproximadamente 70 kg, qual quantidade dentre 77 diferentes alimentos deveria ser ingerida diariamente, de modo que as necessidades mínimas de nutrientes fossem iguais às recomendadas pelo Conselho Nacional de Pesquisa Norte-americano e, além disso, a dieta elaborada tivesse o menor custo possível .
- 9 inequações e 77 variáveis não negativas- Heurística de Stigler avaliou 510 diferentes possibilidades de combinação de alimentos – Solução 39,93 dólares por ano.
- Método Simplex (1947) - apoio de 9 pessoas utilizando calculadoras de mesa de operação manual e utilização de um recurso estimado de 120 dias-homem- Solução ótima - 39,69 dólares . Hoje menos de 1s nos computadores atuais.
- (Retirado do artigo: NAMEN, Anderson Amendoeira; BORNSTEIN, Cláudio Thomás. Uma ferramenta para avaliação de resultados de diversos modelos de otimização de dietas. **Pesqui. Oper.**, Rio de Janeiro , v. 24, n. 3, p. 445-465).

Associações Científicas

- IFORS - International Federation Of Operational Research Societies (<http://ifors.org/web/>) .
- EURO - The Association of European Operational Research Societes (<http://www.euro-online.org>).
- SOBRAPO - Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (<http://www.sobrapo.org.br/>)
- SBMAC- Sociedade de Matemática Aplicada e Computacional (<http://www.sbmac.org.br/>).

Resolução de um problema utilizando PO segue as seguintes fases



Razão para a construção de modelos

- Entender melhor o problema;
- Analisar diversas soluções;
- Propor soluções não aparentes;
- Experimentar diversos cenários.



Modelo?



Foto tirada no Museu da TAM.

Construindo um modelo matemático

- Passo Fundamental: Ouvir aquele que lida com o problema real.
- Passo 1: Descobrir o que deve ser determinado (variáveis do problema).
- Passo 2: Descobrir o que está disponível (dados do problema).
- Passo 3: Reproduzir os caminhos que levam a uma solução (equações).

Construindo um modelo matemático

- A busca de uma solução mais adequada entre diversas soluções alternativas traz consigo os elementos de um Problema de Otimização
- Devemos estabelecer um critério de avaliação das soluções alternativas, o qual nos permite dizer que uma solução é “melhor” que outra (objetivo ou subjetivo).
- A este critério de avaliação chamamos de função objetivo, que buscamos otimizar, ou seja, maximizar ou minimizar.
- Por outro lado, as soluções alternativas devem ser possíveis de execução indicando a presença de restrições que devem ser respeitadas

Construindo um modelo matemático

- **Formato geral:**

Minimize (maximize)

função objetivo

Sujeito a:
inequações

restrições: equações ou

domínio das variáveis

Construindo um modelo matemático

- **Formato geral:**

Minimize (maximize) $f(x)$

Sujeito a: $x \in \Omega$

Construindo um modelo matemático

- Dependendo do comportamento de $f(x)$ e de como o conjunto Ω é descrito, temos diferentes classes de problemas de otimização, para os quais uma variedade de métodos de solução tem sido desenvolvida.
- Otimização linear.
- Otimização não linear.
- Otimização Inteira.
- Controle ótimo.